MATHEMATIQUES TD N°7 : CALCUL DIFFERENTIEL - CORRIGE.

R&T Saint-Malo - 2ndee année - 2009/2010

NB. Non notera souvent $\frac{\partial f}{\partial x}$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible sur le point où la dérivée partielle est calculée et on n'oubliera pas que la première notation indique une fonction tandis que la seconde indique la valeur de cette fonction en un point (x,y).

I Domaines de définition.

Déterminer les domaines de définition des fonctions ci-dessous.

1°. xy/z
2°. $\ln(x^2+y^2-1)$
3°. $\sqrt{1-x^2-y^2}$
4°. $\ln(1-x^2y^2)$
5°. $\frac{x}{y^4-4x}$
6°. $\ln(z-y)+xy\sin z$
7°. $\frac{1}{x^2+y^2}$
8°. $\frac{x}{x^2+y^2}$
9°. $\sqrt{6-2x-3y}$
10°. $\frac{x+y}{x-y}$
11°. $\sqrt{xyz}$
12°. $\exp(\sqrt{z-x^2-y^2})$

II Dérivées partielles.

Pour chacune des fonctions ci dessous, calculer les dérivées partielles par rapport à chaque variable et indiquer le domaine de définition de la fonction.

1°. $f(x,y)=xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=x$

Par ailleurs, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$

2°. $f(x,y)=3x^2y^2-2xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}=6xy^2-2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=6x^2y-2x$

Par ailleurs, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$

3°. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$ et $\frac{\partial f}{\partial z}=2z$

Par ailleurs, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^3$

4°. $f(x,y)=x/y$

$\frac{\partial f}{\partial x}=1/y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=-x/y^2$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la droite (Ox)

5°. $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2y}{(x-y)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial x}$

Cette fonction est définie sur l'ensemble des points du plan tels que $x\neq y$

6°. $f(x,y)=e^x\sin y$

$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\sin y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=e^x\cos y$

La fonction est clairement définie sur $\mathbb{R}^2$

7°. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-xy}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-xy}(2x-y(x^2+y^2))$ et
$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-xy}(2y-x(x^2+y^2))$

La fonction est clairement définie sur $\mathbb{R}^2$

8°. $\frac{x}{x^2+y^2}$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2/\ \{(0,0)\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

9°. $f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2/\ \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $x=0$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{x}\cos(xy)-\frac{\sin(xy)}{x^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(xy)$

10°. $f(x,y)=\frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2/\ \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est la réunion des deux quarts de plan où x et y n'ont pas même signe, l'axe $y=0$ étant inclus dans ce domaine et les autres axes en étant exclus.

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sin\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{y^2}(1-\cos\sqrt{xy})$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x\sin\sqrt{xy}}{2y\sqrt{xy}}-\frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y^2}$

11°. $f(x,y,z)=xy+yz+zx$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^3$ et l'on a :

$\frac{\partial f}{\partial x}=y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x+z$, $\frac{\partial f}{\partial z}=x+y$

12°. $f(x,y)=arctan(\frac{y}{x})$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2/\ \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $x=0$

$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$

13°. ye^x
14°. $(x^2+y^2)^{3/2}$
15°. $y\sin(xy)$
16°. $\frac{x^2+y^2}{xy}$
17°. xyz
18°. x^4+y^4+6xy

III Matrice jacobienne.

Déterminer, pour chaque fonction, la matrice jacobienne et le déterminant jacobien.

1°. $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$

$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) \end{pmatrix}$

2°. $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\det J_f(x,y) = -2$

3°. $f(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et $\det J_f(r,\theta) = r$

4°. $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1/x \end{pmatrix}$

$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -1/x^2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det J_f(x,y) = 1/x$

5°. $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2yz \\ z+xy \end{pmatrix}$

$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ y & x & 1 \end{pmatrix}$

6°. $f(u,v,w) = \begin{pmatrix} vw \\ uw \\ uv \end{pmatrix}$

$J_f(u,v,w) = \begin{pmatrix} 0 & w & v \\ w & 0 & u \\ v & u & 0 \end{pmatrix}$ et $\det J_f(u,v,w) = 2uvw$

7°. $f(u,v) = \begin{pmatrix} e^{u+v} \\ e^{u-v} \\ uv \end{pmatrix}$

$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} e^{u+v} & e^{u+v} \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \\ v & u \end{pmatrix}$

8°. $f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\sin\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}$

$J_f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \end{pmatrix}$

et $\det J_f(r,\theta,\phi) = -r^2\sin\phi$ en développant par rapport à la troisième ligne.

IV Dérivées secondes.

Déterminer les dérivées partielles secondes des fonctions ci-dessous et indiquer celles pour lesquelles le théorème de Schwarz s'applique.

1°. xy
2°. $x^2+y^2+z^2$
3°. $\ln(x^2+y)$
4°. $\dfrac{xy}{x+y}$
5°. $\sqrt{2xy+y^2}$
6°. $\arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$
7°. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
8°. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

V Limites.

Déterminer les limites suivantes :

1°. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)$
2°. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy$
3°. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$
4°. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
5°. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{xy}$
6°. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{1}{1-x^2-y^2}$
7°. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$
8°. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$
9°. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$
10°. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln|1+x^2y^2|$
11°. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+3z^2}{x^2+y^2+z^2}$
12°. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3,-2,2)} e^{xz}\cos y$

VI Calculs d'opérateurs.

