Méthodes de résolution

I. