MATHEMATIQUES DS N°2 - CORRIGE -
Formation par apprentissage
R&T Saint-Malo - 2nde année - 2007/2008 - Durée : 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 3 points.

1°. Mon numéro de carte bancaire est 6641, mais les chiffres sont donnés dans le désordre. Combien devrez-vous tester de codes différents ?

$4!/2 = 12$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Un message de 8 bits contient deux erreurs. Combien existe-t-il de positions possibles pour ces deux erreurs ?

$C_8^2 = 28$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. La clef secrète de l'algorithme DES contient 56 bits. Un pirate essaie de trouver le code. Combien devra-t-il effectuer d'essais ?

2^{56} $\boxed{\text{0.5 point}}$

4°. Une urne contient 5 boules rouges et 3 vertes. On en tire 4 simultanément. Combien de tirages contiendront exactement 2 rouges et 2 vertes ?

$C_5^2 \times C_3^2 = 10 \times 3 = 20$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 3 points.

On considère trois urnes U, V, W. L'urne U contient 4 boules : 3 sont notées W et 1 est notée V. L'urne V contient 2 boules noires et 4 blanches et l'urne W contient 2 boules blanches et 4 noires. On tire une boule dans U ; si elle est notée V on en tire une seconde dans V, si elle est notée W, on tire la seconde dans W. On considère les évènements suivants :

N	On a tiré une boule noire.
B	On a tiré une boule blanche.
V	On a choisi une boule dans l'urne V.
W	On a choisi une boule dans l'urne W.

1°. Par lecture directe de l'énoncé, on a $\mathbb{P}(V) = 1/4$, $\mathbb{P}(W) = 3/4$, $\mathbb{P}(N/W) = 2/3$ et $\mathbb{P}(B/W) = 1/3$
$\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. Calculer $\mathbb{P}(N)$ puis $\mathbb{P}(V/N)$

D'après la formule des probas totales,
$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N/V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(N/W)\mathbb{P}(W)$
$= (1/3) \times (1/4) + (2/3) \times (3/4) = 7/12$ $\boxed{\text{1 point}}$

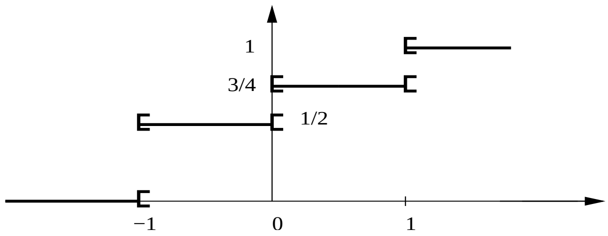
D'après la formule de Bayes,
$\mathbb{P}(V/N) = \dfrac{\mathbb{P}(N/V)\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(N)} = 1/7$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Les évènements N et B sont-ils indépendants ? disjoints ?

$\mathbb{P}(N \cap B) = 0$ ils ne sont donc pas indépendants. Ils sont par contre clairement disjoints $\boxed{\text{0.5 point}}$

III. 3 points.

On considère la fonction F donnée par la courbe représentative ci-dessous.
Soit X la variable aléatoire de fonction de répartition F.



1°. Déterminer la loi de X, $\mathbb{E}[X]$, $var(X)$ et $\sigma(X)$.

k	-1	0	1
$\mathbb{P}[X = k]$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

$\boxed{\text{0.5 point}}$

$\mathbb{E}[X] = -1/2 + 1/4 = -1/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$
$\mathbb{E}[X^2] = 1/2 + 1/4 = 3/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$
$var(X) = 3/4 - 1/16 = 11/16$ $\boxed{\text{0.5 point}}$
$\sigma(X) = \sqrt{11}/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. Calculer $\mathbb{P}[X \leq 1/2] = 3/4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

IV. 4 points.

On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	-1	1	TOT
-1	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	$1/4$
TOT	$1/2$	$1/2$	1

On pose également $S = 1/Y$ et $T = X^2$

1°. Déterminer les lois marginales de X et Y, ainsi que leur espérance et leur variance.

k	-1	0	1
$\mathbb{P}[X = k]$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

k	-1	1
$\mathbb{P}[Y = k]$	$1/2$	$1/2$

$\boxed{\text{0.5 point}}$

$\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[X^2] = 1/2$, $var(X) = 1/2$, $\sigma(X) = \sqrt{2}/2$
$\mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathbb{E}[Y^2] = 1$, $var(Y) = 1$, $\sigma(Y) = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer la covariance $\text{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

$\mathbb{E}[XY] = 1/4 + 1/4 = 1/2$ et donc
$\text{cov}(X, Y) = 1/2 - 0 = 1/2$ et l'on en déduit que ces variables ne sont donc pas indépendantes. $\boxed{\text{1 point}}$

3°.4°. Déterminer la loi du couple (S, T) sous la forme d'un tableau, puis celle des lois marginales de S et T.