Déterminer le gradient et le laplacien de chacune des fonctions ci dessous au point (x,y) :

1°. $f(x,y) = x^y$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{x}e^{y\ln x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \ln x\ e^{y\ln x}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2})e^{y\ln x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\ln x)^2 e^{y\ln x}$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{(x,y)} = e^{y\ln x}\begin{pmatrix} y/x \\ \ln x \end{pmatrix}$ et

$\Delta f = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2}\right)x^y$

2°. $f(x,y) = \ln(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{(x,y)} = -\dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\Delta f = 0$

3°. $f(x,y) = \arctan(\dfrac{x+y}{1-xy})$

Comme dans l'exemple précédent x et y jouent le même rôle. Il suffit donc de calculer la dérivée partielle en l'une des variables et de permuter la place de x et y pour avoir la seconde :

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}$ et

$\Delta f = -2\left[\dfrac{x}{(1+x^2)^2} + \dfrac{y}{(1+y^2)^2}\right]$

4°. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x}{(\bullet)^{3/2}}$ avec $\bullet = x^2+y^2+z^2$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y}{(\bullet)^{3/2}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-z}{(\bullet)^{3/2}}$

Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}} f_{(x,y)} = -\dfrac{1}{(\bullet)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\Delta f = 0$

Une fonction dont le laplacien est nul est une fonction harmonique.

Déterminer la divergence et le rotationnel de chacune des fonctions ci dessous au point (x, y, z) :

5°. $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^2y \\ 2xy^2 \\ xyz \end{pmatrix}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy$ Donc $\text{div} f_{(x,y)} = 9xy$ et
$\overrightarrow{\text{rot}} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} xz \\ -yz \\ 2(y^2-x^2) \end{pmatrix}$

6°. $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+2y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$ $\text{div} f_{(x,y)} = 6$ et
$\overrightarrow{\text{rot}} f_{(x,y)} = \vec{0}$

7°. $\begin{pmatrix} x^2-yz \\ y^2-zx \\ z^2-xy \end{pmatrix}$ $\text{div} f_{(x,y)} = 2(x+y+z)$ et $\overrightarrow{\text{rot}} f_{(x,y)} = \vec{0}$

8°. $\begin{pmatrix} \sin(xy) \\ 0 \\ \cos(zx) \end{pmatrix}$ $\text{div} f_{(x,y)} = y\cos(xy) - x\sin(xz)$ et
$\overrightarrow{\text{rot}} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 \\ z\sin(xz) \\ -x\cos(xy) \end{pmatrix}$

VII Propriétés des opérateurs.

Démontrer les propriétés suivantes en précisant à quels types de fonctions elles s'appliquent
(on se limitera à la dimension 3).

1°. $\text{grad}(uv) = u\text{grad}(v) + v\text{grad}(u)$

$\dfrac{\partial}{\partial x}(uv) = \dfrac{\partial u}{\partial x}.v + u.\dfrac{\partial v}{\partial x}$
$\Rightarrow \text{grad}(uv) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_k}(uv)\right)_{k=1,\dots n} = u.\text{grad}(v) + v.\text{grad}(u)$

2°. $\text{div}(u\phi) = u\text{div}(\phi) + \phi\text{grad}(u)$

On pose $\phi(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. On a alors

$\text{div}(u\phi) = \text{div}(u\phi_1, u\phi_2, u\phi_3) = u.\text{div}(\phi) + \phi.\text{grad}(u)$

VIII Champs newtoniens.

Un champ vectoriel $\vec{V}$ est un champ de gradient si $\text{rot}\vec{V} = \vec{0}$. C'est un champ de rotationnel si $\text{div}\vec{V} = 0$. Un champ qui possède les deux propriétés précédentes est appelé champ newtonien.

1°. Une particule de charge électrique q située dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ en O génère au point $M(x,y,z)$ un champ vectoriel donné par $\vec{V} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{OM}}{r^3}$ avec $r = OM$ et ϵ_0 permitivité du vide.

En notant $OM = r$ et $\alpha = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0} > 0$ on a

$$\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \vec{V}(x,y,z) = \frac{\alpha}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Démontrer que $\vec{V}$ est un champ de gradient. Soit $U(x,y,z) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Montrer que $\vec{V} = -\text{grad}U$

On calcule la première coordonnée de $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$ les deux autres s'en déduisent par permutation circulaire.

$= \alpha\left(\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{z}{r^3}) - \dfrac{\partial}{\partial z}(\dfrac{y}{r^3})\right)$
$= \alpha\left(\dfrac{-z \times (3/2) \times 2y}{r^6} + \dfrac{y \times (3/2) \times 2z}{r^6}\right) = 0$

Ansi, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \alpha\dfrac{-x}{r^3} = -V_x$ la fonction U est donc le potentiel du champ.

2°. Démontrer que $\vec{V}$ est un champ newtonien. Soit $U(x,y,z) = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Calculer *grad* U et ΔU

Les calculs sont les mêmes, seules les constantes sont différentes ! On a donc les mêmes résultats. Par ailleurs, $\Delta U = 0$ après calculs.

IX Extrema de fonctions de plusieurs variables.

Déterminer les extremas locaux des fonctions définies par :

1°. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

Le seul point où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément est $(0,0)$, qui est donc le seul point critique de la fonction. La matrice hessienne est donc
$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est déjà diagonale et ses valeurs propres sont > 0. Par suite, $(0,0)$ est un minimum pour f.

