*Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.*
*Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.*

**I.** 4 points.

Calculer :

1°. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 2°. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 3°. $\begin{vmatrix} 30 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

**II.** 2 points.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que $A$ est inversible et calculer son inverse.

**III.** 6 points.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

1°. On pose $P(x) = \det(A - xI)$. $P(x)$ s'appelle le polynôme caractéristique de la matrice.
Démontrer que $P(x) = x^2 - 2x$

2°. Déterminer les racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de ce polynôme. On les appelle les valeurs propres de la matrice $A$.

3°. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Démontrer que $A\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{u}$ et $A\overrightarrow{v} = \lambda_2\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs propres de $A$ associés à chacune des deux valeurs propres.

4°. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.

5°. Calculer $D = P^{-1}AP$. Que remarquez-vous ? On dit que l'on a diagonalisé la matrice $A$.

**IV.** 4 points

1°. A l'aide de la définition, calculer explicitement la transformée de Laplace de la fonction de heaviside $H(t)$.

2°. En déduire la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = H(t-1)$. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

3°. Calculer la transformée de Laplace de $g(t) = H(t) - H(t-1)$. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

4°. Tracer l'allure de la courbe représentative de $h(t) = (t-1)H(t-1) - 2(t-2)H(t-2)$ et calculer sa transformée de Laplace.

**V.** 4 Points

Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

1°. $\dfrac{1}{(p-2)(p+3)}$ 2°. $\dfrac{1}{p^2+2p-3}$ 3°. $\dfrac{1}{p^2+p+1}$