1 Développements limités en 0 à l'ordre 3

1°. $\sqrt{x+1} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

2°. $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$

3°. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

4°. $ch\ x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

5°. $sh\ x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

6°. $th\ x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

7°. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3)$

8°. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ en $\int$ le DL de $\frac{1}{1+x^2}$

9°. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ en $\int$ le DL de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10°. $argsh\ x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ en $\int$ le DL de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

11°. $e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3)$

12°. $\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

13°. $\frac{x}{x^2-x+1} = x + x^2 + o(x^3)$
ou bien par division suivant les puissances croissantes ou bien en composant deux DL :
$x \times \frac{1}{1+(x^2-x)} = x\left[1 - (x^2-x) + \frac{1}{2}(x^2-x)^2 + etc...\right]$

14°. $\ln(1-x+x^2) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ en $\int$

15°. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$

16°. $x\sin x - \sin^2 x = \frac{1}{6}x^4 + o(x^5)$

17°. $\frac{\arctan x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$

18°. $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ car de la forme $\frac{1}{1+x}$

19°. $e^{\ sh(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

20°. $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$

2 Développements en $x \neq 0$

1°.
$\sqrt{x} = \sqrt{1-t} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

2°. $\frac{\ln x}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

3°. $\sqrt{(x+1)(x+2)}$ on pose $u = 1/x$
$= \sqrt{(1+\frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}(2+\frac{1}{u})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{u}(1+u)^{1/2}(1+2u)^{1/2}$
$= x + \frac{3}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{3}{16x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

4°. $\tan x = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + o((x - \frac{\pi}{4})^2)$

$\tan x = \tan(u - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan u - 1}{\tan u + 1}$

5°. $(1+x)e^{\frac{1}{x}} = x + 2 + \frac{3}{2x} + \frac{2}{3x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

6°.
$\arctan x = \arctan(1-u) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + o((x-1)^2)$

3 Calculs de limites

1°. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + sh\ x - 2x}{x^5} = \frac{1}{60}$

2°. $\lim_{x\to +\infty} (x\cos\frac{1}{x} - x) = \lim_{x\to +\infty} (-\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})) = 0$

3°.
$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp(\ln\cos x) = \lim_{x\to 0} (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)) = 1$

4°. $\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x\to +\infty} \exp(x\ln(1+\frac{1}{x})) = e$

5°. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} (2 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)) = 2$

6°. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \lim_{x\to 0} (\frac{x}{3} + o(x^2)) = 0$

7°. $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} (\frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x-1) + o((x-1)^2)) = \frac{1}{e}$

8°. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} (-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3)) = -\frac{1}{2}$

9°. $\lim_{x\to +\infty} x^2 \ln\frac{x-1}{x} = \lim_{x\to +\infty} (-x - \frac{1}{2} + o(\frac{1}{x})) = -\infty$

10°.
$\lim_{x\to +\infty} (x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})) = \lim_{x\to +\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x})) = \frac{1}{2}$

11°. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{1-e^{2x}} = \lim_{x\to 0} (-\frac{3}{2} + \frac{3x}{2} + o(x^2)) = -\frac{3}{2}$

12°.
$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x) = \lim_{x\to +\infty} (\frac{3}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{3}{16x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = \frac{3}{2}$

13°.
$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} (\frac{1}{2} - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)) = \frac{1}{2}$

14°.
$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} + \frac{5}{6}\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + o(\bullet)) = \sqrt{2}$

15°. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} (1 - \frac{x^2}{6} + o(\bullet)) = 1$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}$

17°. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$

18°. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}) = \frac{1}{2}$

19°. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{x+x^2} = -\dfrac{1}{2}$

4 Etudier les branches infinies

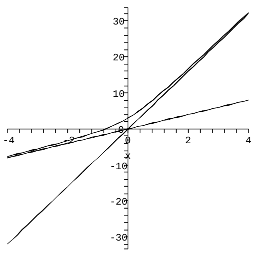
1°. $3\sqrt{x^2+1}+5x = 8x + \dfrac{3}{2x} + o(\dfrac{1}{x^2})$ en $+\infty$

