1 Arithmétique des matrices.

I.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1°. Calculer $3C - D$, $A + B$, AB, BA, AC, CD, DC, D^2, D^3, YX, XY.
2°. Calculer $(C + D)^2$ puis $C^2 + 2CD + D^2$. Conclusion ?

II.

Une matrice M est nilpotente si l'une de ses puissances est nulle (ie $\exists\ k \in \mathbb{N} /\ M^k = 0$).
Toutes les puissances suivantes le sont alors aussi.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. On pose $N = A - I$; montrer que N est nilpotente.
2°. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(I + N)^n$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3°. Calculer $(I + N)(I - N + N^2)$ et en déduire A^{-1}.

III.

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$.

1°. Calculer J^2 en fonction de J et I et en déduire que $J^3 = 3J + 2I$.
2°. Démontrer que J est inversible et calculer J^{-1}. Calculer $(J - I)^2$.

IV.

Soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

1°. Calculer M^2, M^3 et montrer que $M^3 + 2M^2 - M - 2I = 0$
2°. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}

V.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1°. Calculer A^2, A^3 et montrer que $A^3 = A^2 + 2A$
2°. En déduire que A n'est pas inversible.

VI.

$$\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 4 \\ x - 2y + z = -1 \\ -x + 2y + 2z = -5 \end{array} \right. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1°. Calculer AX et montrer que résoudre $\mathcal{S}$ revient à trouver X tel que $AX = B$.
2°. Calculer AA' et en déduire la solution du système.

VII.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = \pi \\ x + 2y + z = e \\ x + y + 2z = 1 \end{array} \right.$

1°. Calculer A^2 et déterminer α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$

2°. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}, puis résoudre le système $\mathcal{S}$.

VIII.

Soient $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & b' \\ 0 & a'+b' & 0 \\ b' & 0 & a' \end{pmatrix}$

1°. Déterminer I et J telles que $M = aI + bJ$. Calculer I^2, J^2, et en déduire MM'
2°. Montrer que M est inversible si $a \neq \pm b$ et donner l'expression de M^{-1}.

IX.

On note $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ ad - bc = 1, \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers dont le déterminant vaut 1.
Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Montrer que I, S et $T \in SL_2(\mathbb{Z})$, calculer ST et TS. Calculer T^n et montrer que $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2°. Soient $M, M' \in SL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $MM' \in SL_2(\mathbb{Z})$ et calculer M^{-1} en fonction de a,b,c,d.

X. Représentation matricielle de $\mathbb{C}$

On pose $\mathcal{E} = \{M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}\}$ et $\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{E} & \to & \mathbb{C} \\ M & \mapsto & z = a + ib \end{array}$

1°. Montrer que $I \in \mathcal{E}$ et donner une condition sur a et b pour que M soit inversible.
2°. Montrer que si $M, M' \in \mathcal{E}$ alors $\Phi(M + M') = \Phi(M) + \Phi(M')$, $\Phi(\lambda M) = \lambda\Phi(M)$ et $\Phi(MM') = \Phi(M)\Phi(M')$
3°. Montrer que $\Phi(M^{-1}) = \dfrac{1}{\Phi(M)}$ et déterminer M^{-1}.
4°. Expliquer en quoi $\mathcal{E}$ est une réprésentation de l'ensemble des complexes.

XI.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

1°. Déterminer deux matrices J et K telles que $M = aJ + bK$, $\forall M \in \mathcal{E}$
2°. Calculer J^2, K^2, KJ et JK et en déduire l'expression de $M + M'$ et MM', $\forall M, M' \in \mathcal{E}$
3°. Démontrer que $I \in \mathcal{E}$. Déterminer à quelle condition une matrice M est inversible et calculer M^{-1}.
4°. Calculer M^n, $\forall n \in \mathbb{N}$

XII.

On considère l'ensemble $\mathfrak{E}$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

1°. Déterminer deux matrices I et J de $\mathfrak{E}$ telles que $M(a, b) = aI + bJ$, $\forall M \in \mathfrak{E}$
2°. Calculer I^2, J^2 et en déduire l'expression de $M(a, b) + M(a', b')$ et $M(a, b) \times M(a', b')$, $\forall M, M' \in \mathfrak{E}$
3°. Déterminer à quelle condition sur a, b une matrice $M(a, b)$ est inversible et calculer $M(a, b)^{-1}$
4°. Résoudre $M^2 = I$ dans $\mathfrak{E}$

XIII.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
On note également $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1°. A-t-on $I \in \mathcal{E}$? $J \in \mathcal{E}$? $K \in \mathcal{E}$?
2°. Calculer $M(a, b) \times M(a', b')$. A quelle condition ce produit appartient-il à $\mathcal{E}$?
3°. Soit $N(a, b) = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Calculer $M(a, b) \times N(a, b)$ et en déduire $M(a, b)^{-1}$
A quelle condition sur a et b cet inverse existe-t-il ?
4°. Calculer la trace de I, J, K et montrer que $\mathcal{E} = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \ M =^t M \text{ et } Tr(M) = 0\}$

XIV.

