MATHEMATIQUES DS N°4 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 12/06/08 - 2007/2008 -

Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 4 points.

Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 18 \ \boxed{1 \text{ point}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \ \boxed{1 \text{ point}}$$

$$\begin{vmatrix} 30 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -30 \ \boxed{2 \text{ points}}$$

II. 2 points.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 3$ $\boxed{1 \text{ point}}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \ \boxed{2 \text{ points}}$$

III. 6 points.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

1°. On pose $P(x) = \det(A - xI)$. $P(x)$ s'appelle le polynôme caractéristique de la matrice.
Démontrer que $P(x) = x^2 - 2x$

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 1 = x^2 - 2x$$

$\boxed{1 \text{ point}}$

2°. Déterminer les racines λ_1 et λ_2 de ce polynôme. On les appelle les valeurs propres de la matrice A.

$x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$ $\boxed{1 \text{ point}}$

3°. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
Démontrer que $A\overrightarrow{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u}$ et $A\overrightarrow{v} = \lambda_2 \overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs propres de A associés à chacune des deux valeurs propres.

$$A\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\overrightarrow{u}$$

$$A\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{v} \ \boxed{1 \text{ point}}$$

4°. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

$\det P = 2$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5°. Calculer $D = P^{-1}AP$. Que remarquez-vous ? On dit que l'on a diagonalisé la matrice A.

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{1.5 \text{ points}}$
D est une matrice diagonale dont les valeurs propres forment la diagonale $\boxed{0.5 \text{ point}}$

IV. 4 points

1°. A l'aide de la définition, calculer explicitement la transformée de Laplace de la fonction de heaviside $H(t)$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p} \ \boxed{1 \text{ point}}$$

2°. En déduire la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = H(t-1)$. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p} \ \boxed{1 \text{ point}}$$

3°. Calculer la transformée de Laplace de $g(t) = H(t) - H(t-1)$. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

$G(p) = \dfrac{1 - e^{-p}}{p}$ $\boxed{0.5 \text{ point}}$ et le dessin vaut $\boxed{0.5 \text{ point}}$

4°. Tracer l'allure de la courbe représentative de $h(t) = (t-1)H(t-1) - 2(t-2)H(t-2)$ et calculer sa transformée de Laplace.

$$H(p) = \frac{e^{-p} - 2e^{-2p}}{p^2} \ \boxed{1 \text{ point}}$$

V. 4 Points

Déterminer les originaux des fonctions suivantes :

1°. $\dfrac{1}{(p-2)(p+3)} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{p-2} - \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{p+3}$

$\Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})H(t)$ $\boxed{1 \text{ point}}$

2°. $\dfrac{1}{p^2 + 2p - 3}$

$\Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{2}\sinh(2t)e^{-t}H(t)$ $\boxed{1 \text{ point}}$

3°. $\dfrac{1}{p^2 + p + 1} = \dfrac{1}{(p + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$

$\Rightarrow f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)H(t)$ $\boxed{2 \text{ points}}$