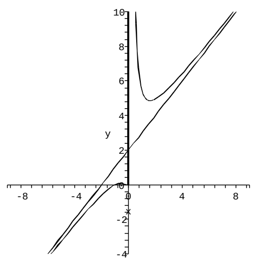
$3\sqrt{x^2+1}+5x = 2x - \dfrac{3}{2x} + o(\dfrac{1}{x^2})$ en $-\infty$

$\Delta : y = 8x$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe est au dessus car alors $3/2x > 0$. $\Delta' : y = 2x$ est asymptote en $-\infty$ et la courbe est au-dessus car $-3/2x > 0$ si $x < 0$

2°. $(1+x)e^{\frac{1}{x}} = x + 2 + \dfrac{3}{2x} + o(\dfrac{1}{x})$

La courbe admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ d'équation $y = x + 2$. La courbe est au-dessus en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$. Voici les courbes des deux premières questions :



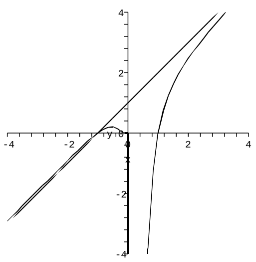


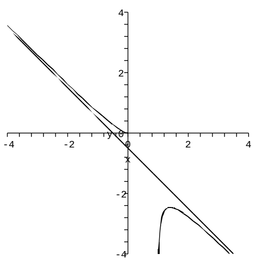
3°. $\dfrac{x^2-1}{x}e^{\frac{1}{x}} = x + 1 - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{5}{6x^2} + o(\dfrac{1}{x^2})$

$\Delta : y = x + 1$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe est en dessous en $+\infty$ et au dessus en $-\infty$. Elle admet aussi une asymptote verticale en 0

4°. $x^2 \ln \dfrac{x-1}{x} = -x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3x} + o(\dfrac{1}{x})$

Ainsi, $\Delta : y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$. Elle est au dessus en $+\infty$ car $-1/3x < 0$ et en dessous en $-\infty$





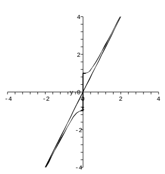
5°. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} = 2x + \dfrac{1}{6x} + o(\dfrac{1}{x})$

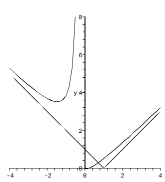
6°. $e^{-1/x}\sqrt{1+x^2} = x - 1 + \dfrac{1}{x} + o(\dfrac{1}{x})$ en $+\infty$

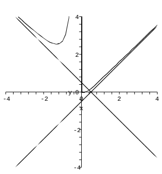
$e^{-1/x}\sqrt{1+x^2} = -x + 1 - \dfrac{1}{x} + o(\dfrac{1}{x})$ en $-\infty$

7°.

$e^{-1/x}\sqrt{1+x+x^2} = \begin{cases} x - \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x}) \text{ en } +\infty \\ -x + \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x}) \text{ en } -\infty \end{cases}$







5 Positions relatives de courbes

1°. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$

$\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^6)$

$argsh\ x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$

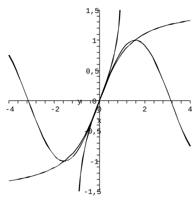
Les trois fonctions sont impaires ; les positions relatives seront donc inversées de part et d'autre de 0. Considérons donc $x > 0$; le DL est valable localement pour une valeur de x suffisamment proche de 0. Alors $\arctan x < \sin x < argsh\ x$

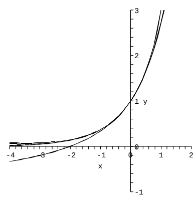
2°. $f(x) = e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$

$g(x) = \dfrac{2+x}{2-x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{8} + \dfrac{x^5}{16} + o(x^5)$