2°. $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$

Le seul point où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément est $(0,0)$, qui est donc le seul point critique de la fonction. La matrice hessienne est donc
$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est déjà diagonale et ses valeurs propres ne sont pas toutes de même signe. Par suite, $(0,0)$ est un point col.

3°. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$

Le seul point où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément est $(0,0)$, qui est donc le seul point critique de la fonction. La matrice hessienne est donc $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est symétrique donc diagonalisable et ses valeurs propres sont (après calculs) 1 et 3. Par suite, $(0,0)$ est un minimum.

4°. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

5°. $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y - x$

Le seul point où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément est $(0,0)$, qui est donc le seul point critique de la fonction. La matrice hessienne est donc $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est symétrique donc diagonalisable et ses valeurs propres sont (après calculs) $\pm\sqrt{5}$. Par suite, $(0,0)$ est un point col.

6°. $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2yx^2$

Les deux dérivées partielles s'annulent simultanément en $(0,0)$ et $(3/2, 3/2)$ (résoudre le système), qui sont donc les seuls points critiques de la fonction. En $(0,0)$, la matrice hessienne est donc $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on ne peut donc conclure.

En $(3/2, 3/2)$, la matrice hessienne est donc $H = \begin{pmatrix} 9/2 & -9 \\ -9 & 9/2 \end{pmatrix}$ qui est symétrique donc diagonalisable. Les valeurs propres sont $27/2$ et $-9/2$ et $(3/2, 3/2)$ est donc un point col.

7°. $f(x,y) = xy$

8°. $f(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4$

Le seul point où les trois dérivées partielles s'annulent simultanément est $(1,1,1)$, qui est donc le seul point critique de la fonction. La matrice hessienne est donc $H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En $(1,1,1)$ cette matrice est diagonale avec ses valeurs propres positives ; c'est donc un minimum.

9°. $\dfrac{3y}{x^2 + y^2 + 1}$
10°. $x^3 - 6xy + 8y^3$
11°. $x^4 + y^4 - 4xy + 1$
12°. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$
13°. $3xy - x^2y - xy^2$
14°. $(x^2 + y)e^{y/2}$
15°. xye^{-y}
16°. $y^2 - y^4 - x^2$

X Exemples d'équations aux dérivées partielles.

1°. On cherche les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 telles que $\dfrac{\partial g}{\partial t} + s \times g = 0 \ , \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$
et vérifiant en outre $g(0,s) = s \ , \forall s \in \mathbb{R}$

On pose pour cela $f(t) = g(t,s)$ pour s fixé. Déterminer f et en déduire les solutions de l'équation.

On fixe s et l'on résoud l'équation avec $t \to g(s,t)$ ie $g' = -sg$ dont les solutions sont $g(t) = K(s)e^{-st}$
Par ailleurs, $g(0,s) = s = K(s)$ donc les solutions sont

$$g(s,t) = se^{-st}$$

2°. Trouver toutes les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \ , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

On intègre d'abord en x : $\dfrac{\partial f}{\partial y} = K(y)$ qui est une fonction constante en x mais qui dépend de y. On on intègre alors en y : $f(x,y) = \displaystyle\int K(y)dy + H(x)$ où H est une fonction de x. Pour conclure, les solutions de cette équations sont donc les fonctions de la forme

$$f(x,y) = g(x) + h(y)$$

c'est à dire les fonctions qui s'écrivent comme somme d'une fonction de x et d'une fonction de y.

3°. Soit E : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + 2f = 0$. On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $g(r,\theta) = f(x,y)$
Déterminer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f et en déduire les solutions de E.

Pour résoudre cette équation, nous allons devoir effectuer en changement de variables en coordonnées polaires.

$g(r,\theta) = f(x,y)$ avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

$\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$
De la même façon, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Il faut maintenant exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$. On peut faire cela ou bien en inversant les deux équations ci-dessus, ou bien en passant par l'inverse de la matrice jacobienne du changement de variables en polaires. On trouve :

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$

(Faites les calculs des deux façons afin de vous entrainer !!)

La fonction f vérifie l'équation de départ ssi
$r\cos\theta\left(\cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right) + ...$
$... + r\sin\theta\left(\sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right) + 2g = 0$

$\iff r\dfrac{\partial g}{\partial r} + 2g = 0$

Notons $\bar{g} : r \to g(r,\theta)$ à θ fixé. L'équation ci-dessus devient $\bar{g}'/\bar{g} = -2/r$ et en intégrant $\bar{g} = K/r^2$ ie $g(r,\theta) = \dfrac{K(\theta)}{x^2 + y^2}$

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}h(\arctan(y/x))$$

h étant une fonction quelconque de classe C^2

4°. Soit $E: \ x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2-y^2$. On pose $\left\{\begin{array}{l} u=xy \\ v=y/x \end{array}\right.$ et $g(u,v)=f(x,y)$

Déterminer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f et en déduire les solutions de E.

En inversant la fonction ci-dessus, on voit facilement que $x=\sqrt{u/v}$ et $y=\sqrt{uv}$ de sorte que f vérifie l'équation si et seulement si

$$\frac{u}{v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\sqrt{uv}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{u}{v}-uv$$

$$\iff 2u\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{u}{v}-uv$$
$$\iff g(u,v)=\frac{u}{2v}-\frac{1}{2}uv+h(u)$$
$$\iff f(x,y)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+h(xy)$$

h étant une fonction de classe C^2 quelconque.

