



1 Développements limités en 0 à l'ordre 3

- 1°. $\sqrt{x+1}$ 2°. $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 3°. e^{-x} 4°. $ch x$ 5°. $sh x$
 6°. $th x$ 7°. $\frac{1}{1+x^2}$ 8°. $\arctan x$ 9°. $\arcsin x$ 10°. $argsh x$
 11°. $e^{\cos x}$ 12°. $\ln(1 + \sin x)$ 13°. $\frac{x}{x^2 - x + 1}$ 14°. $\ln(1 - x + x^2)$ 15°. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$
 16°. $x \sin x - \sin^2 x$ 17°. $\frac{\arctan x}{x}$ 18°. $\frac{1}{\cos x}$ 19°. $e^{sh(x)}$ 20°. $\frac{x}{\sin x}$

2 Développements en $x \neq 0$

- 1°. \sqrt{x} à l'ordre 2 en $x = 1$ 2°. $\frac{\ln x}{x^2}$ à l'ordre 2 en $x = 1$ 3°. $\sqrt{(x+1)(x+2)}$ à l'ordre 2 en $+\infty$
 4°. $\tan x$ à l'ordre 3 en $x = \pi/4$ 5°. $(1+x)e^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$ 6°. $\arctan x$ à l'ordre 3 en $x = 1$

3 Calculs de limites

- 1°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + sh x - 2x}{x^5}$ 2°. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cos \frac{1}{x} - x)$ 3°. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ 4°. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$
 5°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ 6°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$ 7°. $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$ 8°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$
 9°. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \frac{x-1}{x}$ 10°. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ 11°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{1 - e^{2x}}$ 12°. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x)$
 13°. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ 14°. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x}$ 15°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 16°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$
 17°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ 18°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x})$ 19°. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{x+x^2}$

4 Etudier les branches infinies

- 1°. $3\sqrt{x^2+1} + 5x$ 2°. $(1+x)e^{\frac{1}{x}}$ 3°. $\frac{x^2-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ 4°. $x^2 \ln \frac{x-1}{x}$ 5°. $\frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ 6°. $e^{-1/x} \sqrt{1+x^2}$
 7°. $e^{-1/x} \sqrt{1+x+x^2}$

5 Positions relatives de courbes

1°. Etudier la position relative, au voisinage de $x = 0$, des courbes représentatives de $\sin x$, $\arctan x$ et $argsh x$.

2°. Même question avec e^x , $\frac{2+x}{2-x}$ et $\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$.

6 Equation de tangente

Pour chacune des fonctions ci dessous, déterminer un développement limité au voisinage de 0 et en déduire une équation de la tangente en $x = 0$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

- 1°. $\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 2°. $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 3°. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$

7 Etude de courbes

7.1 $f(x) = x^2 \arctan \frac{1}{1+x}$

- 1°. Déterminer le domaine de définition de f .
- 2°. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 2 en $+\infty$.
- 3°. En déduire les limites aux bornes et les branches infinies de la courbe de f .
- 4°. Etudier les variations de h (on pourra poser $f'(x) = x \times h(x)$ et étudier la fonction h).
- 5°. Déterminer la représentation graphique de h .

7.2 $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$

On pose $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

- 1°. Déterminer le domaine de définition de f .
- 2°. f est-elle continue en 0? Dérivable en 0?
- 3°. Déterminer les variations de f .
- 4°. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.
En déduire l'équation de la tangente à la courbe en $x = 1$. Préciser leur position relative.
- 5°. Déterminer le développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. En déduire les branches infinies de la courbe et leur position relative.
- 6°. La courbe admet-elle des points d'inflexion? Est-elle convexe? Concave?
- 7°. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

7.3 $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

- 1°. Déterminer le domaine de définition de f et ses limites aux bornes du domaine.
- 2°. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
- 3°. En déduire les asymptotes obliques et leur position par rapport à la courbe.
- 4°. Etudier les variations de f et la représenter.
- 5°. La courbe admet-elle un centre ou un axe de symétrie?

7.4 $f(x) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}$

Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$.

- 1°. Démontrer que si x est racine de P alors $\frac{1}{x}$ l'est aussi. En déduire les racines de P en posant $t = x + \frac{1}{x}$.
- 2°. Effectuer l'étude complète de f .

8 Fonctions diverses

1°. $\sqrt[3]{\frac{x^2(x-5)}{x+3}}$ 2°. $\sqrt{\frac{x^3+2x^2+3x}{x-4}}$ 3°. $\frac{3x-2}{3(x-1)}\sqrt{|x|}$ 4°. $\frac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$ 5°. $x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

9 Concours 2002

Soient $a, b, c > 0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$