$h(x) = \dfrac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{144} + o(x^5)$

$g(x) > f(x) > h(x)$





6 Equation de tangente

1°. $\begin{cases} f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(x) = 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

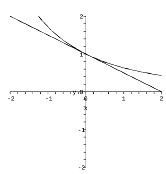
$f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$ d'où $\Delta : y = 1 - x/2$ est tangente à la courbe en 0 et est en-dessous de cette courbe puisque $x^2/6 > 0$

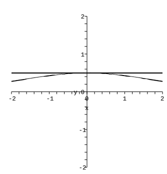
2°.$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(x) = \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$

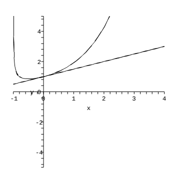
$f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$ d'où $\Delta : y = 1/2$ est tangente à la courbe en 0. La courbe est toujours en dessous car $-x^2/12 > 0$.

3°. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} - \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$

d'où $\Delta : y = 1 + \frac{x}{2}$ est tangente à la courbe en $x = 0$. La courbe est au-dessus de la tangente car $3x^2/8 > 0$







7 Etude de courbes

7.1 $f(x) = x^2 \arctan \dfrac{1}{1+x}$

1°. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-1\}$

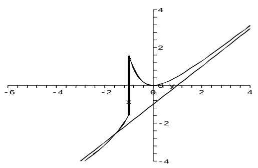
2°. $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{3x} + o(\dfrac{1}{x})$

3°. $\Delta : y = x - 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$; en ∞, la courbe est au dessus et en $-\infty$, la courbe est en dessous. $f(x)$ tend vers l'infini en $\pm\infty$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$
et il n'y a donc pas d'asymptote verticale.

4°. $f'(x) = x \times h(x)$ avec
$h(x) = \frac{2x^2}{x^2+2x+2} \arctan \frac{1}{x+1} \ \arctan \frac{1}{x+1}$ est positif si et seulement si $x > -1$
(car arctan est impaire) et la fraction $\frac{2x^2}{x^2+2x+2} > 0$
Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x < -1$ ou $x > 0$

5°. Représentation graphique de f :



7.2 $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$

On pose $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

2°. f a une limite infinie à gauche de 0 ; elle n'est ni continue ni dérivable.

3°. $f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-1/x} > 0$ et donc f est croissante.

4°. On pose $u = x - 1 \Rightarrow f(x) = (u+2)e^{\frac{-1}{1+u}}$
$f(x) = \frac{1}{e}(u+2)(1 + (u-u^2) + \frac{1}{2}(u-u^2)^2 + o(u^2))$
$= \frac{3}{e}(x-1) + \frac{2}{e} + o((x-1)^2)$
$\mathcal{D} : y = \frac{3x}{e} - \frac{1}{e}$ est tangente à la courbe en $x = 1$
Par contre, nous n'avons pas poussé le DL assez loin pour connaître sa position par rapport à la courbe.

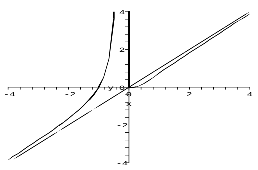
5°. $f(x) = x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

$\Delta : y = x$ est asymptote oblique en $\pm\infty$. En $+\infty$, la courbe est en dessous et en $-\infty$ la courbe est au dessus (en regardant le signe de $\frac{1}{3x^2}$)

6°. $f''(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-1/x}$ $x = 1$ est donc un point d'inflexion.

La question 4° permettait aussi de trouver ce point d'inflexion en constatant que la position de la courbe changeait en $x = 1$ par rapport à la tangente.