5°. Soit $E: \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $g(u,v)=f(u+v,u-v)=f(x,y)$

Montrer que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$, $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$ et en déduire les solutions de E.

Posons $\left\{\begin{array}{l} x=u+v \\ y=u-v \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} u=(x+y)/2 \\ v=(x-y)/2 \end{array}\right.$

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial u}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

De la même façon $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

La fonction f vérifie l'équation initiale ssi $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}=0$ ie $g(u,v)=h(u)+k(v)$; les solutions sont donc

$$f(x,y)=h\left(\frac{x+y}{2}\right)+k\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

h,k étant des fonctions quelconques de classe C^2.

XI Equation de la chaleur.

On considère une barre de longueur π et d'épaisseur négligeqble devant sa longueur (elle sera représentée par le segment $[0,\pi]$). Cette barre est à une température initiale $h(x)$ en x avec $h(0)=h(\pi)=0$ (par commodité pour les calculs). Nous cherchons à déterminer l'évolution de la température de la barre au cours du temps.
Il s'agit de trouver les fonctions $u(x,t)$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \bullet\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \forall (x,t)\in D=[0,\pi]\times]0,+\infty] \\ \bullet\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & \forall t\geq 0 \\ \bullet\ u(x,0)=h(x) & \forall x\in[0,\pi] \\ \bullet\ h\in C^1([0,\pi]),\ u\in C^2(D) & \end{array}\right.$$

1°. Une solution est stationnaire si $u(x,t)=f(x)g(t)$.
Montrer qu'alors $\dfrac{f''(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(t)}{g(t)}=\lambda$ avec $\lambda\leq 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=f(x)g'(t)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x)g(t)$

Si u est solution de l'équation, $f(x)g'(t)=f''(x)g(t)$
$\Rightarrow \dfrac{f''(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(t)}{g(t)}$
Une fonction de x égale à une fonction de t pour tout x et tout t est nécessairement constante. Posons λ cette constante. D'après l'équation précédente,

$f''(x)-\lambda f(x)=0$ et $g'(t)-\lambda g(t)=0$

La première équation est une équation homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2-\lambda=0$. Supposons $\lambda>0$. Alors les solutions sont $f(x)=Ae^{\sqrt{\lambda x}}+Be^{-\sqrt{\lambda x}}$
Mais $u(x,0)=f(x)g(0)=h(x)\Rightarrow f(0)=0$ donc $A+B=0$. De même, $f(\pi)=0\Rightarrow A=B=0$ de sorte que la seule solution possible est la fonction nulle. Ceci est donc sans intérêt et l'on peut donc supposer $\lambda<0$

2°. Montrer que $f(x)=\alpha_n\sin(nx)$ et que $g(t)=\beta_n e^{-n^2t}$ avec $\alpha_n,\beta_n\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$

Les solutions de l'équation sur f sont de la forme $A\cos(\alpha x)+B\sin(\alpha x)$ avec $\lambda=-\alpha^2$. Par ailleurs, $f(0)=0\Rightarrow A=0$ et $f(\pi)=0\Rightarrow \alpha\pi=n\pi$, ie $\alpha=n\in\mathbb{Z}$

Les solutions de la première équation sont donc

$$f(x)=\alpha_n\sin(nx)$$

(la constante B dépend de n, nous l'avons donc notée α_n).

De la même façon, on peut résoudre l'équation sur g qui est une équation d'ordre 1 à variables séparables. On a $g'(t)/g(t)=\lambda$ et $\lambda=-\alpha^2=-n^2$

$$g(t)=\beta_n e^{-n^2t}$$

3°. En déduire une famille $u_n(x,t)$ de fonctions solutions du problème.

On dispose d'une infinité de solutions (une pour chaque entier n). L'équation initiale étant linéaire, la somme de deux solutions va être solution. De là à penser qu'une somme infinie de solutions est encore solution (principe de superposition) il n'y a qu'un pas que nous franchissons sans aucune justification (il faudrait démontrer que la série obtenue converge d'une certaine manière, mais ceci est hors programme). La famille de solutions est donc

$$u_n(x,t)=\omega_n\sin(nx)e^{-n^2t}$$

La constante ω_n étant alors le produit des deux constantes précédentes α_n et β_n. Sous réserve de convergence, la fonction suivante est donc aussi solution.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\omega_n\sin(nx)e^{-n^2t}$$

4°. On pose, sous réserve de convergence,
$u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\omega_n\sin(nx)e^{-n^2t}$

On considère la fonction $\tilde{h}$, impaire, définie sur $[-\pi,\pi]$ et vérifiant :
$\tilde{h}(x)=h(x)\ \forall x\in[0,\pi]$ et $\tilde{h}(x)=-h(-x)\ \forall x\in[-\pi,0]$

La fonction $\tilde{h}$ étant 2π périodique et intégrable, elle est développable en série de Fourier et son développement est de la forme (elle est impaire) :

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\tilde{h}) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Par ailleurs, $u(x,0) = h(x) = \tilde{h}(x)$ sur l'intervalle $[0,\pi]$. Par conséquent, les ω_n sont donc les coefficients de Fourier de la fonction $\tilde{h}$ ci-dessus.

5°. Exprimer la solution si $h(x) = 1 \ \forall x \in]0,\pi[$

Il suffit de développer h en série de Fourier et de remplacer les ω_n par les coefs.

XII Equations de Maxwell.