Soit $M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a+b & c & b & c \\ c & a+b & c & b \\ b & c & a+b & c \\ c & b & c & a+b \end{pmatrix}$ pour $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

On note également $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$

1°. Calculer J^2, K^2, JK et KJ et en déduire $M(a,b,c) \times M(a',b',c',d')$
2°. $M(0,b,c)$ est-elle inversible.
3°. Donner une condition sur b,c pour que $M(0,b,c)$ soit diviseur de 0.

XV.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $N_\theta = \begin{pmatrix} ch\ \theta & sh\ \theta \\ sh\ \theta & ch\ \theta \end{pmatrix}$

1°. Calculer M_θ^2 et généraliser à M_θ^n, $n \in \mathbb{N}$
2°. Calculer le déterminant et la trace de M_θ
3°. Répondre aux mêmes questions pour la matrice N_θ

XVI.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Calculer A^n en fonction de A pour tout entier n
2°. Calculer $(B-I)^3$ et en déduire que B est inversible. Déterminer cet inverse en fonction de B
3°. A est-elle inversible ?

XVII.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer A^2, A^3 et montrer que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & u_n & v_n \\ 0 & 1 & u_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en précisant u_n et v_n en fonction de n.

XVIII.

Soient $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$ $a,b \in \mathbb{R}$

Déterminer a et b de telle sorte que $AB = BA = I$

XIX.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A\,{}^tA$ et ${}^tAA$.

XX.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1°. Calculer P^2, P^3 et montrer que $P^3 + P^2 - 5P = I$.
2°. En déduire l'expression de P^{-1}.
3°. Calculer $D = P^{-1}AP$.
4°. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n.
5°. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire A^n.
6°. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x + z = -11 \\ x + 2y - 2z = 50 \end{cases}$$

XXI. Quaternions

Les quaternions ont été inventés par William Hamilton en 1843 afin d'agrandir l'ensemble des complexes d'une manière analogue à celle dont on construit les complexes à partir des réels (cf. crédits photos à la fin du document).

On définit l'ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions de la façon suivante :

Définition 1
$q \in \mathbb{H} \iff q = a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $i, j, k \in \mathbb{H}$ $\left\{ \begin{array}{l} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \end{array} \right.$
Le conjugué de $q \in \mathbb{H}$ est $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

Le module de q est le réel positif $||q|| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Soit $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ et $\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{H} & \rightarrow & M_4(\mathbb{R}) \\ q & \mapsto & M(q) \end{array}$. Soient :

$$M(q) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \; I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°. Calculer $\phi(1)$, $\phi(i)$, $\phi(j)$, $\phi(k)$ et exprimer $\phi(M(q))$ en fonction de I, J et K.
2°. Calculer IJ, JI, IK, KI, JK, KJ et en déduire les propriétés de ϕ.
3°. Caractériser $\mathcal{H} = \phi(\mathbb{H})$.
4°. Montrer que $\forall\ q \in \mathbb{H},\ q = u + jv$ avec $u = a + ib$ et $v = c - id$

Soient $\mathcal{E} = \{M(u, v) = \begin{pmatrix} u & -v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),\ u = a + ib$ et $v = c - id \in \mathbb{C}\}$ et

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : \mathbb{H} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ q = u + jv & \mapsto & M(u, v) \end{array}$$

5°. Calculer $\Lambda(1, 0)$, $\Lambda(i, 0)$, $\Lambda(0, 1)$, $\Lambda(0, i)$ et en déduire les propriétés de Λ
6°. Montrer que $\det M(u, v) = ||q||$
7°. Calculer $M(u, v) \times M(u', v')$ et en déduire l'expression de qq'
8°. Calculer $M(\bar{q})$ et en déduire que $\overline{qq'} = \bar{q}' \times \bar{q}$
9°. Démontrer que $q \in \mathbb{R} \iff trM(u, v) = 0$
10°. Expliciter une bijection entre les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$

11°. Les octaves de Cayley sont des extensions des Quaternions :
Un octave $\omega \in \mathbb{O}$ est un couple (q_1, q_2) de quaternions muni de la multiplication suivante :
Si $\omega = (q_1, q_2)$ et $\omega' = (q_1', q_2')$, alors $\omega \times \omega' = (q_1 q_1' - \bar{q}_2' q_2\ ,\ q_2 \bar{q}_1' + q_2' q_1)$
Déterminer les propriétés de $\mathbb{O}$...

2 Applications.

XXII. Matrices stochastiques

Une puce se déplace de façon aléatoire sur une ligne graduée de 1 à 4. A chaque instant, elle fait un bond d'une unité. La probabilité qu'elle saute à droite est $p \in [0, 1]$, celle de sauter à gauche est $q = 1 - p$. Lorsqu'elle atteint une extémité (1 ou 4), elle s'arrête.

On note $P = (p_{i,j})$ la matrice dont les éléments $p_{i,j}$ représentent la probabilité que la puce aille de i vers j en un saut.

1°. Une matrice stochastique est une matrice dont les éléments sont positifs et dont la somme des termes d'une ligne vaut 1. Construire P et montrer que P est stochastique.
2°. Calculer P^2, puis P^3 et montrer qu'il s'agit de matrices stochastiques.
3°. On admet que les éléments $p_{i,j}^{(2)}$ de P^2 représentent la probabilité d'aller de i vers j en 2 sauts. Expliquer les résultats de la question précédente. Quels vont être les termes diagonaux de P^{33} ? P^{806} ?
4°. On suppose maintenant que $p = q = 1/2$. Construire la matrice P.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer $D = BPA$, calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis en déduire P^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P^n$ et en déduire les positions probables de la puce après un nombre de déplacements très grand.

