MATHEMATIQUES DS N°3 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 22/01/09 - 2008/2009 -

Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Calculer :

1°. $\int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\rfloor_0^1 = \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x \cos^2 x\ dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x\rfloor_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $\int_1^2 (x+1)\ln x\ dx$

$= \left[(\frac{1}{2}x^2 + x)\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 (\frac{x^2}{2} + x)\frac{dx}{x} = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$

$\boxed{\text{1 point}}$ En intégrant par parties.

4°. $\int_0^{\pi/3} t^2 \sin t\ dt = -\frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 1$ $\boxed{\text{1 point}}$
après une double intégration par parties.

5°. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch } x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ $\boxed{\text{2 points}}$

6°. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}\ dx = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2+2t}$

$= 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{-2}{1+t}\rfloor_0^1 = 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

II. 4 points.

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\ dx$

1°. Calculer I_0, I_1 et I_2.

$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x\rfloor_0^1 = \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\rfloor_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ $\boxed{\text{1 point}}$

$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\ dx = (x - \arctan x)_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\text{1 point}}$

2°. Calculer $I_1 + I_3$ et en déduire la valeur de I_3

$I_1 + I_3 = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}x^2\rfloor_0^1 = \frac{1}{2}$ et donc

$I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

III. 5 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1°. $x^2y' - y = 0$

$\iff y'/y = 1/x^2 \iff y = ke^{-1/x}\ k \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{1 point}}$

2°. $y' + y = x^2$

L'équation homogène a pour solution $z(x) = ke^{-x}$

$\boxed{\text{1 point}}$

On cherche un solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2. Après calculs, il vient
$y_0(x) = x^2 - 2x + 2$ $\boxed{\text{1 point}}$ et la solution générale est
$y(x) = ke^{-x} + x^2 - 2x + 2$

3°. $y' + y = e^{2x}$

L'équation homogène est la même que précédemment :
$z(x) = ke^{-x}$ $\boxed{\text{1 point}}$
En utilisant la méthode de la variation de la constante, on a $y_0(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$ et donc $y(x) = ke^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$

IV. 5 points.

Dans cet exercice, les questions sont dans une large mesure indépendantes. Vous pouvez admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

On considère un amortisseur de voiture. Celui-ci est composé d'un ressort et d'un vérin reliant le pneu à la voiture. Le ressort de constante de raideur k exerce une force de rappel $\vec{R} = -k\vec{y}$ qui s'oppose au déplacement (y représente l'allongement du ressort) et le verin exerce une force de frottement proportionnelle à la vitesse
$\vec{F_0} = -\alpha\vec{v}$.

m est la masse de la voiture, g la constante de la gravitation universelle et $\alpha, k, m, g > 0$.

On rappelle que la relation fondamentale de la dynamique est $\Sigma\vec{F} = m\vec{\gamma}$ où $\vec{\gamma}$ est l'accélération

1°. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, démontrer que l'élongation du ressort vérifie l'équation différentielle

$$y'' + \frac{\alpha}{m}y' + \frac{k}{m}y = g$$

On a $\vec{R} + \vec{F_0} + m\vec{g} = m\vec{\gamma}$ en appliquant la loi. On projète cette relation sur un axe vertical et l'on obtient
$-ky - \alpha y' + mg = my''$, soit encore

$y'' + \alpha/my' + k/my = g$ qui est la relation demandée
$\boxed{\text{1 point}}$

2°. On suppose que $\alpha < 2\sqrt{km}$. Déterminer la forme générale des solutions.

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 + \alpha/mr + k/m = 0$. Le discriminant de cette équatione est $\Delta = \frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{4k}{m}$ qui est négatif ssi $\alpha < 2\sqrt{km}$. En ce cas, les solutions complexes sont

$$-\frac{\alpha}{2m} \pm \frac{i}{2m}\sqrt{4km - \alpha^2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm ß\lambda$$

D'après le cours, les solutions sont
$e^{-\alpha/(2m)t}\left(a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t)\right)\ a, b \in \mathbb{R}$
La solution particulière est la constante mg/k $\boxed{\text{2 points}}$

3°. Résoudre l'équation dans le cas où $\alpha = k = 2m$ et $g = 10$.

L'équation devient $y'' + 2y' + 2y = 10$. Où bien on remplace dans l'équation précédente les constantes par leur valeur, ou bien on peut résoudre l'équation à partir

de cette seule question et l'on trouve
$y(t) = e^{-t}(a\cos t + b\sin t) + 5$ $\boxed{\text{1 point}}$

V. 2 points.

A l'aide d'un développement limité, déterminer les branches infinies de $f(x) = x^2\left(e^{1/x} - 1\right)$

On a $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6x} + o(\dfrac{1}{x})$
On a une asymptote verticale en $x = 0$ et une asymptote oblique en $\pm\infty$ d'équation $y = x + 1/2$. Elle est au dessus en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$ $\boxed{\text{2 points}}$