On considère un champ électrique se propageant dans l'espace en fonction du temps. En un point $M(x,y,z)$ et au temps t le champ est represé par la fonction

$E(x,y,z,t) = \phi(x)e^{i(\omega t - z)}\vec{j}$

ω est un réel positif représentant la pulsation. D'après la formule ci-dessus, l'onde se propage suivant l'axe (Oy) et possède une amplitude $\phi(x)$ variant uniquement suivant x. On peut donc considérer cette onde, à t fixé, comme une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$E : (x,y,z) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(x)e^{i(\omega t - z)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le champ magnétique B engendré par E est également une fonction de x, y, z et t et le lien entre E et B est donné par les équations de Maxwell. L'une d'elle indique que

$rotE = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$

1°. Calculer rot$E$ et en utilisant l'équation précédente, démontrer que

$$B(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\phi(x)e^{i(\omega t - z)} \\ 0 \\ \frac{i}{\omega}\phi'(x)e^{i(\omega t - z)} \end{pmatrix}$$

2°. Vérifier les deux équations de Maxwell div$E = 0$ et div$B = 0$

3°. La quatrième équation de Maxwell est $rotB = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}$

c représente la vitesse de propagation de l'onde.

En utilisant cette équation démontrer que ϕ vérifie l'équation différentielle $\phi''(x) + (\dfrac{\omega^2}{c^2} - 1)\phi(x) = 0$

$$\text{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{\omega}\phi(x)e^{i(\omega t - z)} - \frac{i}{\omega}\phi''(x)e^{i(\omega t - z)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \phi''(x) + (\dfrac{\omega^2}{c^2} - 1)\phi(x) = 0$

4°. En posant $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - 1$, résoudre cette équation et en déduire $\phi(x)$

XIII Onde électromagnétique.

On considère une onde transverse électrique qui se propage dans le vide. Cette onde crée un champ électrique en $M(x,y,z)$ qui est défini par la fonction suivante :

$$E : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ (x,y,z) \longrightarrow E(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(z)\cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1°. Expression du champ magnétique $B(x,y,z)$ au point $M(x,y,z)$.

On obtient $B(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\phi'(z)\sin(wt - kx) \\ 0 \\ \frac{k}{\omega}\phi(z)\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$

2°. Vérifier les deux équations de Maxwell div$E = 0$ et div$B = 0$

Le calcul donne bien 0

3°. rot(rot E) = rot $\left(-\dfrac{\partial B}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}$ (rot B)

$= -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}\right) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

Ainsi, d'après la relation précédente, puisque div$E = 0$, il vient $\Delta E = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

Même démonstration pour B.

4°. Nous allons effectuer le calcul de rot(rot$E$) d'une part et celui de grad(div E) $- \Delta E$ d'autre part et constater que ces deux vecteurs sont identiques. Pour cela, il suffit de faire le calcul sur une seule coordonnée. En effet, par permutation circulaire on obtiendra le résultat sur les deux autres coordonnées.

La première coordonnée de rot(rot$E$) est

$\dfrac{\partial^2 E_2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 E_3}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 E_1}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 E_1}{\partial z^2}.$

La première coordonnée de grad(div E) $- \Delta E$ est la même. On en déduit le résultat demandé

XIV Equation des ondes.

Cet exercice est également difficile (et long)...
Le but de ce problème est la résolution de l'équation des ondes à une dimension en utilisant les séries de Fourier. L'équation des ondes a pour forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t)$$

Dans laquelle $v(x,t)$ représente la forme d'une onde au point x et à l'instant t et c représente la célérité de l'onde dans le milieu où elle se propage. Pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide, c représente la vitesse de la lumière. L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles pilotant beaucoup de phénomènes ondulatoires : propagation d'une onde électromagnétique, d'une onde sonore, vibrations d'une corde, etc. Nous allons prendre comme premier exemple celui d'une corde de guitare que nous supposerons modélisée par un segment de longueur π (afin de pouvoir travailler avec des fonctions 2π-périodiques) attachée à ses deux extrémités et lachée au temps $t = 0$ sans vitesse initiale. Le problème revient alors à déterminer toutes les fonctions $v(x,t)$ de classe C^2 vérifiant en outre les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \quad v(0,t) = 0 & \forall t > 0 \\ \bullet \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \phi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet \quad v(x,0) = \psi(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1°. Démontrer que la fonction ci-dessous est solution de l'équation :

$$v(x,t) = \frac{1}{2}(\psi(x+ct)+\psi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\phi(s)ds \quad (1)$$

$\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)$
$= \frac{1}{2}(\psi'(x+ct)+\psi'(x-ct)) + \frac{1}{2c}(\phi(x+ct)-\phi(x-ct))$
$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)$
$= \frac{1}{2}(\psi''(x+ct)+\psi''(x-ct)) + \frac{1}{2c}(\phi'(x+ct)-\phi'(x-ct))$
$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$
$= \frac{1}{2}(c\psi'(x+ct)-c\psi'(x-ct)) + \frac{c}{2c}(\phi(x+ct)+\phi(x-ct))$
$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$
$= \frac{1}{2}(c^2\psi''(x+ct)+c^2\psi''(x-ct)) + \frac{c}{2}(\phi'(x+ct)-\phi'(x-ct))$
$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)$
$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$ et v est donc solution de l'équation

2°. Expliquer sa forme et le terme d'onde progressive.

v est formée de 2 termes. Le premier est la somme d'une onde se propageant vers les $t>0$ et d'une onde se propageant vers les $t<0$, d'où le terme d'onde progressive.