5°. On suppose maintenant que la puce n'a que deux positions possibles 1 et 2. On note a et b deux nombres compris entre 0 et 1. On suppose que la puce reste en 1 avec proba $1-a$ et quitte 1 vers 2 avec proba a. De même, elle quitte 2 vers 1 avec proba b et reste en 2 avec proba $1-b$. Construire la matrice stochastique P correspondante.

On pose $Q = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer Q^{-1}, calculer $D = Q^{-1}PQ$, en déduire D^n, puis Q^n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} P^n$. Conclure.

Nous reviendrons sur ces problèmes de matrices stochastiques en seconde année. On les utilise dans les problèmes de files d'attente et d'études des chaines de Markov.

XXIII. Codes correcteurs linéaires.

On rappelle que $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ est l'ensemble des entiers modulo 2 muni de l'addition et de la multiplication modulo 2.
On souhaite envoyer un message de m bits ; un codage consiste à transformer ce message en un **mot codé** de $n = m + k$ bits, les k bits supplémentaires servant à détecter et corriger d'éventuelles erreurs de transmission. Le message initial et son code seront représentés par des vecteurs de $(\mathbb{F}_2)^m$ et $(\mathbb{F}_2)^n$.

Le code est dit linéaire si la fonction d'encodage permettant de transformer un message en mot codé est elle même linéaire. On la représente alors par une matrice $G \in M_{m,n}(\mathbb{F}_2)$ et si M est le message, $U = MG$ sera le mot codé correspondant.

Afin de détecter les erreurs, on utilise une matrice $H \in M_{n,k}(\mathbb{F}_2)$ appelé matrice de contrôle du code, que l'on construit à partir de G de telle sorte qu'une séquence U de n bits appartient au code si et seulement $H \times^t U = 0$.

Le vecteur $s = H \times^t U$ s'appelle le syndrôme d'erreur du mot reçu. Lorsqu'il est nul, il n'y a pas eu d'erreur dans la transmission (ou trop pour pouvoir les détecter). Sinon, s correspond à une des colonnes de la matrice de parité. L'indice de cette colonne indique alors la position de l'erreur.

Soient $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ les matrices d'encodage et de contrôle d'un code (on l'appelle code de Hamming).

1°. Quels sont les mots codés correspondants aux messages de :
$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Déterminer leur syndrôme.

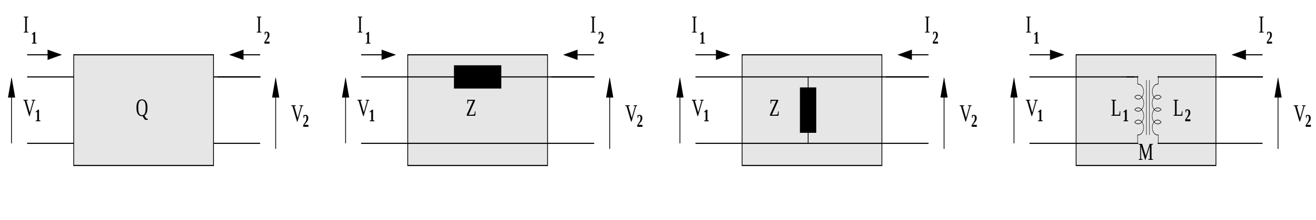
2°. On reçoit $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Y a-t-il eu des erreurs de transmission ? Où ?

XXIV. Matrices de quadripôles.

On peut représenter de nombreux circuits électriques ou électroniques par des boites noires munies de 2 entrées (tension V_1 et intensité I_1 d'entrée) et 2 sorties (tension V_2 et intensité I_2 de sortie) et appelées quadripôles. On décompose alors le circuit électronique en un ensemble de quadripôles associés les uns aux autres par cascade. Chaque quadripôle peut être défini par différentes matrices dont les coefficients représentent des impédances.

Nous noterons $V(V_1, V2)$ le vecteur des tensions, $I(I_1, I_2)$ le vecteur des intensités, $E(V_1, I_1)$ le vecteur d'entrée et $S(V_2, I_2)$ le vecteur de sortie. On notera également $X(V_1, I_2)$ et $X'(V_2, I_1)$. On distingue :

- La matrice de transfert $T \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $S = T \times E$
- La matrice d'admittance $Y \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $I = Y \times V$
- La matrice d'impédance $Z \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $V = Z \times I$ de sorte que $Z = Y^{-1}$
- La matrice hybride $H \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $X = HX'$ utile pour l'étude des transistors.



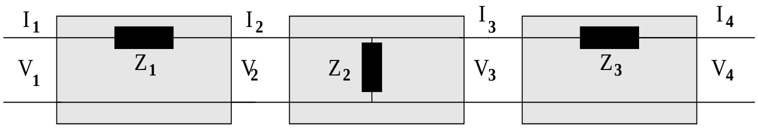
La figure ci-dessus montre le schéma général d'un quadripôle quelconque, d'un quadripôle série, parallèle et d'un transformateur.

