MATHEMATIQUES TD N°7 : CALCUL DIFFERENTIEL.

R&T Saint-Malo - 2ndee année - 2009/2010

I Domaines de définition.

Déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessous.

1°. xy/z 2°. $\ln(x^2+y^2-1)$ 3°. $\sqrt{1-x^2-y^2}$ 4°. $\ln(1-x^2y^2)$ 5°. $\dfrac{x}{y^4-4x}$ 6°. $\ln(z-y)+xy\sin z$

7°. $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 8°. $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 9°. $\sqrt{6-2x-3y}$ 10°. $\dfrac{x+y}{x-y}$ 11°. $\sqrt{xyz}$ 12°. $\exp(\sqrt{z-x^2-y^2})$

II Dérivées partielles.

Pour chacune des fonctions ci dessous, calculer les dérivées partielles par rapport à chaque variable et indiquer le domaine de définition de la fonction.

1°. xy 2°. $3x^2y^2-2xy$ 3°. $x^2+y^2+z^2$ 4°. x/y 5°. $\dfrac{x+y}{x-y}$ 6°. $e^x\sin y$

7°. $(x^2+y^2)e^{-xy}$ 8°. $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 9°. $\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 10°. $\dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$ 11°. $xy+yz+zx$ 12°. $\arctan\dfrac{y}{x}$

13°. ye^x 14°. $(x^2+y^2)^{3/2}$ 15°. $y\sin(xy)$ 16°. $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ 17°. xyz 18°. x^4+y^4+6xy

III Matrice jacobienne.

Déterminer, pour chaque fonction, la matrice jacobienne et, lorsque cela est possible, le déterminant jacobien associé.

1°. $f(x,y)=\sin(x^2-y^2)$ 2°. $f(x,y)=\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ 3°. $f(r,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ 4°. $f(x,y)=\begin{pmatrix} xy \\ 1/x \end{pmatrix}$

5°. $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x^2yz \\ z+xy \end{pmatrix}$ 6°. $f(u,v,w)=\begin{pmatrix} vw \\ uw \\ uv \end{pmatrix}$ 7°. $f(u,v)=\begin{pmatrix} e^{u+v} \\ e^{u-v} \\ uv \end{pmatrix}$ 8°. $f(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$

IV Dérivées secondes.

Déterminer les dérivées partielles secondes des fonctions ci-dessous et indiquer celles pour lesquelles le théorème de Schwarz s'applique.

1°. xy 2°. $x^2+y^2+z^2$ 3°. $\ln(x^2+y)$ 4°. $\dfrac{xy}{x+y}$

5°. $\sqrt{2xy+y^2}$ 6°. $\arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ 7°. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 8°. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

V Limites.

Déterminer les limites suivantes :

1°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)$ 2°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy$ 3°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x+y}{x^2-y^2}$ 4°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

5°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cos\frac{1}{xy}$ 6°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{1}{1-x^2-y^2}$ 7°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^2+y^2}$ 8°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$

9°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$ 10°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\ln|1+x^2y^2|$ 11°. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2+3z^2}{x^2+y^2+z^2}$ 12°. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(3,-2,2)} e^{xz}\cos y$

VI Calculs d'opérateurs.

Déterminer le gradient et le laplacien de chacune des fonctions ci dessous au point considéré :

1°. $f(x,y)=x^y$ 2°. $f(x,y)=\ln(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ 3°. $f(x,y)=\arctan(\dfrac{x+y}{1-xy})$ 4°. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Déterminer la divergence et le rotationnel de chacune des fonctions $f(x,y,z)$ ci dessous au point considéré :

5°. $\begin{pmatrix} 2x^2y \\ 2xy^2 \\ xyz \end{pmatrix}$ 6°. $\begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+2y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$ 7°. $\begin{pmatrix} x^2-yz \\ y^2-zx \\ z^2-xy \end{pmatrix}$ 8°. $\begin{pmatrix} \sin(xy) \\ 0 \\ \cos(zx) \end{pmatrix}$

VII Propriétés des opérateurs.

On considère des fonctions $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
Démontrer les propriétés suivantes :

1°. $\text{grad}(uv) = u \times \text{grad}(v) + v \times \text{grad}(u)$ 2°. $\text{div}(u\phi) = u \times \text{div}(\phi) + \phi \times \text{grad}(u)$ 3°. $\Delta u = \text{grad}(\text{div}(u)) - \text{rot}(\text{rot}(u))$
4°. $\text{div}(\text{grad}(u)) = \Delta u$ 5°. $\text{rot}(\text{grad}(u)) = \vec{0}$ 6°. $\text{div}(\text{rot}(\phi)) = 0$

VIII Champs newtoniens.

