MATHEMATIQUES DS N°1

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2006/2007 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 14 points.

Considérons l'application linéaire u dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1°. Calculer $u(\vec{i})$, $u(\vec{j})$, $u(\vec{k})$. Déterminer $\ker A$ et $Im\ A$.

2°. Diagonaliser A en précisant la forme diagonale D et une matrice de passage P vers une base de vecteurs propres.

3°. On donne $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

4°. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = 2y \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Parmi les solutions, déterminer celle qui vérifie $x(0) = y(0) = 1$ et $z(0) = -1$.

5°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

II. 6 points.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions qui s'écrivent sous la forme $u(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} + \gamma$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

1°. Démontrer (rapidement) que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont vous donnerez une base et la dimension.
2°. Montrer que les fonctions $ch\ x$ et $sh\ x$ appartiennent à $\mathcal{E}$ et déterminer leurs coordonnées dans la base.
3°. On considère la fonction $d : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à une fonction $u(x)$ associe sa dérivée $u'(x)$. Démontrer que d est linéaire et déterminer sa matrice D dans la base ci-dessus. Déterminer les images par d de $ch\ x$ et $sh\ x$.
4°. Démontrer que $\{ch\ x, sh\ x, 1\}$ forment une base de $\mathcal{E}$. Déterminer une matrice de passage de la base initiale vers cette nouvelle base ainsi que la matrice de d dans cette base.