1°. Démontrer que la matrice de transfert d'un quadripôle série est $\begin{pmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2°. Démontrer que la matrice de transfert d'un quadripôle parallèle est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/Z & 1 \end{pmatrix}$

3°. Démontrer que la matrice d'impédance du quadripôle transformateur est $\begin{pmatrix} i\omega L_1 & i\omega M \\ i\omega M & i\omega L_2 \end{pmatrix}$

4°. On souhaite déterminer les matrices de transfert et d'admittance du quadripôle Q de la figure ci-dessous. Dans un montage en cascade, la matrice du quadripôle final est égale au produit des matrices de chaque constituant.
Q peut être considéré comme l'association en cascades des trois quadripôles Q_1, Q_2 et Q_3 d'impédance Z_1, Z_2 et Z_3.



Déterminer les matrices de transfert T_1, T_2 et T_3 de Q_1, Q_2 et Q_3 et en déduire la matrice T de Q (il faut faire attention au signe du courant de sortie d'un quadripôle qui devient courant d'entrée dans le suivant).

5°. Déterminer la matrice d'admittance Y de Q, puis sa matrice d'impédance Z.

6°. On peut associer en série deux quadripôles (les tensions s'ajoutent et les courants sont identiques) ou les associer en parallèle (les courant s'ajoutent et les tensions restent identiques). Dessiner le schéma d'un groupement en série de deux quadripôles et faire de même pour un groupement en parallèle.

7°. Démontrer que monter deux quadripôles en série revient à additionner leur matrice d'impédance ; démontrer également que le montage en parallèle revient à additionner leur matrice d'admittance.

Les matrices de quadripôles sont également beaucoup utilisées en hyperfréquences et dans l'études des micro-ondes.

XXV. Graphes.

Définition 2
Un graphe orienté G=(X,U) est déterminé par la donnée :
• *D'un ensemble X dont les éléments 1,2,...,n sont les sommets du graphe.*
• *D'un ensemble U dont les éléments $u_{ij} = (i, j)$ sont des couples orientés de sommets du graphe ($U \subset X \times X$).*
On les représente par un arc orienté joignant le sommet i au sommet j.

Ex : Soit G_1 défini avec X={1,2,3,4} U={(12),(13),(23),(34),(43),(44)}

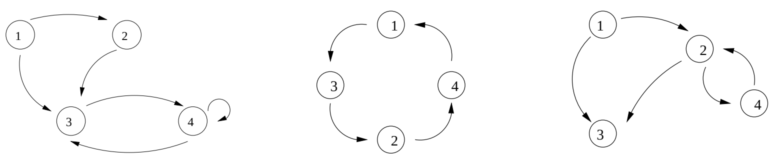


Figure 1 – G_1, G_2 *et* G_3

Deux arcs sont adjacents s'ils ont une extrémité commune (ex dans G_1 : u_{23} et u_{34}).
Deux sommets sont adjacents s'il existe un arc liant le premier au second (ex 2 et 3).
Un chemin est une suite d'arcs telle que l'extrémité terminale de chaque arc corresponde avec l'extrémité initiale du suivant. On note les arcs entre crochets (ex :$\{u_{12}, u_{23}, u_{34}\}$ est un chemin de 1 à 4).
La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs qui le compose (le chemin ci dessus a pour longueur 4).
Un circuit est un chemin fini dont le sommet initial coïncide avec le sommet terminal (ex : $\{u_{34}, u_{43}\}$).
Un chemin est hamiltonien s'il passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe (ex : $\{u_{12}, u_{23}, u_{34}\}$) et il devient un circuit hamiltonien si en outre il se referme sur lui même (l'exemple ci dessus n'en possède pas).
Une boucle est un circuit de longueur 1 (ex $\{u_{44}\}$).

Définition 3
La matrice d'adjacence d'un graphe G à n sommets est la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ formée de 0 et 1 et définie par :
$a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow (i, j)$ est un arc de G.

Attention : Les opérations sur les matrices d'adjacence sont des opérations booléennes (l'addition correspond au "ou" et la multiplication au "et").

Si x est un sommet du graphe, on note $\Gamma(x)$ l'ensemble des successeurs de x dans le graphe.
$\Gamma(x) = \{y \in X / u_{xy} \in U\}$. Ce sont les extrémités des arcs partant de x.
De même, $\Gamma^{-1}(x)$ est l'ensemble des prédécesseurs de x dans G, c'est à dire l'ensemble des extrémités initiales des arcs arrivant à x (ex : $\Gamma(1) = \{2, 3\}$, $\Gamma(2) = \{3\}$, $\Gamma^{-1}(4) = \{4, 3\}$).

On peut définir un certain nombre d'opérations sur les graphes.
Considérons deux graphes $G_1(X, U_1)$ et $G_2(X, U_2)$ ayant même ensemble de sommets.

