MATHEMATIQUES DS N°2 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2006/2007 - Durée : 2h

I. 1 point.

Un code secret contient 8 caractères choisis parmi les 128 du code ascii. Parmi ces caractères se trouvent deux % mais on ne sait pas où. Combien existe-t-il de codes ?

Les 6 caractères se choisissent de 127^6 façons. La place des deux % se choisit de C_8^2 façons, soit au total :
$C_8^2 \times 127^6$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 5 points.

1°. D'après l'énoncé, on directement :
$\mathbb{P}(N/U_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(N/U_2) = 1/2$
$\mathbb{P}(B/U_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(B/U_2) = 1/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. D'après la formule des probas totales :
$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N/U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(N/U_2)\mathbb{P}(U_2)$
$= 1/4 \times 1/3 + 1/2 \times 2/3 = 5/12$ $\boxed{\text{1 point}}$

D'après la formule de Bayses,

$$\mathbb{P}(U_1/N) = \frac{\mathbb{P}(N/U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{1/4 \times 1/3}{5/12} = \frac{1}{5}$$

$\boxed{\text{1 point}}$

3°. Les évènements N et U_1 sont-ils indépendants ? disjoints ?

$\mathbb{P}(N/U_1) \neq \mathbb{P}(N)$ ils ne sont donc pas indépendants.
$\mathbb{P}(N \cap U_1) \neq 0$ ils ne sont donc pas disjoints. $\boxed{\text{1 point}}$

4°. Par indépendance des tirages, X suit une loi géométrique de paramètre $p = 5/12$. Ainsi, $\mathbb{E}[X] = 12/5$, $\mathbb{P}[X = 1] = p = \frac{5}{12}$ et $\mathbb{P}[X = 2] = q \times p = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$

$\boxed{\text{1 point}}$

III. 4 points.

1°. Déterminer les lois marginales de X et Y, ainsi que leur espérance et leur variance.

$\mathbb{P}[X = 0] = 1/3$, $\mathbb{P}[X = 1] = 2/3$, $\mathbb{E}[X] = 2/3$,
$\mathbb{E}[X^2] = 2/3$ et $\mathrm{var}(X) = 2/9$
Idem pour Y qui a la même loi $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer la covariance $\mathrm{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

$\mathbb{E}[XY] = 1/3$ donc $\mathrm{cov}(X, Y) = 1/3 - (2/3)^2 = -1/9 \neq 0$ et par suite X et Y ne sont pas indépendantes $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Déterminer la loi du couple (S, T) sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de S et T.

$S \backslash T$	0	1	TOT
0	2/3	0	2/3
1	0	1/3	1/3
TOT	2/3	1/3	1

Pour construire rapidement le tableau, il suffit de constater que $\mathbb{P}[S = 0, T = 0] = \mathbb{P}[X = 1, Y = 1]$. Le reste du tableau s'en déduit facilement $\boxed{\text{1 point}}$

4°. S et T sont-elles indépendantes ?

$\mathbb{P}[S = 0, T = 0] \neq \mathbb{P}[S = 0] \times \mathbb{P}[T = 0]$ et par suite S et T ne sont pas indépendantes. $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 4 points.

1°. Démontrer que $H(X) \geq 0$

$0 < \mathbb{P}[X = x_k] \leq 1 \Rightarrow -\log \mathbb{P}[X = x_k] > 0$ donc
$H(X) \geq 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Calculer $H(X)$ si X suit une loi équiprobable sur $\{1, 2, ..., n\}$

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \frac{1}{n} n \log n = \log_2 n \quad \boxed{\text{1 point}}$$

3°. $H(X) = -q \log q - p \log p$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $H(X) = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

V. 6 points.

1°. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$.

X suit une loi binomiale de paramètres n et p : nombre de succès au cours de n expériences de Bernoulli indépendantes, la proba de chaque succès étant égale à p. On a alors, d'après le cours, $\mathbb{E}[X] = np = 20$ et $\mathrm{var}(X) = npq \simeq 20$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Calculer $\mathbb{P}[X \geq 15]$, $\mathbb{P}[18 \leq X \leq 22]$.

On ne peut pas faire le calcul directement, mais en appliquant le théorème de la limite centrale ($npq \geq 18$) on peut approcher la loi de X par une loi normale de paramètre $m = 20$ et $\sigma = \sqrt{20}$. Si Z est une loi normale centrée réduite, on a alors $Z = (X - 20)/(2\sqrt{5})$. Ainsi,
$\mathbb{P}[X \geq 15] = \mathbb{P}[Z \geq (15 - 20)/(2\sqrt{5})] = \mathbb{P}[Z \geq -1.12]$
$= \mathbb{P}[Z \leq 1.12] \simeq 0.87$ d'après la table de la loi normale.
$\boxed{\text{1 point}}$

$\mathbb{P}[18 \leq X \leq 22] = \mathbb{P}[-1/\sqrt{5} \leq Z \leq 1/\sqrt{5}]$
$= \mathbb{P}[-0.45 \leq Z \leq 0.45] = 2\Pi(0.45) - 1 \simeq 0.34$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On améliore la transmission afin d'obtenir $p = 10^{-7}$. Calculer $\mathbb{P}[X = 0]$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[X > 1]$.

Cette fois-ci, on peut appliquer la loi des évènements rares car $n \geq 50$ et $np = 1 < 5$. On pose $\lambda = np = 1$ et on approche la loi de X par une loi de Poisson de paramètre λ.

$\mathbb{P}[X = 0] \simeq e^{-\lambda} = 1/e$
$\mathbb{P}[X = 1] \simeq \lambda e^{-\lambda} = 1/e$
$\mathbb{P}[X = 4] \simeq e^{-\lambda}/4! \simeq 0.015$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $f(x)$ est clairement positive et continue par morceaux. De plus, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$

$$= \left(-\frac{\sigma^2}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \right)_0^{\infty} = 1 \quad \boxed{\text{1 point}}$$

De plus $\mathbb{P}[Y > 1] = \left(-\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2} \exp(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}) \right)_1^{\infty} = \exp(-\dfrac{1}{2\sigma^2})$

$\boxed{\text{1 point}}$