MATHEMATIQUES DS N°5

R&T Saint-Malo - 1ère année - 18 juin 2009 - Année Scolaire 2008/2009 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 9 points.

Calculer les déterminants suivants :

1°. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 2°. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 3°. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 4°. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 5°. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

II. 7 points.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

1°. Pour quelles valeurs de α, la matrice A est-elle inversible ?
2°. Calculer alors l'inverse de A en fonction de α
3°. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x + \alpha y = -3 \\ y - z = 4 \\ \alpha x + z = 7 \end{cases}$ et discuter du nombre de solutions selon la valeur de α.

III. 7 points.

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2°. Calculer $D = P^{-1}AP$
3°. Démontrer que pour tout entier n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$
4°. Calculer D^n et en déduire l'expression de A^n.