Définition 4
• *La réunion de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (X, U)$ avec $U = U_1 \cup U_2$.*
• *La composition de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \circ G_2 = (X, U)$ avec $U = \{(x, y) / \exists z \in X / (x, z) \in U_1$ et $(z, y) \in U_2\}$.*
• *La puissance d'un graphe est la composition d'un graphe avec lui même ; on note alors $G^p = (X, U^p)$*
• *La fermeture transitive $\hat{G}$ de G est l'ensemble de tous les chemins du graphe.*

Les éléments de U^p sont les chemins de longueur p du graphe. La matrice d'adjacence est A^p.
Si G possède n sommets, les chemins ont au plus une longueur n. On en déduit que :
$\hat{G} = \bigcup_{i=1}^{n} G^i$ et sa matrice d'adjacence est $\sum_{i=1}^{n} A^i$.
On utilisera également les notions de multigraphe (graphe pour lequel il peut exister plusieurs arcs entre deux sommets) ou de graphe non orienté lorsque l'orientation des arcs ne joue aucun rôle (en ce cas les arcs s'appellent des arêtes, les circuits des cycles et les circuits hamiltoniens des cycles eulériens).
Enfin, un graphe valué est un graphe dans lequel chaque arc a été affecté d'une valeur numérique représentant un flux (débit, capacité de transport, intensité, distance,...) entre deux sommets.

1°. Déterminer la matrice d'adjacence de G_1 et la matrice de sa fermeture transitive $\hat{G}_1$.
2°. Pour chacun des graphes G_2 et G_3, donner un exemple de chemin, de circuit, de circuit hamiltonien et de boucle.
3°. Tracer $G_2 \cup G_3$, $G_2 \circ G_3$, $\hat{G}_2$, $\hat{G}_3$.
4°. Donner les matrices d'adjacences A_2 et A_3 de G_2 et G_3. En déduire celles de $G_2 \cup G_3$, $G_2 \circ G_3$, $\hat{G}_2$, $\hat{G}_3$.
5°. Retrouver alors les graphes correspondants.

XXVI. Cryptographie.

En cryptographie, on possède un message en clair $\mathcal{M}$ que l'on souhaite transmettre sous forme chiffrée $\mathcal{C}$ afin que seul le destinataire puisse en prendre connaissance.
La fonction qui transforme $\mathcal{M}$ en $\mathcal{C}$ s'appelle fonction de chiffrement et sa réciproque fonction de déchiffrement.

Nous allons étudier un cryptosystème utilisant des matrices de chiffrement. Le principe est le suivant :

Nous supposons que les messages sont écrits dans un alphabet de N lettres que l'on peut donc identifier à l'ensemble $\mathbb{F}_N = \{0, 1, ..., N-1\}$ des entiers modulo N.

Ex : Le message $\mathcal{M}$ ="BONJOUR" correspondra à la suite $(1, 14, 13, 9, 14, 21, 17)$ de $\mathbb{F}_N$

On découpe le message en paquets de 2 lettres. Chaque paquet s'appelle un digraphe et s'identifie donc à un vecteur à deux coordonnées dans $\mathbb{F}_N$

Ex : $\mathcal{M}$ est transformé en $\begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le chiffrement s'opère à l'aide d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_N)$

Pour chiffrer un digraphe, on le multiplie simplement par la matrice de chiffrement.
Pour déchiffrer le code à la réception, il suffit de multiplier le digraphe codé par la matrice inverse de A, à condition, bien sûr, que cette matrice soit inversible.

Ex : Le code chiffré de $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$ sera $Y = AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$

1°. Calculer le déterminant de A et donner une condition sur a, b, c, d et N pour que A soit inversible.
2°. Expliciter l'inverse A^{-1} de A.

3°. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}. Calculer le message chiffré à partir de $\mathcal{M}$.
Retrouver ensuite le message initial à partir du message codé.

4°. Vous venez de recevoir le message suivant : “ GFPYJP X ?UYXSTLADPLW ”
Vous savez, par indiscrétion, que ce message est codé dans un alphabet de 29 lettres dans lequel le symbole blanc correspond au nombre 26, le ? à 27 et le ! à 28.
Vous vous doutez en outre que les 5 dernières lettres du message contiennent le nom de l'expéditeur, “ KARLA “.
Quel est le message caché ? ?

XXVII. Relativité restreinte.

En physique, un évènement se produit en un endroit précis et en un instant donné. Il est défini par 3 coordonnées d'espace et 1 coordonnée de temps. On le note $E(x, y, z, t)$ et l'on peut le considérer comme un vecteur à quatre coordonnées que l'on appelle quadrivecteur espace-temps.

Dans toute la suite, nous aurons souvent à considérer deux repères $\mathcal{R}$ (O, x, y, z) et $\mathcal{R}'$ (O', x', y', z') dont les trois axes sont parallèles et tels que $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation uniforme de vitesse v parallèlement à $(0x)$. On supposera qu'en $t = 0$ les origines O et O' coïncident.

Un référentiel est dit galiléen s'il est en translation rectiligne uniforme avec un référentiel de Copernic. Dans un tel repère, un point matériel isolé décrit un mouvement de translation rectiligne uniforme. Les postulats de la cinématique galiléenne sont les suivants :

- Les lois physiques sont les mêmes dans tout repère galiléen.
- Dans un changement de repère galiléen, la distance entre deux points est un invariant.
- Dans un changement de repère galiléen, l'intervalle de temps entre deux évènements est un invariant.