X	Y	$1S$	T	$\mathbb{P}$
-1	-1	-1	1	$1/4$
0	-1	-1	0	$1/4$
1	-1	-1	1	0
-1	1	1	1	0
0	1	1	0	$1/4$
1	1	1	1	$1/4$

Au vu des deux 0 qui apparaissent dans le tableau, on s'aperçoit que le couple (S, T) ne prend que 4 couples de valeurs distinctes. Ainsi, sa loi conjointe est donnée par le tableau ci-dessous :

$S\backslash T$	0	1	TOT
-1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
TOT	1/2	1/2	1

1 point

On constate alors que ces deux lois sont de Bernoulli de paramètre 1/2 et sont clairement indépendantes 0.5 point

V. 7 points.

Des ordinateurs émettent des trames de façon aléatoire et indépendante, sur un même canal de communication. En cas de collision - si deux trames ou plus sont émises simultanément - celles-ci sont détruites et l'ordinateur tentera de les re-émettre plus tard. On note α la probabilité qu'un ordinateur émette une trame à un instant t et n le nombre d'ordinateurs reliés au canal.

On note X_t le nombre de trames qui apparaissent à un instant t sur le canal.

1°. Quel est la loi de X_t ? Justifier. Quel est le nombre moyen de trames qui apparaissent à t sur le canal ?

C'est bien sûr une loi binomiale comme somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes : le fait qu'un ordinateur émette ou non est une variable de Bernoulli de paramètre α et le nombre de trames représente donc une somme de variables de Bernoulli. Les paramètres sont n et α. 0.5 point
Le nombre moyen de trames est l'espérance de la loi : $\mathbb{E}[X_t] = n\alpha$ 0.5 point

2°. Dans cette **seule** question, on pose $n = 100$ et $\alpha = 10^{-2}$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X_t ? Calculer alors $\mathbb{P}[X_t = 0]$.

$n\alpha = 1 \leq 5$ et $n \geq 50$. On est donc dans le cadre de la loi des évènements rares 0.5 point et l'on peut approcher la loi Binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}[X_t = 0] = 1/e$ 0.5 point

Si C est l'évènement "il y a collision à t", calculer $\mathbb{P}(C)$.

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}[X_t \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[X_t = 0] - \mathbb{P}[X_t = 1] = 1 - 2/e$ 1 point

3°. Lorsqu'une station a déjà essayé d'émettre un message sans succès, elle tire à pile ou face à chaque instant suivant, selon une loi de Bernoulli de paramètre p fixé (protocole ALOHA). Si elle fait pile, alors elle tente une nouvelle émission. Notons N le nombre de tentatives nécessaires pour que la station tente une nouvelle émission.

Donner l'expression de $\mathbb{P}[N = k]$. Quelle est la loi de N ? Justifier. Quel est le nombre moyen de tentatives avant que la station ne tente une nouvelle émission ?

C'est du cours ! N suit une loi géométrique de paramètre p. En effet, N représente l'instant du premier succès dans une suite de piles ou faces indépendants 0.5 point

$\mathbb{P}[N = k] = (1-p)^{k-1}p$ et le nombre moyen d'essais est $\mathbb{E}[N] = 1/p$ 1 point

4°. A un instant donné, on dispose donc de deux groupes de stations : celles qui ont déjà une trame en attente et qui vont essayer ou pas de l'émettre à nouveau, et celles qui n'ont pas de trames en attente. Dans ce second groupe, on suppose maintenant que le nombre de messages apparaissant à un instant t sur le canal suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exprimer par une phrase les évènement suivants et calculer leur probabilité en fonction de λ et de p :

$[X_{t+1} = k - 1/X_t = k]$
$[X_{t+1} = k/X_t = k]$
$[X_{t+1} = k + 1/X_t = k]$
$[X_{t+1} = k + i/X_t = k]$ avec $i \geq 2$.

$[A/B]$ signifie A sachant B.

$[X_{t+1} = k - 1/X_t = k]$ ="Il y avait k messages en attente à t et il y en a $k-1$ à $t+1$". Autrement dit, à l'instant $t+1$ aucun nouveau message n'est apparu et parmi les messages en attente, seul un a tenté (et donc réussi) une nouvelle émission. D'après l'énoncé, on a donc :

$\mathbb{P}[X_{t+1} = k - 1/X_t = k] = kp(1-p)^{k-1}e^{-\lambda}$ 1 point

De la même façon, $[X_{t+1} = k/X_t = k]$ est l'évènement "il y avait k messages à tenter une émission à t et il en reste k à $t+1$". Autrement dit, ou bien aucun nouveau message n'est apparu et au moins deux messages ont tenté une nouvelle émission, ou bien un nouveau message est apparu et l'un des messages en attente a tenté une émission. Ainsi,

$\mathbb{P}[X_{t+1} = k/X_t = k] = e^{-\lambda}\left(1 - kp(1-p)^{k-1}\right) + \lambda e^{-\lambda}(1-p)^k$
1 point

De la même façon,
$\mathbb{P}[X_{t+1} = k + 1/X_t = k] = \lambda e^{-\lambda}(1 - q^k)$ et
$\mathbb{P}[X_{t+1} = k + i/X_t = k] = \lambda^i e^{-\lambda}/i!$ 1 point