MATHEMATIQUES DS N°3 - Module MC4 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2008/2009 - Durée : 1h

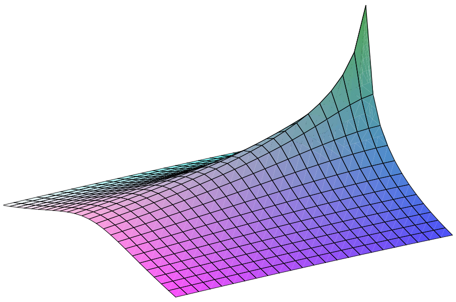
Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 2 points.

Soit $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

1°. Déterminer le domaine de définition de $f(x,y)$.

$f(x,y)$ existe ssi $x^2+y^2>0$ de sorte que seul $O(0,0)$ est exclu du domaine de définition $\boxed{\text{0.5 point}}$



2°. Calculer le gradient le laplacien de f par rapport à x et y.

La fonction étant symétrique en x et y, on a facilement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

On en déduit que $\mathrm{grad} f=\dfrac{2}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

et $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 4 points.

Déterminer les extrema des fonctions ci-dessous :

1°. $f(x,y)=2x^2+y^2-2xy+4x$

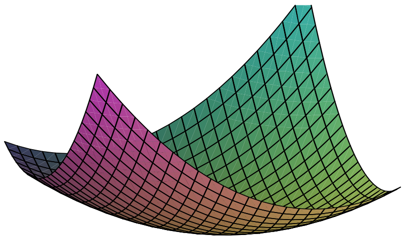
$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-2y+4 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}=2y-2x$$

La seconde équation s'annule ssi $x=y$ et la première devient alors $2x+4$ qui s'annule en -2. Le seul point critique est donc $(-2,-2)$ $\boxed{\text{1 point}}$

En ce point, la matrice hessienne est :

$H=\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 2\end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont, après calcul du polynôme caractéristique, $3\pm\sqrt{5}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Comme elles sont >0, le point $(-2,-2)$ est un minimum strict $\boxed{\text{1 point}}$



III. 3 points.

1°. On a clairement $V(x,y,z)=xyz$ et $S(x,y,z)=xy+2yz+2xz$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $V(x,y,z)=xyz=32\Rightarrow z=\dfrac{32}{xy}$ et donc

$S(x,y)=xy+\dfrac{64}{x}+\dfrac{64}{y}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y-\dfrac{64}{x^2}=0 \iff x^2y=64$ et

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x-\dfrac{64}{y^2}=0 \iff y^2x=64$

De ces deux équations on tire $x=y=4$ qui est le seul point critique. En ce point, la matrice hessienne est $H=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 1 et 3.

Comme elles sont >0, il s'agit bien d'un minimum et les dimensions de la boite sont donc $x=y=4$ et $z=2$ $\boxed{\text{2 points}}$.

IV. 5 points.

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=2f\ (\star)$

pour une fonction $f(x,y)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On pose également $\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}$ et $g(u,v)=f(x,y)$

1°. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}-\dfrac{\partial g}{\partial v}$

Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=2\dfrac{\partial g}{\partial u}$

$\boxed{\text{2 points}}$

2°. En déduire que $f(x,y)$ est solution de $(\star)$ si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial u}=g$

D'après ce qui précède, $\dfrac{\partial g}{\partial u}=g(u,v)$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. En intégrant cette équation, en déduire les solutions de $(\star)$

On obtient $g'(u)/g(u)=1 \iff \ln g(u)=u+cte(v) \iff g(u)=K(v)e^u \iff f(x,y)=K(x-y)e^{x+y}$

où K est une fonction quelconque de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{2 points}}$

V. 6 points.

Calculer les intégrales ci-dessous :

1°. $I = \int\int_D \sin x \; dxdy$ avec
$D = \{(x,y)/ \; x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \; ; \; x+y \leq \pi\}$

Le domaine d'intégration est le triangle de sommet $(0,0),(\pi,0),(0,\pi)$

$I = \int_0^{\pi} \sin x \int_0^{\pi - x} dydx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin x dx$ Par intégration par parties, il vient :
$I = [-(\pi - x)\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$
avec $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2+y^2 \leq 1; \; x \geq 0; \; y \geq 0\}$

On effectue un changement de variables en coordonnées polaires :
$I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \ln 2}{4}$
$\boxed{\text{2 points}}$

3°. Calculer de même $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$
avec $\mathcal{D}_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; x^2+y^2 \leq n^2\}$
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

$I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-r^2} edrd\theta = -\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^n \times 2\pi$
$= \pi(1-e^{-n^2})$ $\boxed{\text{2 points}}$

Par ailleurs,
$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \lim_{n \to +\infty} I_n = \pi$
Comme $I = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2$, on en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\boxed{\text{1 point}}$