MATHEMATIQUES DS N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2007/2008 - Durée : 2h -

I. 12 points.

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.

$$P(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -2 & 1 \\ 2 & -3-X & 2 \\ -1 & 2 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & -2 & 1 \\ 1-X & -3-X & 2 \\ 1-X & 2 & -X \end{vmatrix}$$

$P(X) = -(1-X)^2(X+3)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi, 1 est vp double et -3 vp simple. Après calculs, on trouve

$E_1 = \{(x,y,z)/\ x-2y+z=0\} = vect\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\}$ qui est de dimension 2 $\boxed{\text{1.5 points}}$

et de même,

$E_{-3} = \{(x,y,z)/\ x=-z; y=2x\} = vect\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. A est-elle diagonalisable ?

$\dim E_1 + \dim E_{-3} = 3$ et par suite A est diagonalisable. $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On considère maintenant la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

$\det P = 4 \neq 0$ et P est donc inversible $\boxed{\text{0.5 point}}$.

On trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$ et l'on vérifie que $PP^{-1} = I$

4°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

D'après la question 2, les colonnes de P forment une base de vecteurs propres de A et dans cette base, u a pour matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$ et par conséquent $A^n = PD^nP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2\times(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 2-2\times(-3)^n & 4\times(-3)^n & 2-2\times(-3)^n \\ -1+(-3)^n & 2-2\times(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{2 points}}$

5°. Résolution du système différentiel :

Posons $X = (x,y,z)$. Alors le système s'écrit de façon matricielle sous la forme $X' = AX$. Posons $Y = (u,v,w) = P^{-1}X$. En passant dans la base de vecteurs propres, le système devient $Y' = DY$. On intègre alors les équations différentielles obtenues :

$Y = \begin{pmatrix} k_1e^t \\ k_2e^t \\ k_3e^{-3t} \end{pmatrix}$ avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

Pour obtenir la solution du système, il suffit de revenir à la base canonique en effectuant le produit $X = PY$; on obtient :

$X = \begin{pmatrix} k_1e^t + k_2e^t + k_3e^{-3t} \\ k_1e^t + k_2e^t + 2k_3e^{-3t} \\ k_1e^t - k_3e^{-3t} \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Si $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ alors le vecteur $k = (k_1,k_2,k_3)$ est solution du système

$k = P \times (1,1,1) \iff k = P^{-1} \times (1,1,1) = (1,0,0)$ et en ce cas, $x(t) = y(t) = z(t) = e^t$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 6 points.

Soit v l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

$P(X) = (2-X)^2(1-X)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi, 2 est vp double et 1 vp simple. Après calculs, on trouve $E_1 = vect\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$ qui est de dimension 1 et de même, $E_2 = vect\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{2 points}}$

2°. B est-elle diagonalisable ?

$\dim E_1 + \dim E_{-3} = 2$ et par suite B n'est pas diagonalisable. $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $v(\vec{j}) = 2\vec{j}$ car $\vec{j}$ est un vecteur propre associé à 2.
$v(\vec{i}+\vec{j}) = \vec{i}+\vec{j}$ car $\vec{i}+\vec{j}$ est un vecteur propre associé à 1.
$v(\vec{j}+\vec{k}) = \vec{j} + 2(\vec{j}+\vec{k})$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. On pose $\vec{\alpha} = \vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{\beta} = \vec{j}+\vec{k}$. On se place dans la base $\{\vec{\alpha};\vec{j};\vec{\beta}\}$. D'après ce qui précède, on a alors

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\}$ qui est bien triangulaire supérieure

$\boxed{\text{1 point}}$

III. 3 points.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions qui sont combinaison linéaire de sin et cos. Nous noterons $\mathcal{E} = \{u(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x\ ;\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$

1°. Démontrer rapidement qu'il s'agit d'un espace vectoriel.

Cet ensemble est non vide car cos et sin sont dedans. Il est clairement stable par addition et multiplication par une constante, par suite, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions numériques. C'est donc un espace vectoriel. Il est de dimension 2 et une base est donnée, par exemple, par le couple $\{\cos x, \sin x\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. L'image de $u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ est $d(u)(x) = v(x) = -\alpha \sin x + \beta \cos x$. Par ailleurs, la dérivation est une opération linéaire donc d est linéaire. Sa matrice dans la base canonique est $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{1 point}}$

3°. On voit facilement que $D^2 = -I$ donc que $D^3 = -D$ et que $D^4 = I$; Ainsi, $D^{4n} = I$, $D^{4n+1} = D$, $D^{4n+2} = -I$, $D^{4n+3} = -D$ $\boxed{\text{1 point}}$