Un champ vectoriel $\vec{V}$ est un champ de gradient si rot $\vec{V} = \vec{0}$. C'est un champ de rotationnel si div $\vec{V} = 0$.
Un champ qui possède les deux propriétés précédentes est appelé champ newtonien.

1°. Une particule de charge électrique q située dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ en O génère au point $M(x,y,z)$ un champ vectoriel donné par $\vec{V} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{OM}}{r^3}$ avec $r = OM$ et ϵ_0 permitivité du vide. Autrement dit, on a :

$$\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{V}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Démontrer que $\vec{V}$ est un champ de gradient. Soit $U(x,y,z) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Montrer que $\vec{V} = -\text{grad } U$. On dit alors que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel.

2°. Une particule de masse m située dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ en O génère au point $M(x,y,z)$ un champ vectoriel donné par $\vec{V} = -k\dfrac{m}{r^3}\overrightarrow{OM}$ avec $r = OM$ et k constante de la gravitation universelle. Ainsi,

$$\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{V}(x,y,z) = -km\begin{pmatrix} \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Démontrer que $\vec{V}$ est un champ newtonien. Soit $U(x,y,z) = \dfrac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Calculer grad U et ΔU

IX Extrema de fonctions de plusieurs variables.

Déterminer les extremas locaux des fonctions définies par :

1°. $x^2 + y^2$ 2°. $x^2 - y^2$ 3°. $x^2 + y^2 - xy$ 4°. $x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

5°. $x^2 - y^2 - xy$ 6°. $x^3 + y^3 - x^2y^2$ 7°. xy 8°. $x^4 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4$

9°. $\dfrac{3y}{x^2+y^2+1}$ 10°. $x^3 - 6xy + 8y^3$ 11°. $x^4 + y^4 - 4xy + 1$ 12°. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

13°. $3xy - x^2y - xy^2$ 14°. $(x^2 + y)e^{y/2}$ 15°. xye^{-y} 16°. $y^2 - y^4 - x^2$

X Exemples d'équations aux dérivées partielles.

1°. On cherche les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 telles que

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) + s \times g(s,t) = 0 \ , \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

et vérifiant en outre $g(0,s) = s$,$\forall s \in \mathbb{R}$. On pose pour cela $f(t) = g(t,s)$ pour s fixé. Déterminer f et en déduire les solutions de l'équation.

2°. Trouver toutes les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$,$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

3°. Soit E : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0$. On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $g(r,\theta) = f(x,y)$
Déterminer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f et en déduire les solutions de E.

4°. Soit E : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$. On pose $\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$ et $g(u,v) = f(x,y)$

Déterminer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f et en déduire les solutions de E.

5°. Soit E : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $g(u,v) = f(u+v, u-v) = f(x,y)$

Montrer que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ et en déduire les solutions de E.

XI Equation de la chaleur.

On considère une barre de longueur π et d'épaisseur négligeable devant sa longueur (elle sera représentée par le segment $[0,\pi]$). Cette barre est à une température initiale $h(x)$ en x avec $h(0) = h(\pi) = 0$ (par commodité pour les calculs). Nous cherchons à déterminer l'évolution de la température de la barre au cours du temps.
Il s'agit de trouver les fonctions $u(x,t)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \bullet\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \forall (x,t) \in D = [0,\pi] \times]0,+\infty] \\ \bullet\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ \bullet\ u(x,0) = h(x) & \forall x \in [0,\pi] \\ \bullet\ h \in C^1([0,\pi]),\ u \in C^2(D) & \end{cases}$$

1°. Une solution est stationnaire si $u(x,t) = f(x)g(t)$. Montrer qu'alors $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(t)}{g(t)} = \lambda$ avec $\lambda \leq 0$

2°. Montrer que $f(x) = \alpha_n \sin(nx)$ et que $g(t) = \beta_n e^{-n^2 t}$ avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

3°. En déduire une famille $u_n(x,t)$ de fonctions solutions du problème.

