MATHEMATIQUES DS N°4

R&T Saint-Malo - 1ère année - 03/06/09 - 2008/2009 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

Première partie : Transformation de Fourier.

I. 5 points.

Soit $\Pi(t) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t)$

1°. Calculer explicitement $\hat{\Pi}(u)$ puis en déduire la transformée de Fourier de $f(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

2°. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

3°. A l'aide de la formule de Parseval, calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

II. 6 points.

Soit $\epsilon > 0$ fixé et soit $f_\epsilon(t) = \dfrac{t}{\epsilon}\mathbb{1}_{[-\epsilon,\epsilon]}(t) + \mathbb{1}_{]\epsilon,+\infty[}(t) - \mathbb{1}_{]-\infty,-\epsilon[}(t)$

Nous noterons $H(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ la fonction de Heaviside.

1°. Tracer l'allure de la courbe représentative des fonctions $f_\epsilon(t)$ et $H(t)$

2°. On note $\text{sign}(t) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t)$ la fonction "signe" qui vaut $+1$ lorsque t est positif et -1 lorsqu'il est négatif.

Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction.

3°. démontrer que $H(t) = \dfrac{1 + \text{sign}(t)}{2}$ pout tout $t \neq 0$.

4°. Pour $t \neq -\epsilon, \epsilon$, calculer $f'_\epsilon(t)$ puis en déduire l'expression de $\widehat{f'_\epsilon}(u)$

5°. En déduire alors $\widehat{f_\epsilon}(u)$ à l'aide des propriétés de la transformation de Fourier.

6°. En utilisant les questions précédentes, démontrer que $\widehat{\text{sign}}(u) = \dfrac{1}{\pi i u}$

7°. Rappeler quelle est, au sens des distributions, la transformée de Fourier de la masse de Dirac $\delta(t)$. En déduire que, au sens des distributions, la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside est

$$\widehat{H}(u) = \frac{1}{2}\left(\delta(u) + \frac{1}{\pi i u}\right)$$

Seconde partie : Calcul matriciel.

III. 5 points.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1°. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2°. Calculer $B = P^{-1}AP$
3°. Démontrer que $A^n = PB^nP^{-1}$
4°. Calculer B^2

IV. 5 points.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1°. Démontrer que toute matrice M peut s'écrire sous la forme $M = aI + bJ$ où I et J sont des matrices que l'on déterminera.
2°. Calculer I^2, J^2, IJ, JI et en déduire l'expression de MM' si $M' = a'I + b'J$ est une autre matrice de $\mathcal{S}$.
3°. Déterminer a' et b' pour que M' soit l'inverse de la matrice M. A quelle condition sur a et b M est-elle inversible ?
4°. Soit démontrer que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}P$ et calculer $P^{-1}MP$