Si $E(x, y, z, t)$ est un évènement dont les coordonnées sont données dans $\mathcal{R}$ et $E(x', y', z', t')$ est le même évènement exprimé dans le repère $\mathcal{R}'$, les formules de Galilée permettent d'exprimer les coordonnées de E' en fonction de celles de E :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Mais la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell est en contradiction avec ces postulats. En 1887, Michelson et Morley ont montré lors d'une expérience célèbre que la vitesse de la lumière c ne dépendait pas du repère (une personne immobile et une personne dans un train en mouvement voient un rayon lumineux arriver à la même vitesse c). Cette constatation est donc aussi incompatible avec les équations ci-dessus. Le mathématicien français Henri Poincaré et l'allemand Lorentz ont alors construit de nouvelles équations de changement de repère compatibles avec l'expérience de Michelson et Morley. Einstein a ensuite utilisé ces transformations pour sa théorie de la relativité restreinte en 1905.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La conséquence de l'invariance de la vitesse de la lumière impose comme postulats de la relativité restreinte les deux lois ci-dessous :

- Les lois physiques sont invariantes par changement de repère galiléen.
- L'intervalle d'espace-temps $\Delta s^2 = -\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 + c^2\Delta t^2$ est invariant par changement de repère.

Les matrices de Lorentz sont définies par

$$L(v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

avec $\beta = v/c$

1°. En posant $\tanh\psi = \beta$ (ψ s'appelle la rapidité), démontrer que

$$L(v) = \begin{pmatrix} \cosh\psi & 0 & 0 & -\sinh\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\psi & 0 & 0 & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

2°. Soit $\mathbb{L} = \{L(v); v \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des matrices de Lorentz. Démontrer que $(\mathbb{L}, \times)$ forme un groupe, appelé groupe de Lorentz. Déterminer en particulier $L(v)^{-1}$ et $L(v) \times L(v')$, ainsi que les facteurs de rapidité correspondants.

3°. Pour un évènement dont les coordonnées sont E dans $\mathcal{R}$ et E' dans $\mathcal{R}'$, démontrer que $E' = L(v) \times E$.

4°. Considérons deux évènements $E(x,y,z,t)$ et $E'(x',y',z',t')$ et l'intervalle d'espace temps correspondant

$$\Delta s^2 = c^2(t-t')^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2 - (z-z')^2$$

Si $\Delta s^2 > 0$, alors ces deux évènements peuvent être reliés : une ligne d'espace temps permet d'aller de l'un à l'autre à une vitesse inférieure à la lumière (on parle de vecteur de type espace) ; sinon, on dira que le vecteur est de type temps. Si $\Delta s^2 = 0$, on parle d'évènement de type lumière ; l'ensemble de ces évènements s'appelle le cône de lumière. $\Delta t > 0$ indique le futur d'un évènement et $\Delta t < 0$ son passé. Expliquer le terme "cône de lumière".

5°. On considère maintenant deux évènements simultanés lorsqu'ils sont observés dans $\mathcal{R}$: $A(0,0,0,t)$ et $B(1,0,0,t)$. Déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}'$ et en déduire que ces évènements ne sont plus simultanés dans $\mathcal{R}'$. De la même façon montrer que si deux évènements $A(0,0,0,t)$ et $B(0,0,0,t')$ sont localisés au même endroit dans $\mathcal{R}$, ils ne le seront plus dans $\mathcal{R}'$. Ces deux phénomènes très importants s'appellent contraction des longueurs et dilatation du temps : le temps propre d'un observateur est le temps qu'il mesure dans un repère par rapport auquel il est immobile. Dans tout autre repère, ce temps sera supérieur au temps propre. Une conséquence étonnante de ces propriétés est donnée par le paradoxe des jumeaux.

6°. **Le voyageur de Langevin et le paradoxe des jumeaux.**
Le jour où deux frêres jumeaux A et B ont 26 ans, l'un deux quitte la terre à bord d'un vaisseau spatial à grande vitesse $v = 0,6c$ et revient sur terre après un long voyage. On négligera les phases d'accélération et de décélération.
Le jour où B revient sur terre, A à 36 ans.
En exprimant les deux évènements départ et arrivée dans les repères liés à A et B et en utilisant les transformations de Lorentz, déterminer l'âge de B. Conclusion ? La situation est-elle symétrique pour les deux jumeaux ?

7°. **Effet doppler et expansion de l'univers.**
En plus du quadrivecteur espace temps, la théorie de la relativité utilise d'autres quadrivecteurs :

• quadrivecteur vitesse $V(\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, \gamma c)$
• quadrivecteur onde $K(k_x, k_x, k_z, \omega/c)$

Le vecteur d'onde $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$ est un vecteur de norme $\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi\nu}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ dirigé suivant la direction de propagation de l'onde (ω est la pulsation, λ la longueur d'onde et ν la fréquence).
Les coordonnées du quadrivecteur onde dépendent du repère où l'on se trouve et les formules de Lorentz permettent de changer de coordonnées en passant d'un repère à l'autre.

On considère une source monochromatique fixe dans un repère $\mathcal{R}$ qui émet une onde lumineuse, plane, de fréquence ν dans une direction (Ou) du plan (xOy) telle que $(Ox, Ou) = \theta$. On considère un second repère $\mathcal{R}'$ en mouvement de translation uniforme de vitesse v parallèlement à $(0x)$.