4°. On pose, sous réserve de convergence, $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$

On considère la fonction $\tilde{h}$, 2π-périodique, impaire, définie sur $[-\pi,\pi]$ et vérifiant :
$\tilde{h}(x) = h(x)\ \forall x \in [0,\pi]$ et $\tilde{h}(x) = -h(-x)\ \forall x \in [-\pi, 0]$

Calculer $u(x,0)$ et en déduire la signification des ω_n.

5°. Exprimer la solution si $h(x) = 1\ \forall x \in]0,\pi[$

XII Equations de Maxwell.

On considère un champ électrique se propageant dans l'espace en fonction du temps. En un point $M(x,y,z)$ et au temps t le champ est représé par la fonction
$E(x,y,z,t) = \phi(x) e^{i(\omega t - z)} \vec{j}$

ω est un réel positif représentant la pulsation. D'après la formule ci-dessus, l'onde se propage suivant l'axe (Oy) et possède une amplitude $\phi(x)$ variant uniquement suivant x. On peut donc considérer cette onde, à t fixé, comme une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$E : (x,y,z) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(x) e^{i(\omega t - z)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le champ magnétique B engendré par E est également une fonction de x, y, z et t et le lien entre E et B est donné par les équations de Maxwell. L'une d'elle indique que
rot $E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$

1°. Calculer rot E et en utilisant l'équation précédente, démontrer que

$$B(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\phi(x) e^{i(\omega t - z)} \\ 0 \\ \frac{i}{\omega}\phi'(x) e^{i(\omega t - z)} \end{pmatrix}$$

2°. Vérifier les deux équations de Maxwell div $E = 0$ et div $B = 0$

3°. La quatrième équation de Maxwell est rot $B = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}$
c représente la vitesse de propagation de l'onde.

En utilisant cette équation démontrer que ϕ vérifie l'équation différentielle $\phi''(x) + (\dfrac{\omega^2}{c^2} - 1)\phi(x) = 0$

4°. En posant $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - 1$, résoudre cette équation et en déduire $\phi(x)$

XIII Onde électromagnétique.

On considère une onde transverse électrique qui se propage dans le vide. Cette onde crée un champ électrique en $M(x,y,z)$ qui est défini par la fonction suivante :

$$E : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; / \; (x,y,z) \longrightarrow E(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(z)\cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1°. Donner l'expression du champ magnétique $B(x,y,z)$ au point $M(x,y,z)$.

2°. Vérifier les deux équations de Maxwell $\mathrm{div}E = 0$ et $\mathrm{div}B = 0$

3°. Démontrer que E et B sont solutions de l'équation des ondes donnée par :

$$\Delta E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \text{ et } \Delta B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

4°. Démontrer que $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}E) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\ E) - \Delta E$

XIV Equation des ondes.

Le but de ce problème est la résolution de l'équation des ondes à une dimension en utilisant la transformation de Fourier. L'équation des ondes a pour forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t)$$

Dans laquelle $v(x,t)$ représente la forme d'une onde au point x et à l'instant t et c représente la célérité de l'onde dans le milieu où elle se propage. Pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide, c représente la vitesse de la lumière. L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles pilotant beaucoup de phénomènes ondulatoires : propagation d'une onde électromagnétique, d'une onde sonore, vibrations d'une corde, etc. Le problème revient à déterminer toutes les fonctions $v(x,t)$ de classe C^2 vérifiant en outre les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \quad v(0,t) = 0 & \forall t > 0 \\ \bullet \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \phi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet \quad v(x,0) = \psi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1°. Démontrer que la fonction ci-dessous est solution de l'équation :

$$v(x,t) = \frac{1}{2}(\psi(x+ct) + \psi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s)ds \quad (1)$$

2°. Expliquer sa forme et le terme d'onde progressive.

3°. Fixons t et considérons la fonction $x \to v(x,t)$.
Soit $\hat{v}(u,t)$ sa transformée de Fourier. En supposant que l'on peut permuter la dérivation avec l'intégrale (ce qui est faux en rêgle général) démontrer que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t) \times e^{-2\pi i u x} dx$$

4°. En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, démontrer que si $v(x,t)$ est solution de l'équation des ondes, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) + (2\pi u c)^2 \times \hat{v}(u,t) = 0$$

5°. A u fixé, cette équation est une équation différentielle à variables séparées. La résoudre et en déduire que

$$\hat{v}(u,t) = \alpha(u)\cos(2\pi u c t) + \beta(u)\sin(2\pi u c t)$$

où α et β sont des fonctions de u uniquement.

