MATHEMATIQUES DS N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 28/11/08 -

année scolaire 2008/2009 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 6 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations ci-dessous :

1°. $iz^2 + (1-4i)z + (3i-1) = 0$

$\Delta = (1-4i)^2 + 4(1-3i)i = -3-4i$ $\boxed{\text{1 point}}$

On cherche l'une des racines carrées de Δ. Posons $\delta = \alpha + i\beta$. De $\delta^2 = \Delta$ on a :
$\alpha^2 - \beta^2 = -3$, $\alpha\beta = -2$ et $\alpha^2 + \beta^2 = 5$
Ainsi, $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm 2$. Par ailleurs, α et β sont de signes contraires, donc : $\delta = 1-2i$ et $\delta' = -1+2i$ sont les deux racines carrées recherchées $\boxed{\text{1 point}}$

On en déduit les racines $(-b \pm \delta)/2a$: $\mathcal{S} = \{3+i; 1\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $z^2 - 4(1+i)z + 6i = 0$

$\Delta = 16(1+i)^2 - 4 \times 6i = 8i$ $\boxed{\text{1 point}}$

On voit facilement que $\Delta = (2\sqrt{2}e^{i\pi/4})^2$ et l'on a donc $\delta = 2\sqrt{2}(1+i)$ $\boxed{\text{1 point}}$
Ainsi, les solutions sont $\mathcal{S} = \{1+i; 3+3i\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 4 points.

Soit $z = 1+i$ et $u = a+ib$.

1°. Déterminer les racines carrées de z sous forme exponentielle.

On a $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et l'on en déduit immédiatement que les deux racines carrées de z sont $u_1 = 2^{1/4}e^{i\pi/8}$ et $u_2 = -2^{1/4}e^{i\pi/8} = 2^{1/4}e^{-7i\pi/8}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. En résolvant l'équation $u^2 = z$, déterminer les racines carrées de z sous forme algébrique.

On cherche l'une des racines carrées de z. Posons $u = \alpha + i\beta$. De $u^2 = z$ on a :
$\alpha^2 - \beta^2 = 1$, $2\alpha\beta = 1$ et $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{2}$
Ainsi, $\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ et $\beta = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Par ailleurs, α et β sont de même signe, donc :
$u = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou son opposé. $\boxed{\text{1 point}}$

3°. En déduire la valeur exacte de $\cos(\pi/8)$ et de $\sin(\pi/8)$.

D'après la question précédente,
$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = 2^{1/4}\cos(\pi/8) + 2^{1/4}\sin(\pi/8)$$
En identifiant les parties réelles et imaginaires, on a :

$\cos(\pi/8) = \dfrac{1}{2^{1/4}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ et de même

$\sin(\pi/8) = \dfrac{1}{2^{1/4}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

III. 6 points.

Calculer, en justifiant, les limites ci-dessous :

1°. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3-2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3-2x+3} = 0$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$

$\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2})}{2x+1-(x+2)}$
$\displaystyle= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}) = +\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Pour la correction, voir le cours ou les TD. $\boxed{\text{1 point}}$

5°. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On utilise le théorème des gendarmes en remarquant que $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ si $x \neq 0$. Alors la fonction $f(x)$ dont on cherche la limite vérifie $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. Lorsque x tend vers 0, ces deux fonctions tendent vers 0 donc $f(x)$ aussi. $\boxed{\text{1 point}}$

6°. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

On applique la règle de l'Hospital (deux fois de suite) :

$\displaystyle= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{6x}$
$\displaystyle= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{6} = \frac{1}{3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

7°. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

On applique la règle de l'Hospital :

$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(1/4)x^{-3/4}}{(1/2)x^{-1/2}} = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 4 points.

Déterminer le domaine de définition et les branches infinies des fonctions ci-dessous :

1°. $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$

La fonction existe ssi $x^2+x-2 = (x+2)(x-1) \geq 0$.
Ainsi, le domaine de définition est $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$ $\boxed{\text{1 point}}$

On en déduit qu'il n'y aura pas d'asymptote verticale.
En $+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = 1/2$ Ainsi $\Delta : y = x+1/2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ et on peut facilement

montrer que $\Delta' : y = -x - 1/2$ est asymptote en $-\infty$
$\boxed{\text{2 points}}$

2°. $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Il est facile de voir que $g(x)$ existe ssi $x \neq -1$. En ce point, la fonction tend vers l'infini et la droite d'équation $x = 1$ est donc asymptote verticale à la courbe. En $+\infty$ et en $-\infty$, la fonction tend vers $\pm\infty$. $f(x)/x$ tend vers 1 et $f(x) - x$ tend vers -1. Ainsi, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$