7.1. Déterminer la fréquence ν' de l'onde mesurée dans le repère $\mathcal{R}'$ ainsi que la direction θ' de cette onde.
7.2. On suppose que $\theta = 0$. Comparer ces valeurs selon que le repère $\mathcal{R}'$ se rapproche ou s'éloigne de $\mathcal{R}$
7.3. Qu'en est-il de la longueur d'onde λ de l'onde ? Qu'est ce que le "redshift" des galaxies ?

8°. On se propose pour terminer d'établir les formules de Lorentz et Poincaré utilisées dans cet exercice. On admettra que l'homogénéïté de l'espace et du temps implique que les coordonnées d'un évènement $E(x',y',z',t')$ dans le repère $\mathcal{R}'$ s'exprime linéairement en fonction des coordonnées de $E(x,y,z,t)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Le problème est donc de déterminer les 16 coefficients $(a_{i,j})_{i,j=0..3}$ de la matrice $L(v)$.

Pour cela, vous pourrez utiliser l'isotropie de l'espace, évaluer les coordonnées du centre O' de $\mathcal{R}'$ dans les deux repères, examiner un rayon lumineux dans les deux repères également et vous ramener à un système d'équations que vous résoudrez.

La théorie de la relativité n'est pas seulement une théorie abstraite aux conséquences étonnantes. Elle est utilisée constamment dans la physique des particules, en astronomie et même dans une application de la vie quotidienne : la localisation par GPS (Global Positionning System). Le GPS utilise un réseau de satellite en orbite, chacun possédant une horloge atomique embarquée. Le récepteur GPS sur terre reçoit des signaux émis par ces satellites et mesure l'intervalle de temps séparant leur émission de leur réception pour en déduire sa position sur terre avec une précision de l'ordre de la dizaine de mètres. Les satellites se déplacent à près de 14000 km/h. Si les effets relativistes étaient négligés, les horloges de ces satellites auraient un décalage journalier de $38\mu s$ qui provoquerait des erreurs de localisation de l'ordre de 10 km.

XXVIII. Matrice d'inertie d'un solide.

En mécanique, à tout corps matériel Σ (nous dirons aussi solide) est associé une grandeur physique appelée masse qui schématise la quantité de matière de ce corps. Cette quantité peut dépendre du point $M \in \Sigma$ du solide ou bien ne pas en dépendre si le solide est homogène. Nous avons donc une fonction continue et positive $\rho(M)$ appelée densité volumique de masse qui précise la répartition de masse dans le solide. La masse totale du solide est alors

$$m = \int_\Sigma \rho(M)dv = \int_\Sigma dm$$

La masse est positive, ne dépend pas du temps et possède la propriété d'additivité.

Le centre d'inertie d'un solide Σ est le point G de l'espace tel que $\displaystyle\int_\Sigma \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$

C'est le point dont les coordonnées sont :

$\boxed{x_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_\Sigma x\ dm}$ $\boxed{y_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_\Sigma y\ dm}$ $\boxed{z_G = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_\Sigma z\ dm}$

On peut démontrer (nous ne le ferons pas) que ce point G se trouve nécessairement sur tous les axes ou centre de symétrie du solide.

Le moment d'inertie d'un solide Σ par rapport à une droite Δ est le scalaire positif noté I_Δ et défini de la façon suivante

$$I_\Delta = \int_\Sigma HM^2\ dm$$

H étant le projeté orthogonal de M sur Δ. Si l'on note $vecn$ un vecteur directeur unitaire de la droite Δ, alors on peut montrer que

$$I_\Delta = \left(\int_\Sigma \overrightarrow{OM} \wedge \vec{n} \wedge \overrightarrow{OM}\ dm\right)\vec{n}$$

La matrice d'inertie d'un solide est la matrice

$$\mathcal{I}_0 = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

avec

$A = \displaystyle\int_\Sigma (y^2+z^2)\ dm,\ B = \int_\Sigma (z^2+x^2)\ dm,\ C = \int_\Sigma (x^2+y^2)\ dm,\ D = \int_\Sigma yz\ dm,\ E = \int_\Sigma zx\ dm,\ F = \int_\Sigma xy\ dm$

Cette matrice représente les moments d'inertie du solide avec chacun des axes du repère (ce sont les coefficients A,B,C) et les produits d'inertie du repère (D,E,F). Avec les mêmes notations que ci-dessus, le moment d'inertie du solide par rapport à une droite Δ se calcule alors par la formule suivante $\boxed{I_\Delta = (\mathcal{I}_0 \times \vec{n})\,\vec{n}}$

1°. Calculer la matrice d'inertie d'une tige homogène de masse m, verticale, de longueur l, de centre O, dont l'épaisseur est négligeable. En déduire le moment d'inertie de cette tige par rapport à la droite Δ du plan (yOz) passant par O et telle que $(Oy, \Delta) = \pi/6$

2°. Déterminer la matrice d'inertie d'un disque homogène de masse m, centre O et rayon R, puis celui d'une sphère homogène de centre O et masse m.