3°. Fixons t et considérons la fonction $x \to v(x,t)$. Soit $\hat{v}(u,t)$ sa transformée de Fourier. En supposant que l'on peut permuter la dérivation avec l'intégrale (ce qui est faux en rêgle général) démontrer que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t)\times e^{-2\pi iux}dx$$

On a $\hat{v}(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)e^{-2\pi iux}dx$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)e^{-2\pi iux}dx$

4°. En utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, démontrer que si $v(x,t)$ est solution de l'équation des ondes, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) + (2\pi uc)^2\times\hat{v}(u,t) = 0$$

En partant de l'équation, on passe à la transformée de Fourier par rapport à la variable x dans les deux membres ; d'après la question précédente et les propriétés de la transformée de Fourier, il vient :

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) = (-2\pi iu)^2\hat{v}(u,t)$
$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{v}(u,t) + (2\pi uc)^2\hat{v}(u,t) = 0$

5°. A u fixé, cette équation est une équation différentielle à variables séparées. La résoudre.

L'équation caractéristique de cette équation est $r^2+(2\pi uc)^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm 2\pi iuc$. Ainsi,

$$\hat{v}(u,t) = \alpha(u)\cos(2\pi uct) + \beta(u)\sin(2\pi uct)$$

où α et β sont des fonctions de u uniquement que l'on peut donc noter $\alpha(u)$ et $\beta(u)$

6°. $v(x,0) = \psi(x) \Rightarrow \hat{v}(u,0) = \hat{\psi}(u) = \alpha(u)$
$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \phi(x) \Rightarrow \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(u,t) = \hat{\phi}(u) = 2\pi uc\times\beta(u) \Rightarrow$

$$\hat{v}(u,t) = \hat{\psi}(u)\cos(2\pi uct) + \frac{\hat{\phi}(u)}{2\pi uc}\sin(2\pi uct)$$

7°. D'après les propriétés des transformées de Fourier, la transformée de Fourier de $x \to \psi(x+ct)$ est $e^{-2\pi iuct}\hat{\psi}(u)$ etcelle de $x \to \psi(x-ct)$ est $e^{-2\pi iuct}\hat{\psi}(u)$.

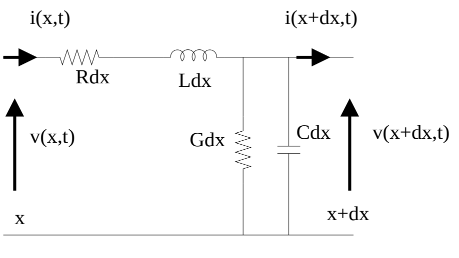
Enfin, la transfo de $\frac{1}{2c}1_{[-ct,ct]}(x)$ est
$\frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct}e^{-2\pi iux}dx = \frac{\sin(2\pi uct)}{2\pi uc}$

8°. La transfo de $x \to (\psi(x+ct)+\psi(x-ct)$ est $2\hat{\psi}(u)\cos(2\pi uct)$ d'après la question précédente. Par ailleurs, la transformée inverse de $\hat{\phi}(u)\times\frac{\sin(2\pi uct)}{2\pi uc}$ est donc $\frac{1}{2c}1_{[-ct,ct]}\star\phi(x)$
D'où l'expression de la solution cherchée.

XV Equation des lignes.

Nous souhaitons étudier la propagation du courant électrique dans une ligne de transmission bifilaire (câble coaxial, fil de cuivre, ou autre). Lorsque la longueur de la ligne est très grande devant la longueur d'onde λ du courant qui la traverse, les lois classiques de l'électrocinétique ne s'appliquent plus et ce sont des phénomènes de propagation d'ondes que l'on observe (c'est Hertz qui a mis en évidence ce phénomène). On décompose la ligne en une infinité de segments de longueur dx (négligeable devant λ) ; chaque segment peut être considéré comme une cellule RLC et la ligne se modélise alors par une succession de cellules RLC identiques, montées en cascade (on parle de circuit à constantes réparties). Sous ces hypothèses, la ligne est caractérisée par :

• R résistance linéique (en $\Omega.m^{-1}$) dûe à la résistance des matériaux.
• L inductance linéique ($H.m^{-1}$) dûe à la présence d'un courant dans la ligne.
• C capacité linéique ($F.m^{-1}$) dûe à la présence d'un isolant entre les conducteurs.
• G admittance linéique ($S.m^{-1}$) dûe aux défauts de l'isolant.



On notera $i(x,t)$ et $v(x,t)$ l'intensité et la tension en un point x de la ligne, à l'instant t. On supposera que ces fonctions sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$

1°. Pour un courant d'une fréquence de 50 Hz présent dans la ligne, déterminer la longueur d'onde λ. Faire de même pour des courants de 300 Hz, 4 KHz et 300 MHz.

