**MATHEMATIQUES DS N°2**

*R&T Saint-Malo - 2nde année - 2006/2007 - Durée : 2h*

*Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites.*
*Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.*

**I.** 1 point.

Un code secret contient 8 caractères choisis parmi les 128 du code ascii. Parmi ces caractères se trouvent deux % mais on ne sait pas où. Combien existe-t-il de codes ?

**II.** 5 points.

On considère deux urnes : $U_1$ contient 3 boules blanches et 1 noire et $U_2$ contient 1 boule blanche et 1 noire. On lance un dé à six faces normal. Si l'on fait 1 ou 6, on choisit une boule dans $U_1$. Sinon, on la choisit dans $U_2$. On considère les évènements suivants :

- $N$ On a tiré une boule noire.
- $B$ On a tiré une boule blanche.
- $U_1$ On a choisit une boule dans l'urne $U_1$.
- $U_2$ On a choisit une boule dans l'urne $U_2$.

1°. Expliciter $\mathbb{P}(N/U_1)$, $\mathbb{P}(N/U_2)$, $\mathbb{P}(B/U_1)$ et $\mathbb{P}(B/U_2)$

2°. Calculer $\mathbb{P}(N)$ puis $\mathbb{P}(U_1/N)$

3°. Les évènements $N$ et $U_1$ sont-ils indépendants ? disjoints ?

4°. On effectue plusieurs tirages indépendants suivant la méthode ci-dessus, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. Soit $X$ le nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir une boule noire. Quelle est la loi de $X$ ? Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{P}[X=1]$ et $\mathbb{P}[X=2]$.

**III.** 4 points.

On considère le couple de variables aléatoires $(X,Y)$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

| $X\backslash Y$ | 0 | 1 | TOT |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/3 | 1/3 |
| 1 | 1/3 | 1/3 | 2/3 |
| TOT | 1/3 | 2/3 | 1 |

On pose également $S = XY$ et $T = \min(X,Y)$

1°. Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$, ainsi que leur espérance et leur variance.
2°. Déterminer la covariance $\text{cov}(X,Y)$. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
3°. Déterminer la loi du couple $(S,T)$ sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de $S$ et $T$.
4°. $S$ et $T$ sont-elles indépendantes ?

**IV.** 4 points.

Soit $X$ une variable aléatoire qui peut prendre comme valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$. L'entropie de $X$ est la quantité :

$$H(X) = \mathbb{E}[-\log_2(X)] = -\sum_{k=1}^{n} \log_2(\mathbb{P}[X=x_k]) \times \mathbb{P}[X=x_k]$$

$H(X)$ mesure l'incertitude sur les valeurs que peut prendre $X$.

1°. Démontrer que $H(X) \geq 0$
2°. Calculer $H(X)$ si $X$ suit une loi équiprobable sur $\{1,2,...,n\}$
3°. Calculer $H(X)$ si $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ avec $\mathbb{P}[X=1] = p$ et $\mathbb{P}[X=0] = 1-p$
4°. Calculer $H(X)$ lorsque $p = 1/2$ dans la question précédente et expliquer le résultat obtenu.

**V.** 6 points.

Des données binaires indépendantes sont transmises sur un canal radio. La probabilité d'erreur par bit est $p = 2 \times 10^{-6}$. On transmet une communication composée de $n = 10^7$ bits sur ce canal et l'on note $X$ le nombre d'erreurs durant la transmission.

1°. Quelle est la loi de $X$ ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{var}(X)$.

2°. Par quelle loi peut-on approcher la loi de $X$ ? Calculer $\mathbb{P}[X \geq 15]$, $\mathbb{P}[18 \leq X \leq 22]$.

3°. On améliore la transmission afin d'obtenir $p = 10^{-7}$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de $X$ ? Calculer $\mathbb{P}[X=0]$, $\mathbb{P}[X=1]$ et $\mathbb{P}[X=4]$.

4°. Lorsque de nombreux obstacles dispersent le signal radio, le modèle de canal habituellement utilisé est le canal à évanouissement de Rayleigh (Rayleigh fading channel). Dans ce cas, l'enveloppe du signal est une variable aléatoire $Y$ de densité

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} 1_{[0,+\infty[}(x)$$

Démontrer qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité et calculer $\mathbb{P}[Y \geq 1]$