6°. En utilisant les conditions initiales, démontrer que

$$\hat{v}(u,t) = \hat{\psi}(u)\cos(2\pi u c t) + \frac{\hat{\phi}(u)}{2\pi u c}\sin(2\pi u c t)$$

7°. Déterminer la transformée de Fourier des fonctions $x \to \psi(x+ct)$ et $x \to \psi(x-ct)$ en fonction de $\hat{\psi}(u)$ puis déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\frac{1}{2c}1_{[-ct,ct]}(x)$

8°. Déduire des deux questions précédentes la forme générale de la solution trouvée dans l'équation (1)

XV Equation des lignes.

Nous souhaitons étudier la propagation du courant électrique dans une ligne de transmission bifilaire (câble coaxial, fil de cuivre, ou autre). Lorsque la longueur de la ligne est très grande devant la longueur d'onde λ du courant qui la traverse, les lois classiques de l'électrocinétique ne s'appliquent plus et ce sont des phénomènes de propagation d'ondes que l'on observe (c'est Hertz qui a mis en évidence ce phénomène). On décompose la ligne en une infinité de segments de longueur dx (négligeable devant λ) ; chaque segment peut être considéré comme une cellule RLC et la ligne se modélise alors par une succession de cellules RLC identiques, montées en cascade (on parle de circuit à constantes réparties). Sous ces hypothèses, la ligne est caractérisée par :

- R résistance linéique (en $\Omega.m^{-1}$) dûe à la résistance des matériaux.
- L inductance linéique ($H.m^{-1}$) dûe à la présence d'un courant dans la ligne.
- C capacité linéique ($F.m^{-1}$) dûe à la présence d'un isolant entre les conducteurs.
- G admittance linéique ($S.m^{-1}$) dûe aux défauts de l'isolant.

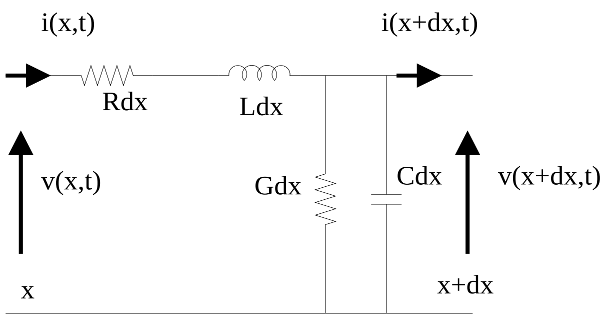

FIGURE 1 – Modèle d'une ligne de transmission.

On notera $i(x,t)$ et $v(x,t)$ l'intensité et la tension en un point x de la ligne, à l'instant t. On supposera que ces fonctions sont de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$

1°. Pour un courant d'une fréquence de 50 Hz présent dans la ligne, déterminer la longueur d'onde λ. Faire de même pour des courants de 300 Hz, 4 KHz, 300 MHz et enfin 3 GHz.

2°. En utilisant la loi des noeuds et la loi des mailles dans un élément de longueur dx (cf. dessin), établir que $v(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -Ri(x,t) - L\dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) \\[2ex] \dfrac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -Gv(x,t) - C\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) \end{array} \right. \qquad (\star)$$

En déduire que $v(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions de la même équation aux dérivées partielles donnée ci-dessous et appelée **équation des télégraphistes**.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = RG \times v(x,t) + (RC + LG)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = RG \times i(x,t) + (RC + LG)\frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t)$$

3°. On considère que la ligne est sans perte lorsque le signal n'y est pas atténué. On a alors $R = 0$ et $G = 0$. C'est dans ce cas que nous nous placerons par la suite. Etablir alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $i(x,t)$ et $v(x,t)$. Cette équation s'appelle l'**équation des lignes**.

On pose $c = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, qui a la dimension d'une vitesse ; constater que l'on retrouve alors l'équation des ondes.

4°. Posons $\left\{ \begin{array}{l} u = t - x/c \\ s = t + x/c \end{array} \right.$ et $g(u,s) = v(x,t)$

Déterminer l'équation aux dérivées partielles dont g est solution, puis la résoudre. En déduire que la solution de l'équation des lignes est de la forme

$$v(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

F et G étant des fonctions arbitraires de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

5°. En déduire que $v(x,t)$ et $i(x,t)$ peuvent se voir comme la somme de deux ondes se propageant dans des directions opposées. Quelle est leur vitesse de propagation ? C'est Maxwell qui l'a déterminée le premier.