7°. Courbe représentative de f :



7.3 $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$

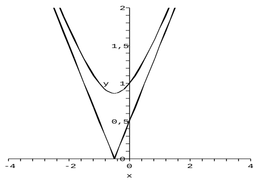
1°. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $1 + x + x^2 > 0$ $\forall x$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

2°. $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$ en $+\infty$
$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$ en $-\infty$

$\Delta : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique en $+\infty$ et
$\Delta' : y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique en $-\infty$. La courbe reste au dessus des asymptotes car $3/8x > 0$ si $x > 0$ et $-3/8x > 0$ si $x < 0$

4°. $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1+2x}{\sqrt{1+x+x^2}} > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$
La fonction admet un minimum de $3/4$ en $x = -1/2$

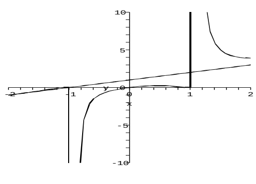
5°. La courbe admet-elle un centre ou un axe de symétrie ?
Oui, c'est la droite $x = -1/2$ car en posant $X - 1/2 = x$ et $Y = y$ on a
$y = f(x) \iff Y = \sqrt{1 + (X-1/2) + (X-1/2)^2)}$
$\iff Y = \sqrt{X^2 + 3/4}$ qui définit une fonction paire ; d'où l'axe de symétrie.



7.4 $f(x) = xe^{\frac{x}{x^2-1}}$

Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$.
1°. $P(\frac{1}{x}) = \frac{P(x)}{x^4}$ et P est donc un polynôme symétrique.
Ainsi, si x est racine, $1/x$ aussi. Par ailleurs, en posant $t = x + 1/x$, alors $t^2 = x^2 + 1/x^2 + 2$ et l'on a :
$P(x) = x^2(t^2 - t - 4) \Rightarrow t = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$
Puis
$t = x + 1/x \Rightarrow x^2 - xt + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\left[1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{17}}\right]$
2°. Etude complète de f :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-1; 1\}$ $f'(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - x^3 - x}{(x^2-1)^2}$
Et donc f' est positive à l'extérieur de l'intervalle $[\alpha, \beta]$.
La fonction tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$, elle tend vers ∞ à droite de -1 et à droite de 1 et vers 0 à gauche de -1 et de 1.
En posant $u = 1/x$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} o(\frac{1}{x})$ et
$\Delta : y = x + 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$. La courbe est au dessus en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$



7.5 Fonctions diverses

1°. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2(x-5)}{x+3}}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{-3\}$

$f'(x) = \frac{2(x-3)(x+5)}{3\sqrt[3]{x(x-5)^2(x+3)^4}}$
La fonction est croissante sur $[-5, -3[\cup]-3, 0] \cup [3, +\infty[$

2°. $\sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{x-4}}$

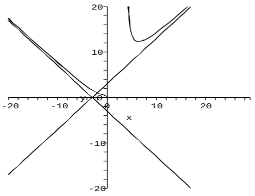
$\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

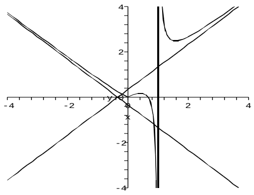
3°. $\dfrac{3x-2}{3(x-1)}\sqrt{|x|}$

$f(x) = \sqrt{|x|}(1 + \dfrac{1}{3x} + o(\dfrac{1}{x}))$ et possède deux paraboles asymptotes $\sqrt{x}$ en $+\infty$ et $\sqrt{-x}$ en $-\infty$

4°. $\dfrac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

5°. $x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)$





8 Concours 2002

$a^x + b^x + c^x = e^{x\ln a} + e^{x\ln b} + e^{x\ln c} = 3 + x(\ln a + \ln b + \ln c) + o(x) = \bullet$

$\left(\dfrac{\bullet}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{\bullet}{3})\right) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1 + x\ln(\sqrt[3]{abc}) + o(x))\right)$

$= \exp\left(\dfrac{1}{x}(x\ln\sqrt[3]{abc} + o(x))\right) \longrightarrow \sqrt[3]{abc}$

On peut généraliser à n termes positifs $a_1, ..., a_n$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^x\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$$