On suppose que $c = 3\times10^8$ alors $\lambda = c/\nu$. D'où :

$\nu = 300$ Hz $\Rightarrow \lambda = 1000$ km
$\nu = 4$ KHz $\Rightarrow \lambda = 75$ km
$\nu = 300$ MHz $\Rightarrow \lambda = 1$ m

2°. En utilisant la loi des noeuds et la loi des mailles dans un élément de longueur dx (cf. dessin), établir que $v(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -Ri(x,t) - L\frac{\partial i}{\partial t}(x,t) \\ \\ \frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -Gv(x,t) - C\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \end{array}\right. \quad (\star)$$

En déduire que $v(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions de la même équation aux dérivées partielles donnée ci-dessous et appelée **équation des télégraphistes**.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = RG\times v(x,t) + (RC+LG)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$$

Pour alléger la notation, nous noterons $v(x)$ et $i(x)$ au lieu de $v(x,t)$ et $i(x,t)$. Appliquons la loi des mailles pour rendre compte de la chute de tension sur dx :

$$v(x) = Ldx\frac{\partial i}{\partial t} + Ridx + v(x+dx)$$

$$\Rightarrow \frac{v(x+dx)-v(x)}{dx} = -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t}$$

lorsque $dx \to 0$, on a $\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t}$ (1)

De la même façon, en appliquant la loi des noeuds :

$$i(x) = Cdx\frac{\partial v}{\partial t} + Gdxv(x) + i(x+dx)$$

$$\Rightarrow \frac{i(x+dx)-i(x)}{dx} = -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

Nous avons donc obtenu le système d'équations aux dérivées partielles demandé. Dérivons l'équation (1) par rapport à x ; comme les fonctions sont supposées de classe C^2, le théorème de Schwarz s'applique et l'on peut dériver selon x ou t indépendamment de l'ordre :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R\frac{\partial i}{\partial x} - L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

En injectant ensuite l'équation (2), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RG\times v + RC\times\frac{\partial v}{\partial t} - L\frac{\partial}{\partial t}(-Gv - C\frac{\partial v}{\partial t})$$

qui est l'équation demandée. En injectant l'expression de v, on obtient la même équation pour i.

3°. On considère que la ligne est sans perte lorsque le signal n'y est pas atténué. On a alors $R=0$ et $G=0$. C'est dans ce cas que nous nous placerons par la suite. Etablir alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $i(x,t)$ et $v(x,t)$. Cette équation s'appelle l'**équation des lignes**.

On obtient $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$

On pose $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, qui a la dimension d'une vitesse ; constater que l'on retrouve alors l'équation des ondes :

On a $LC = 1/c^2$ et l'équation devient

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t)$ qui est l'équation des ondes.

4°. Posons $\left\{\begin{array}{l} u = t - x/c \\ s = t + x/c \end{array}\right.$ et $g(u,s) = v(x,t)$

Déterminer l'équation aux dérivées partielles dont g est solution, puis la résoudre. En déduire que la solution de l'équation des lignes est de la forme

$$v(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

F et G étant des fonctions arbitraires de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

La réciproque de la fonction de changement de variables est donnée par $t = (u+s)/2$ et
$x = c(t-u) = c(s-u)/2$. En appliquant la formule de composition des fonctions, nous obtenons :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{c}\frac{\partial g}{\partial s}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial u}\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial x}\right)$$

De la même façon,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial u}\frac{\partial s}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial s}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

Injectons maintenant les deux expressions ci-dessus dans l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \iff \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial u} = 0$$

Cette nouvelle équation est plus simple à résoudre.
Intégrons d'abord par rapport à v, puis par rapport à u :

$$\iff \frac{\partial g}{\partial u} = k(u)$$
$$\iff g(u,s) = \int k(u)du + h(s) = f(u) + h(s)$$
$$\iff v(x,t) = f(t - x/c) + h(t + x/c)$$
$$\iff v(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

F et G étant des fonctions arbitraires (à une variable), de classe C^2 sur l'ensemble des réels. Ceci est la solution la plus générale de l'équation des ondes.

5°. En déduire que $v(x,t)$ et $i(x,t)$ peuvent se voir comme la somme de deux ondes se propageant dans des directions opposées. Quelle est leur vitesse de propagation ? C'est Maxwell qui l'a déterminée le premier.

$F(x-ct)$ représente une onde dont la forme à $t=0$ est $F(x)$. Elle se déplace à la vitesse c de la gauche vers la droite. De même, $G(x+ct)$ représente une onde dont la forme à $t=0$ est $G(x)$. Elle se déplace à la vitesse c de la droite vers la gauche. $v(x,t)$ est somme de ces deux fonctions. La même démo est valable pour $i(x,t)$.

Nous noterons par la suite
$v(x,t) = v_+(x-ct) + v_-(x+ct)$ et
$i(x,t) = i_+(x-ct) + i_-(x+ct)$ où v_+ et i_+ correspondent au courant et à la tension se propageant de la gauche vers la droite tandis que v_- et i_- correspondent au courant et à la tension se propageant de la droite vers la gauche.

6°. Considérons le signal se propageant de la gauche vers la droite. En utilisant le système d'équation $(\star)$ pour une ligne sans pertes, démontrer que

$$\frac{v_+(x-ct)}{i_+(x-ct)} = Z$$

où Z est une constante positive indépendante de x et de t que l'on exprimera en fonction de L et de C. Cette constante (importante) s'appelle l'**impédance caractéristique** de la ligne.

Démontrer que la même façon que

$$\frac{v_-(x-ct)}{i_-(x-ct)} = -Z$$

On constate ainsi que le courant et la tension se propageant de gauche à droite sont de même signe, alors que le courant et la tension se propageant de droite à gauche sont de signe contraire.

