MATHEMATIQUES DS N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2006/2007

II. 14 points.

Considérons l'application linéaire u dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1°. Sur 1 point ; $u(\vec{i}) = (2,0,0)$, $u(\vec{j}) = (-1,2,-1)$, $u(\vec{k}) = (1,0,3)$. Il s'agit tout simplement des 3 colonnes de A.

Déterminer $\ker A$ et $Im\ A$ en précisant une base et la dimension (1 point).

$\vec{X}(x,y,z) \in \ker A \iff x = y = z = 0$

$\ker A$ est le sous espace nul (de dim 0). Ainsi, $Im\ A$ est l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

2°. $P(X) = (2-X)^2(3-X)$; les valeurs propres de A sont donc 2 et 3 (1 point).

A est diagonalisable ssi $\dim E_2 = 2$.

$\vec{X}(x,y,z) \in E_2 \iff y = z$ et

$\vec{X}(x,y,z) \in E_3 \iff x = z$ et $y = 0$. Ainsi,

$E_2 = vect\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1,5 point par sous espace si base et dim)

On peut alors choisir pour matrice P la matrice donnée dans l'énoncé (ses colonnes sont des vecteurs propres de A et dans cette base la matrice de l'application linéaire associée à A devient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (1 point).

3°. On donne $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

P est-elle inversible ? Si oui, calculer P^{-1} (2 points).

$\det P = -1 \neq 0$ donc P est inversible et

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4°. On pose $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors $X' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et le système devient $X' = AX$. Dans la base de vecteurs propres, cette équation devient $Y' = DY$ avec

$Y \begin{pmatrix} u \\ u \\ w \end{pmatrix} = P^{-1}X$. Le système diagonal revient à résoudre les 3 équations différentielles $u' = 2u$, $v' = 2v$ et $w' = 3w$. On a alors $Y = \begin{pmatrix} k_1 e^{2t} \\ k_2 e^{2t} \\ k_3 e^{3t} \end{pmatrix}$ avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

Dans la base canonique, on a donc

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = PY = \begin{pmatrix} k_2 e^{2t} + k_3 e^{3t} \\ k_1 e^{2t} + k_3 e^{3t} \\ (k_1 + k_2)e^{2t} + k_3 e^{3t} \end{pmatrix}$

(2 points).

En remplaçant t par 1 et -1, on obtient le système 3×3 suivant (dont les inconnues sont k_1, k_2, k_3) :

$$\begin{cases} k_2 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_2 + k_3 = -1 \end{cases}$$

De façon matricielle, ce système devient $PK = (1,1,-1)$ en posant $K(k_1,k_2,k_3)$. La solution unique est donc $K = P^{-1}(1,1,-1)$, ie $K = (-2,3,-2)$. La solution du système différentiel est alors

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{2t} - 2e^{3t} \\ y(t) = -2e^{2t} - 2e^{3t} \quad \text{(1 point).} \\ z(t) = e^{2t} - 2e^{3t} \end{cases}$$

5°. $A^n = PD^nP^{-1}$. De $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, il vient

$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - 3^n & 3^n \end{pmatrix}$ (2 points).

II. 6 points.

1°. Par construction, la somme de deux fonctions du type $\alpha e^x + \beta e^x + \gamma$ est encore de cette forme (il suffit d'ajouter les coefficients) et le produit d'une telle fonction par un nombre réel est encore de la même forme. Par ailleurs, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas vide puisque la fonction constante 1 y est (e^x et e^{-x} y sont aussi). C'est donc un espace vectoriel réel, sous-espace de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (1 point).

Il est clair que toute fonction de $\mathcal{E}$ est combinaison linéaire des trois fonctions e^x, e^{-x} et 1. Ces fonctions sont linéairement indépendantes car, par exemple, $\alpha e^x + \beta e^x + \gamma = 0\ \forall x$ entraine $\alpha + \beta + \gamma = 0$ en faisant $x = 0$. En dérivant une fois, puis deux fois et en posant $x = 0$, on obtient $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc il s'agit d'une base de $\mathcal{E}$ et $\dim \mathcal{E} = 3$. (1 point).

2°. $ch\ x = (e^x + e^{-x})/2$. Les coordonnées de cette fonction dans la base ci-dessus sont donc $(1/2, 1/2, 0)$. Pour $sh\ x$, on a de la même façon $(1/2, -1/2, 0)$. (1 point).

3°. La dérivation est clairement linéaire ; il en va donc de même de d. La matrice de d a pour colonnes les coordonnées des images des "vecteurs" de base :

$d(e^x) = e^x$, $d(e^{-x}) = -e^{-x}$ et $d(1) = 0$. Donc

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1,5 points).

Par ailleurs, $d(ch\ x) = sh\ x$ et $d(sh\ x) = ch\ x$ (0,5 point).

4°. $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det P = -1$: cette matrice est inversible, ce qui prouve que les trois vecteurs forment une base et dans cette base, la matrice de d est $B = P^{-1}DP$ que l'on peut donner directement et sans calcul (2 points) :

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$