Nous noterons par la suite $v(x,t) = v_+(x-ct) + v_-(x+ct)$ et $i(x,t) = i_+(x-ct) + i_-(x+ct)$ où v_+ et i_+ correspondent au courant et à la tension se propageant de la gauche vers la droite tandis que v_- et i_- correspondent au courant et à la tension se propageant de la droite vers la gauche.

6°. Considérons le signal se propageant de la gauche vers la droite. En utilisant le système d'équation ($\star$) pour une ligne sans pertes, démontrer que

$$\frac{v_+(x-ct)}{i_+(x-ct)} = Z$$

où Z est une constante positive indépendante de x et de t que l'on exprimera en fonction de L et de C. Cette constante (importante) s'appelle l'**impédance caractéristique** de la ligne.

Démontrer que la même façon que

$$\frac{v_-(x-ct)}{i_-(x-ct)} = -Z$$

On constate ainsi que le courant et la tension se propageant de gauche à droite sont de même signe, alors que le courant et la tension se propageant de droite à gauche sont de signe contraire.

7°. On suppose maintenant que l'une des extrémités du fil de longueur L est reliée à une résistance R au point $x = L$. En appliquant les lois de Kirchhoff à l'extrémité du câble, exprimer la tension réfléchie v_- et le courant réfléchi i_- en fonction de la tension incidente v_+ et du courant incident v_+. En déduire que

$$\frac{u_-}{u_+} = \frac{R-Z}{R+Z} \text{ et } \frac{i_-}{u_+} = -\frac{R-Z}{Z(R+Z)}$$

Que se passe-t-il si $R < Z$? $R > Z$? $R = Z$? A quoi sert l'adaptation d'impédance dans un câble ?

8°. On se place maintenant dans le cas d'un régime harmonique pour une ligne de longueur L : Cela signifie que l'on excite la ligne à son origine par une tension de la forme $v(0,t) = V_0 e^{i\omega t}$. On cherche alors des solutions de la forme $v(x,t) = V(x)e^{i\omega t}$. Démontrer que $V(x)$ est solution d'une équation différentielle que l'on résoudra. Donner l'expression des solutions dans le cas où la ligne est fermée par une impédance Z_L. Que se passe-t-il si l'on court-circuite la ligne en $x = L$? Si l'on laisse la ligne ouverte ? Avec quelle impédance doit-on fermer la ligne pour empêcher la création d'une onde réfléchie ? Dans chacun des cas, on exprimera la tension $v(x,t)$ en fonction de V_0, Z, Z_L, k, ω et L. On pourra poser $\Gamma = Z_L \cos(kL) + iZ\sin(kL)$.

9°. Nous supposons maintenant que le fil de longueur L est relié à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$ à des résistances nulles. Pour déterminer l'expression de la tension $v(x,t)$ en tout point du fil, nous allons utiliser la méthode de la séparation des variables : On suppose que $v(x,t) = f(x)g(t)$. Nous admettrons le fait que la solution de l'équation des ondes avec les conditions initiales imposées par le fil est unique. Ainsi, s'il existe une solution sous la forme $f(x)g(t)$, se sera la seule solution possible du problème.

Démontrer que si $v(x,t) = f(x)g(t)$ alors f et g sont solutions de deux équations différentielles que l'on résoudra. Démontrer alors que $v(x,t)$ peut se mettre sous la forme

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} \left(a_n \sin(\frac{nc\pi t}{L}) + b_n \cos(\frac{nc\pi t}{L}) \right) \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Expliquer l'apparition d'ondes stationnaires dans le câble. A quoi correspondent les coefficients a_n et b_n ?

10°. On considère maintenant un fil isolé dans l'espace. La source de courant est située au milieu du fil, et possède une forme sinusoïdale donnée par $\mathcal{I}(t) = I\sin(\omega t)$. Démontrer que $i(x,t)$ peut s'écrire sous la forme

$$i(x,t) = A\left[\sin(\omega t + \omega x/c) - \sin(\omega t + \omega x/c)\right]$$

ou également sous la forme

$$i(x,t) = I_0 \sin(\omega x/c)\cos(\omega t)$$

Donner l'expression $v(x,t)$ et montrer que $i(x,t)$ et $v(x,t)$ sont en quadrature à la fois dans le temps et dans l'espace. Quelle est la distance entre un nœud et un ventre ?