Il faut revenir au système des deux équations. Considérons l'onde se déplaçant vers la droite ; le courant est $i_+(x-ct)$ et la tension $v_+(x+ct)$. On a :

$\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = v'_+(x-ct) = -L\frac{\partial i}{\partial t}$

$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = -cv'_+(x-ct) - = \frac{1}{C}\frac{\partial i}{\partial x}$

Intégrons la première équation par rapport à t et la seconde par rapport à x ; il vient :

$i(x,t) = \frac{1}{cL}v_+(x-ct) + k(x)$

$i(x,t) = cCv_+(x-ct) + l(t)$

Pour que ces deux expressions soient égales pour tout x et tout t, il est nécessaire que $k(x) = l(t) = cte$. On peut choisir cette constante nulle (les courants constants ne se propagent pas). Nous avons alors :

$i_+(x-ct) = cCv_+(x-ct)$

et puisque $cC = \frac{1}{\sqrt{LC}}C = \sqrt{\frac{L}{C}}$, on a

$\frac{v_+(x-ct)}{i_+(x-ct)} = Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$

En opérant de la même façon avec l'onde rétrograde :
$\frac{v_-(x+ct)}{i_-(x+ct)} = -Z$

7°. On suppose maintenant que l'une des extrémités du fil de longueur L est reliée à une résistance R au point $x = L$. En appliquant les lois de Kirchhoff à l'extrémité du câble, exprimer la tension réfléchie v_- et le courant réfléchi i_- en fonction de la tension incidente v_+ et du courant incident i_+. En déduire que

$$\frac{u_-}{u_+} = \frac{R-Z}{R+Z} \text{ et } \frac{i_-}{u_+} = -\frac{R-Z}{Z(R+Z)}$$

Que se passe-t-il si $R < Z$? $R > Z$? $R = Z$? A quoi sert l'adaptation d'impédance dans un câble ?

Plaçons-nous en $x = L$. En ce point, la tension et l'intensité dans le fil sont reliées par la loi d'Ohm :
$v(L,t) = Ri(L,t)$ et $v(L,t) = v_+(x-ct) + v_-(x+ct)$,
$i(L,t) = i_+(x-ct) + i_-(x+ct)$

$v_+ + v_- = R(i_+ + i_-)$, $v_+/i_+ = Z$ et $v_-/i_- = -Z$
$\Rightarrow (R-Z)i_+ = (-Z-R)i_- \Rightarrow \frac{i_+}{i_-} = \frac{Z+R}{Z-R}$

On en déduit alors les deux relations demandées.

Si $R < Z$, la tension incidente et la tension réfléchie sont de signe contraire.
Si $R > Z$, la tension incidente et la tension réfléchie sont de même signe.
Si $R = Z$, la tension réfléchie est nulle ; il n'y a pas d'écho et le câble est adapté. L'adaptation d'impédance sert donc à éviter le phénomène d'écho.

8°. Nous supposons maintenant que le fil de longueur L est relié à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$ à des résistances nulles. Pour déterminer l'expression de la tension $v(x,t)$ en tout point du fil, nous allons utiliser la méthode de la séparation des variables : On suppose que $v(x,t) = f(x)g(t)$. Nous admettrons le fait que la solution de l'équation des ondes avec les conditions initiales imposées par le fil est unique. Ainsi, s'il existe une solution sous la forme $f(x)g(t)$, se sera la seule solution possible du problème.

Démontrer que si $v(x,t) = f(x)g(t)$ alors f et g sont solutions de deux équations différentielles que l'on résoudra. Démontrer alors que $v(x,t)$ peut se mettre sous la forme

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1}\left(a_n\sin(\frac{nc\pi t}{L}) + b_n\cos(\frac{nc\pi t}{L})\right)\sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Expliquer l'apparition d'ondes stationnaires dans le câble. A quoi correspondent les coefficients a_n et b_n ?

La technique de résolution est la même que pour l'équation de la chaleur (cf. exercice correspondant).

9°. On se sert maintenant du fil comme d'une antenne radio : l'une de ses extrémités est reliée au sol tandis que la seconde est laissée libre. A la base du fil, une source délivre un courant de la forme $i(x,t) = f(x)\sin(\omega t)$. Déterminer le courant $i(x,t)$ en tout point de l'antenne, puis calculer les valeurs de x où son amplitude est maximale et minimale. Exprimer la longueur d'onde λ en fonction de la longueur L de l'antenne. Déterminer ensuite l'expression du potentiel $v(x,t)$ tout au long de l'antenne. Conclure. Voilà, l'exercice est fini.

XVI Concours ENSEA 2000.

Soit h une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xyh(xy)$

1°. $\frac{\partial f}{\partial y} = xh(xy) + xyh'(xy)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = xh(xy) + x^2yh'(xy)$

2°. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2h'(xy) + xy^3h''(xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2h'(xy) + y^2h'(xy) + y^3xh''(xy) = 2y^2h'(xy) + y^3xh''(xy)$

3°. Si $\Delta f = 0$, alors h vérifie l'équation différentielle $ty''(t) + 2y'(t) = 0$

$\Delta f = (2y^2 + 2x^2)h'(xy) + (y^3x + x^3y)h''(xy)$
$\Delta f = 0 \iff 2h'(t) + th''(t) = 0$ avec $t = xy$

4°. Si $\Delta f = 0$, alors $h'(t) = \frac{K}{t^2}$

$h''/h' = -2/t \Rightarrow \ln h' = -2\ln t + K \Rightarrow h'(t) = K/t^2$

5°. Les seules solutions f définies sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant $\Delta f = 0$ sont les fonctions constantes.

On a alors $h(t) = \alpha/t + \beta$ ie
$\Delta f = 0 \iff f(x,y) = \dfrac{\alpha}{xy} + \beta$