MATHEMATIQUES DS N°3

R&T Saint-Malo - 1ère année - 22/01/09 - 2008/2009 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Calculer :

1°. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ dx$ 2°. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \cos^2 x\ dx$ 3°. $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\ln x\ dx$

4°. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} t^2 \sin t\ dt$ 5°. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch } x}$ 6°. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$

Dans la question 5°, on pourra poser $u = e^x$

Dans la question 6°, on pourra poser $u = \tan(x/2)$

II. 4 points.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\ dx$ pour $n \geq 0$

1°. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2°. Calculer $I_1 + I_3$ et en déduire la valeur de I_3

III. 5 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1°. $x^2y' - y = 0$ 2°. $y' + y = x^2$ 3°. $y' + y = e^{2x}$

IV. 4 points.

Dans cet exercice, les questions sont dans une large mesure indépendantes. Vous pouvez admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

On considère un amortisseur de voiture. Celui-ci est composé d'un ressort et d'un vérin reliant le pneu à la voiture. Le ressort de constante de raideur k exerce une force de rappel $\vec{R} = -k\vec{y}$ qui s'oppose au déplacement (y représente l'allongement du ressort) et le verin exerce une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\vec{F_0} = -\alpha\vec{v}$.

m est la masse de la voiture, g la constante de la gravitation universelle et $\alpha, k, m, g > 0$.

On rappelle que la relation fondamentale de la dynamique est $\Sigma\vec{F} = m\vec{\gamma}$ où $\vec{\gamma}$ est l'accélération

1°. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, démontrer que l'élongation du ressort vérifie l'équation différentielle

$$y'' + \frac{\alpha}{m}y' + \frac{k}{m}y = g$$

2°. On suppose que $\alpha < 2\sqrt{km}$. Déterminer la forme générale des solutions (on pourra poser $\lambda = \dfrac{1}{2m}\sqrt{4km - \alpha^2}$)
3°. Résoudre l'équation dans le cas où $\alpha = k = 2m$ et $g = 10$.

V. 2 points.

A l'aide d'un développement limité, déterminer les branches infinies de $f(x) = x^2\left(e^{1/x} - 1\right)$