11°. On se sert maintenant du fil comme d'une antenne radio : l'une de ses extrémités est reliée au sol tandis que la seconde est laissée libre. A la base du fil, une source délivre un courant de la forme $\mathcal{I}(t) = f(x)\sin(\omega t)$. Déterminer le courant $i(x,t)$ en tout point de l'antenne, puis calculer les valeurs de x où son amplitude est maximale et minimale. Exprimer la longueur d'onde λ en fonction de la longueur L de l'antenne. Déterminer ensuite l'expression du potentiel $v(x,t)$ tout au long de l'antenne. Conclure. Voilà, l'exercice est fini.

XVI Propagation d'un signal électrique dans un câble coaxial.

On se propose d'étudier la propagation des signaux électriques dans un câble coaxial. Le câble est formé de deux cylindres de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. Le premier cylindre est plein (c'est l'âme du câble) et le second est creux (c'est la gaine). On supposera ces cylindres de très grande conductivité. Les charges et courants électriques qu'ils transportent seront, aux fréquences de travail, considérés comme surfaciques et le champ électromagnétique est nul dans le volume des conducteurs. De plus, il ne circule aucun courant sur la surface extérieure de la gaine.
L'espace entre les deux cylindres est rempli d'un milieu isolant et homogène dont les caractéristiques sont supposées indépendantes de la fréquence. On admettra alors qu'il suffit de remplacer dans les toutes les équations de Maxwell ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ où ϵ_r est la permitivité relative de l'isolant.

On donne : $\phi_1 = 2R_1 = 1mm$, $\phi_2 = 2R_2 = 3,5mm$ et $\epsilon_r = 2,25$.

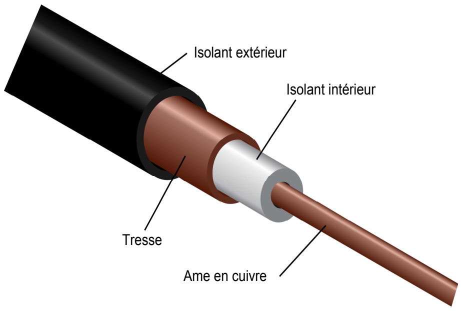

FIGURE 2 – Section d'un câble coaxial.

Un point M entre les cylindres sera repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), (Oz) étant l'axe des cylindres. On désigne enfin par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ le repère orthonormé associé.

1°. En un point M compris entre les conducteurs, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de Q, r et ϵ. On négligera les effets de bord. En déduire l'expression de la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les cylindres, en fonction de Q, R_1 et R_2.

2°. Exprimer la capacité linéique Γ du câble en fonction de R_1 et R_2, puis la calculer ainsi que $V_1 - V_2$ pour $Q = 1$ nC.m^{-1}. À quelle distance de l'axe le champ $\vec{E}$ prend-il sa valeur maximale E_m dans le milieu isolant ? Calculer E_m.

3°. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de I et r.

4°. On considère un tronçon de câble de longueur unité limité par deux plans orthogonaux à l'axe (Oz). Le flux magnétique propre ϕ de ce tronçon est le flux de $\vec{B}$ à travers le demi-plan $\theta =$cte, limité par les extrémités du tronçon. Trouver l'expression de ϕ en fonction de I, R_1 et R_2. En déduire l'inductance linéique Λ du câble en fonction de R_1 et R_2. Calculer la valeur numérique de Λ. À quelle distance de l'axe le champ $\vec{B}$ prend-il sa valeur maximale B_m dans le milieu isolant ? Calculer B_m si $I = 100$ mA.

On considère maintenant une onde progressive $(\vec{E}, \vec{B})$ de la forme

$$\vec{E} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y, z) \longrightarrow \vec{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} E_x.e^{i(\omega t - kz)} \\ E_y.e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y, z) \longrightarrow \vec{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} B_x.e^{i(\omega t - kz)} \\ B_y.e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5°. En utilisant les équations de Maxwell, établir que

XVII Propagation d'un signal sur une ligne électrique.

XVIII Concours commun BE 2000.

Soit h une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xyh(xy)$

1°. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de x, y et h.

2°. Exprimer de même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de x, y et h.

3°. Montrer que si $\Delta f = 0$, alors h vérifie l'équation différentielle $ty''(t) + 2y'(t) = 0$

4°. Montrer que si $\Delta f = 0$, alors $h'(t) = \dfrac{K}{t^2}$

5°. Déterminer les solutions de l'équation $\Delta f = 0$