MATHEMATIQUES DS N°2 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2007/2008 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 4 points.

1°. Mon numéro de carte bancaire est 8863, mais les chiffres sont donnés dans le désordre. Combien devrez-vous tester de codes différents ?

$4!/2 = 12$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Un message de 8 bits contient deux erreurs. Combien existe-t-il de positions possibles pour ces deux erreurs ?

$C_8^2 = 28$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. La clef secrète de l'algorithme DES contient 56 bits. Un pirate essaie de trouver le code. Combien devra-t-il effectuer d'essais ?

2^{56} $\boxed{\text{0.5 point}}$

4°. Les pannes d'un appareil électronique sont visualisées à l'aide d'un tableau de 8 leds numérotées de 1 à 8. En fonction de la nature de la panne, une ou plusieurs leds s'allument. Combien ce tableau peut-il répertorier de pannes ? Combien de pannes existe-t-il avec moins de trois leds allumées ?

Un groupe de leds allumées correspond à un sous ensemble. Au total, on a donc $2^8 - 1 = 255$ pannes que l'on peut répertorier, car le cas où aucune led n'est allumée correspond à une absence de panne. Autre façon de répondre : chaque led a deux états possibles (allumée ou éteinte). Il y a $\underbrace{2 \times 2 \times 2 ... \times 2}_{8\times}$ états. $\boxed{\text{0.5 point}}$

Il y a $\sum_{k=1}^{2} C_8^k = 8 + 28 = 36$ façons d'en avoir moins de 3. Il faut utiliser des combinaisons car on s'intéresse uniquement à la place des leds allumées parmi les 8 leds. $\boxed{\text{0.5 point}}$

II. 3 points.

On considère un dé normal et deux urnes A et B. A contient 2 boules noires et 4 vertes et B contient 3 noires et 3 vertes. On lance le dé : Si l'on fait $1, 2, 3$ ou 4, on tire une boule dans A, sinon on la tire dans B. On considère les évènements suivants :

A= "On a tiré une boule dans l'urne A" (idem pour B).
N= "On a tiré une boule noire" (idem pour V).

1°. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(N/A)$.
Par lecture directe de l'énoncé, $\mathbb{P}(A) = 4/6 = 2/3$ et $\mathbb{P}(N/A) = 2/6 = 1/3$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. Déterminer en justifiant $\mathbb{P}(N)$ et $\mathbb{P}(B/N)$
La formule des probas totales donne

$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(N/B)\mathbb{P}(B) = (1/3)(2/3) + (1/3)(1/2) = 7/18$ $\boxed{\text{1 point}}$

Enfin, la formule de Bayes donne

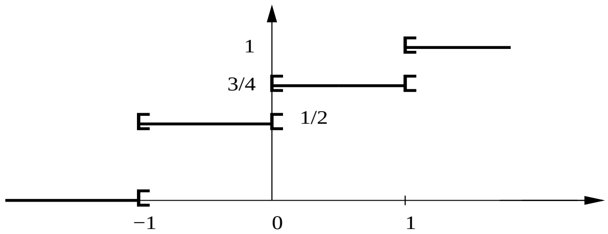
$$\mathbb{P}(N/A) = \frac{\mathbb{P}(A/N)\mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(A/N)\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(A/V)\mathbb{P}(V)}$$
$$= \frac{1/6}{7/18} = \frac{3}{7} \ \boxed{\text{1 point}}$$

3°. Les évènements N et B sont-ils indépendants ? Pourquoi ? Sont-ils disjoints ? Pourquoi ?

Non car $\mathbb{P}(B) = 1/3 \neq \mathbb{P}(B/N)$.
Non car
$\mathbb{P}(B \cap N) = \mathbb{P}(N/B)\mathbb{P}(B) = (1/2) \times (1/3) = 1/6 \neq 0$.
$\boxed{\text{0.5 point}}$

III. 3 points.

On considère la fonction F donnée par la courbe représentative ci-dessous.
Soit X la variable aléatoire de fonction de répartition F.



1°. Déterminer la loi de X, $\mathbb{E}[X]$, $var(X)$ et $\sigma(X)$.

k	-1	0	1
$\mathbb{P}[X = k]$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

$\boxed{\text{0.5 point}}$

$\mathbb{E}[X] = -1/2 + 1/4 = -1/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$\mathbb{E}[X^2] = 1/2 + 1/4 = 3/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$var(X) = 3/4 - 1/16 = 11/16$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$\sigma(X) = \sqrt{11}/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. Calculer $\mathbb{P}[X \leq 1/2] = 3/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

IV. 4 points.

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	-1	1	TOT
-1	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	$1/4$
TOT	$1/2$	$1/2$	1

On pose également $S = 1/Y$ et $T = X^2$

1°. Déterminer les lois marginales de X et Y, ainsi que leur espérance et leur variance.

k	-1	0	1
$\mathbb{P}[X = k]$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

k	-1	1
$\mathbb{P}[Y = k]$	$1/2$	$1/2$

$\boxed{\text{0.5 point}}$

$\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[X^2] = 1/2$, $var(X) = 1/2$, $\sigma(X) = \sqrt{2}/2$
$\mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathbb{E}[Y^2] = 1$, $var(Y) = 1$, $\sigma(Y) = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer la covariance $\text{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

$\mathbb{E}[XY] = 1/4 + 1/4 = 1/2$ et donc
$\text{cov}(X, Y) = 1/2 - 0 = 1/2$ et l'on en déduit que ces variables ne sont donc pas indépendantes. $\boxed{\text{1 point}}$

3°.4°. Déterminer la loi du couple (S, T) sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de S et T.