XXIX. Informatique quantique.

Un qubit (pour quantum bit ou bit quantique) est un objet physique noté $|\psi>$ pouvant se trouver dans deux états notés $|0>$ et $|1>$. C'est l'analogue quantique du bit en informatique. La différence entre un bit et un qubit est la nature aléatoire du qubit. Un bit classique se trouve dans l'état 0 ou 1 tandis qu'un qubit peut se trouver dans une superposition d'état $|0>$ ou $|1>$. Si d'un point de vue physique cela peut paraître étonnant, on peut par contre très facilement le modéliser en mathématique en posannt $|\psi>= \alpha|0> +\beta|1>$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Autrement dit, $|\psi>$ est une combinaison linéaire des deux états initiaux. $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ représente respectivement les probabilités que le qubit soit dans létat $|0>$ ou dans l'état $|1>$ et l'on a bien sûr $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

On peut facilement trouver des exemples de réalisation physique d'un qubit : la polarisation d'un photon, le spin d'un électron, le niveau d'énergie d'un électron dans un atome, etc. Un ordinateur quantique est un ordinateur dont la mémoire est formée de qubits. Depuis les années 1990, les chercheurs ont déjà effectué de nombreuses expériences en ce domaine (téléportation quantique, cryptographie quantique, construction d'un ordinateur quantique avec quelques qubits de mémoire).

Nous adopterons pour les qubits une notation vectorielle : le qubit ayant deux états, on peut poser :
$|0>= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $|0>= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $|\psi>= \alpha|0> +\beta|1>= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Une porte quantique (quantum gate) agit sur un qubit pour en modifier l'état. Ces portes sont les analogues quantiques des portes logiques habituelles. On les représente par des matrices et leur action sur un qubit se définit en effectuant le produit matriciel de la porte par l'état du qubit :

- La porte NON : $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ permute les deux états.

• Les portes $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

• La porte de Hadamard : $H = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui mélange les deux états.

• La porte phase : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

1°. Pour chacune de ces portes, déterminer l'image d'un qubit $|\psi >= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

2°. On dit qu'une porte quantique est réversible si sa matrice est inversible. Déterminer, parmi les portes ci-dessus, celles qui sont inversibles. Une porte non réversible indique qu'on ne peut pas revenir à l'état précédent et que celui-ci est perdu de façon irréversible.

3°. On dit qu'une matrice est hermitienne si ${}^t\bar{A} = A$ et unitaire si ${}^t\bar{A} \times A = I$.
Parmi les portes ci-dessus, déterminer celles qui sont hermitiennes et unitaires.

On appelle produit tensoriel de deux matrices $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B = (b_{i,j}) \in M_{q,r}(\mathbb{C})$ la matrice $A \otimes B = (a_{i,j}B) \in M_{nq,pr}(\mathbb{C})$ obtenue en remplaçant dans A chaque coefficient par le bloc matriciel $a_{i,j}B$.

Cette opération s'effectue aussi sur des vecteurs ; par exemple si $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ alors $u \otimes v = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha\beta' \\ \beta\alpha' \\ \beta\beta' \end{pmatrix}$

On a alors $(\lambda u) \otimes v = v \otimes (\lambda v) = \lambda(u \otimes v)$
En utilisant la notation de Dirac ($|\psi >$ s'appelle un vecteur ket), ceci permet de modéliser le comportement de plusieurs qubits. Deux qubits peuvent se présenter dans quatre états ; on les notera :

$$|00 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |10 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |01 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |11 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un système de deux qubits sera donc formé d'une combinaisson linéaire de ces quatre états :

$$|\psi >= \alpha_{00}|00 > +\alpha_{10}|10 > +\alpha_{01}|01 > +\alpha_{11}|11 >= \begin{pmatrix} \alpha_{00} + \alpha_{01} \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} \\ \alpha_{00} + \alpha_{10} \\ \alpha_{01} + \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

La porte control-NOT est une généralisation du XOR classique et s'effectue sur deux qubits. Sa matrice est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4°. Evaluer son action sur les quatre états de base et sur un état $|\psi >$ quelconque.

5°. Un système de deux qubits est dans un état de Bell (on dit aussi qu'ils forment une paire EPR pour Einstein, Poldolski, Rosen) si $|\psi >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|00 > +|11 >)$. Donner les coordonées du vecteur correspondant.

6°. On part d'un système de deux qubits. Le premier passe au travers d'une porte de Hadamard et l'on effectue ensuite un control-NOT sur le système. Donner, pour les quatre états de base possibles, l'état final après ces deux opérations.

XXX. Applications aux statistiques.

Matrice de covariance, problèmes de classification et de régression, analyse de données multidimensionnelle.

XXXI. Matrice d'un canal de communication.

Il s'agit de matrices stochastiques dont les éléments sont des probabilités conditionnelles. Nous les étudierons dans la leçon sur les variables aléatoires.

XXXII. Applications aux circuits électriques.

Réseau maillé de conducteurs électriques.

XXXIII. Imagerie radar.

En polarimétrie, on lie une onde incidente avec une onde réfléchie par l'intermédiaire de matrices de diffusion. La matrice de Jones et la matrice de Sinclair sont des matrices 2×2 à coefficients complexes qui indiquent les états de polarisation des ondes.

XXXIV. Optique matricielle.

Matrice de transfert et de translation pour des dioptres.

Crédit photos :
- Les reproductions de William Hamilton et de la plaque commémorative proviennent du site "national curve bank - math on the web"
- L'affiche et la reproduction du film "matrix" proviennent du site "warnerbros.com".