MATHEMATIQUES DS N°2

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2007/2008 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 4 points.

1°. Mon numéro de carte bancaire est 8863, mais les chiffres sont donnés dans le désordre. Combien devrez-vous tester de codes différents ?
2°. Un message de 8 bits contient deux erreurs. Combien existe-t-il de positions possibles pour ces deux erreurs ?
3°. La clef secrète de l'algorithme DES contient 56 bits. Un pirate essaie de trouver le code. Combien devra-t-il effectuer d'essais ?
4°. Les pannes d'un appareil électronique sont visualisées à l'aide d'un tableau de 8 leds numérotées de 1 à 8. En fonction de la nature de la panne, une ou plusieurs leds s'allument. Combien ce tableau peut-il répertorier de pannes ? Combien de pannes existe-t-il avec moins de trois leds allumées ?

II. 3 points.

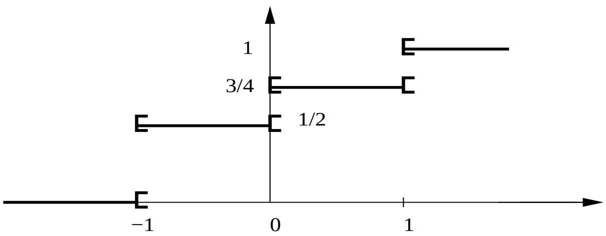
On considère un dé normal et deux urnes A et B. A contient 2 boules noires et 4 vertes et B contient 3 noires et 3 vertes. On lance le dé : Si l'on fait $1, 2, 3$ ou 4, on tire une boule dans A, sinon on la tire dans B. On considère les évènements suivants :

A= "On a tiré une boule dans l'urne A" (idem pour B).
N= "On a tiré une boule noire" (idem pour V).

1°. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(N/A)$.
2°. Déterminer en justifiant $\mathbb{P}(N)$ et $\mathbb{P}(B/N)$
3°. Les évènements N et B sont-ils indépendants ? Pourquoi ? Sont-ils disjoints ? Pourquoi ?

III. 3 points.

On considère la fonction F donnée par la courbe représentative ci-dessous.
Soit X la variable aléatoire de fonction de répartition F.



1°. Déterminer la loi de X, $\mathbb{E}[X]$, $var(X)$ et $\sigma(X)$.
2°. Calculer $\mathbb{P}[X \leq 1/2]$

IV. 4 points.

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	-1	1	TOT
-1	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	$1/4$
TOT	$1/2$	$1/2$	1

On pose également $S = 1/Y$ et $T = X^2$

1°. Déterminer les lois marginales de X et Y, ainsi que leur espérance et leur variance.
2°. Déterminer la covariance $\text{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
3°. Déterminer la loi du couple (S, T) sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de S et T.
4°. S et T sont-elles indépendantes ?

V. 3 points.

On considère un stock de résistances indépendantes dont la valeur nominale, en ohms, suit une loi normale de paramètres $m = 100$ et $\sigma = 5$.

1°. On choisit une résistance au hasard et on note R sa valeur. Calculer $\mathbb{P}[95 \leq R \leq 105]$ et $\mathbb{P}[99,9 \leq R \leq 100,1]$.

2°. On dit qu'une résistance est conforme si sa valeur ne s'écarte pas de plus de $0,1\%$ de la moyenne. On considère un lot de 100 résistances et l'on note X le nombre de résistances **non conformes** dans ce lot. Quelle est la loi de X ? Quel est le nombre moyen de résistances non conformes dans ce lot ?

3°. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? En ce cas, calculer $\mathbb{P}[X \leq 2]$

VI. 5 points.

La loi de Pareto est une loi continue qui a été introduite par un économiste italien en 1875. Initialement, elle mesurait la répartion des revenus dans un pays et a permis de constater que 80% des richesses étaient détenues pas 20% de la population. De nos jours, cette loi est utilisée dans beaucoup de domaines : elle modélise le pouvoir d'achat des ménages (c'est à la mode), elle permet le calcul de l'indice de visibilité d'un site sur le web (20% des sites concentrent 80% des pages explorées) ou modélise également le trafic de données sur internet : 20% des fichiers consomment 80% de la bande passante, elle permet également d'évaluer les performances des routeurs, etc.

La densité d'une loi de Pareto d'indice 2 est donnée par

$$f(x) = \frac{2\theta^2}{x^3}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty[}(x)$$

Où θ représente le revenu minimum de la population.

1°. Démontrer qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.
2°. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètre θ. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{var}(X)$
3°. Calculer $\mathbb{P}[X \geq 2\theta]$
4°. Démontrer que la fonction de répartition de X est donnée par la fonction

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < \theta \\ 1 - (\theta/s)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire que la variable aléatoire $Y = \ln(X/\theta)$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.