MATHEMATIQUES DS N°1

R&T Saint-Malo - 2nde année - 14/10/09 - 2009/2010 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
On peut admettre une question pour passer à la suivante.

Soient u et v les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont respectivement :

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1°. Rappeler les définitions rigoureuses de valeur propre, vecteur propre et sous-espace propre.
2°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.
3°. Démontrer que A est diagonalisable et préciser la forme diagonale, ainsi que la matrice de passage vers une base de vecteurs propres.
4°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.
5°. Démontrer que B n'est pas diagonalisable.
6°. On considère maintenant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

7°. Déterminer la matrice de v dans la base définie par les colonnes de P.
8°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

9°. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 2y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z'(t) = 2x(t) - 2y(t) - 2z(t) \end{cases}$

où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Parmi les solutions, quelles sont celles qui vérifient $x(0) = y(0) = z(0) = 1$?