X	Y	$1S$	T	$\mathbb{P}$
-1	-1	-1	1	1/4
0	-1	-1	0	1/4
1	-1	-1	1	0
-1	1	1	1	0
0	1	1	0	1/4
1	1	1	1	1/4

Au vu des deux 0 qui apparaissent dans le tableau, on s'aperçoit que le couple (S,T) ne prend que 4 couples de valeurs distinctes. Ainsi, sa loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

$S\backslash T$	0	1	TOT
-1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
TOT	1/2	1/2	1

$\boxed{\text{1 point}}$

On constate alors que ces deux lois sont de Bernoulli de paramètre 1/2 et sont clairement indépendantes $\boxed{\text{0.5 point}}$

V. 3 points.

On considère un stock de résistances indépendantes dont la valeur nominale, en ohms, suit une loi normale de paramètres $m = 100$ et $\sigma = 5$.

1°. Posons $Z = (R - 100)/5$, la variable centrée réduite associée à R.
$\mathbb{P}[95 \leq R \leq 105] = \mathbb{P}[-1 \leq R \leq 1] = 2\pi(1) - 1 \simeq 0,68$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$\mathbb{P}[99,9 \leq R \leq 100,1] = \mathbb{P}[-0,02 \leq R \leq 0,02]$
$= 2\pi(0,02) - 1 \simeq 0,016$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. On dit qu'une résistance est conforme si sa valeur ne s'écarte pas de plus de $0,1\%$ de la moyenne. On considère un lot de 100 résistances et l'on note X le nombre de résistances non conformes dans ce lot. Quelle est la loi de X ? Quel est le nombre moyen de résistances non conformes dans ce lot ?

X suit une loi binomiale comme nombre de succès dans une succession de n expériences de Bernoulli indépendantes. Les paramètres de la loi sont $n = 100$ et $p = 0,016$ $\boxed{\text{1 point}}$

Par ailleurs, $\mathbb{E}[X] = np = 1,6$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? En ce cas, calculer $\mathbb{P}[X \leq 2]$
D'après la loi des évènements rares, que l'on peut appliquer car $np = 1,6 \leq 5$, on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,6$
On a alors $\mathbb{P}[X \leq 2] = e^{-\lambda}(1 + \lambda + \lambda^2/2) \simeq 0,78$ $\boxed{\text{1 point}}$

VI. 5 points.

La loi de Pareto est une loi continue qui a été introduite par un économiste italien en 1875. Initialement, elle mesurait la répartion des revenus dans un pays et a permis de constater que 80% des richesses étaient détenues pas 20% de la population. de nos jours, cette loi est utilisée dans beaucoup de domaines : elle modélise le pouvoir d'achat des ménages (c'est à la mode), elle permet le calcul de l'indice de visibilité d'un site sur le web (20% des sites concentrent 80% des pages explorées) ou modélise également le trafic de données sur internet : 20% des fichiers consomment 80% de la bande passante, elle permet également d'évaluer les performances des routeurs, etc.

La densité d'une loi de Pareto d'indice 2 est donnée par

$$f(x) = \frac{2\theta^2}{x^3}\mathbb{1}_{[\theta,+\infty[}(x)$$

Où θ représente le revenu minimum de la population.

1°. Démontrer qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.

La fonction $f(x)$ est positive, continue par morceaux et $\displaystyle\int_\theta^{+\infty} \frac{2\theta^2}{x^3}dx = 2\theta^2\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)_\theta^{+\infty} = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètre θ. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$

$\mathbb{E}[X] = 2\theta^2 \displaystyle\int_\theta^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 2\theta$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$\mathbb{E}[X^2] = 2\theta^2 \displaystyle\int_\theta^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ et l'intégrale diverge. Par suite, X n'admet pas de variance $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. $\mathbb{P}[X \geq 2\theta] = \displaystyle\int_{2\theta}^{+\infty} f(x)dx = 1/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

4°. Démontrer que la fonction de répartition de X est donnée par la fonction

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < \theta \\ 1 - (\theta/s)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire que la variable aléatoire $Y = \ln(X/\theta)$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

En dérivant la fonction $F(s)$, on trouve facilement l'expression de $f(s)$ $\boxed{\text{0.5 point}}$.

La dernière question est un peu plus difficile :

Soit G la fonction de répartition de Y.

On a $G(s) = \mathbb{P}[Y \leq s] = \mathbb{P}[\ln(X/\theta) \leq s]$

cette fonction est nulle si $s \leq 0$ car $X \geq \theta \Rightarrow Y \geq 0$ et si $s > 0$,

$G(s) = \mathbb{P}[X \leq \theta e^s] = 1 - e^{-2s}$

En dérivant, on retrouve bien $2e^{-2s}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(s)$ $\boxed{\text{1 point}}$

qui est une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.