MATHEMATIQUES DS N°1 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2008/2009 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 15 points.

Soit u l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.

$P(x)=\det(A-xI)=(1-x)^2(2-x)$ $Sp(A)=\{2,1\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Un vecteur $\vec{X}(x,y,z)$ appartien à E_2 ssi $x=y=-z$. De même, un tel vecteur appartient à E_1 ssi $x-y+z=0$. On peut donc écrire :

$E_2=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1.5 points}}$

$E_1=\text{vect}\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$ qui est de dimension 2

$\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. A est-elle diagonalisable ?

$\dim E_2+\dim E_1=\dim\mathbb{R}^3=3$ et la matrice est donc diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

Sa forme diagonale dans la base précédente (les vecteurs propres étant placés dans l'ordre où ils apparaissent dans le corrigé) est donnée par $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On considère maintenant la matrice
$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

$\det P=-1\neq 0$ donc P est diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

Après calculs, on trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-1&1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$

4°. Calculer A^n pour $n\in\mathbb{N}$.

On sait que $A=PDP^{-1}$, donc que $A^n=PD^nP^{-1}$
$\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi, $A^n=\begin{pmatrix}-2^n+2&2^n-1&-2^n+1\\-2^n+1&2^n&-2^n+1\\2^n-1&-2^n+1&2^n\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

5°. Posons $X=(x,y,z)$. Alors le système s'écrit de façon matricielle sous la forme $X'=AX$. Posons $Y=(u,v,w)=P^{-1}X$. En passant dans la base de vecteurs propres, le système devient $Y'=DY$. On intègre alors les équations différentielles obtenues :

$Y=\begin{pmatrix}k_1e^{2t}\\k_2e^t\\k_3e^t\end{pmatrix}$ avec $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Pour obtenir la solution du système, il suffit de revenir à la base canonique en effectuant le produit $X=PY$; on obtient :

$X=\begin{pmatrix}k_1e^{2t}+k_2e^t\\k_1e^2t+2k_2e^t+k_3e^t\\-k_1e^{2t}+k_2e^t+k_3e^t\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Si $x(0)=y(0)=z(0)$ alors le vecteur $k=(k_1,k_2,k_3)$ est solution du système
$k=P\times(1,1,1)\iff k=P^{-1}\times(1,1,1)=(-1,2,-2)$
$\boxed{\text{1 point}}$

II. 5 points.

Soit v l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$B=\begin{pmatrix}0&4&-3\\-1&3&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.

En procédant de la même façon que dans l'exercice précédent, on trouve $P(x)=-(x-3)(x-1)^2$ $\boxed{\text{1 point}}$
Les valeurs propres sont donc 3 et 1.

Un vecteur $\vec{X}(x,y,z)$ appartien à E_1 ssi $x=y=z$. De même, un tel vecteur appartient à E_3 ssi $x=-z$ et $y=0$. On peut donc écrire :

$E_1=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1 point}}$

$E_3=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1 point}}$

2°. B est-elle diagonalisable ?

$\dim E_2+\dim E_1=2$ et la matrice n'est donc pas diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $v(\vec{\alpha})=3\vec{\alpha}$ puisque $\vec{\alpha}$ est vecteur propre associé à 3. De même, $v(\vec{\beta})=\vec{\beta}$ puisque $\vec{\beta}$ est vecteur propre associé à 1.

4°. En déduire une base où la matrice T de v est sous forme triangulaire et préciser T.

On choisit comme deux premiers vecteurs de base $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$. Comme troisième, on peut prendre n'importe quel vecteur, par exemple le vecteur $\vec{j}+\vec{k}$ pour lequel $v(\vec{j}+\vec{k})=\vec{\beta}+\vec{j}+\vec{k}$.

Dans la base $\{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{j}+\vec{k}\}$ la matrice sera
$T=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$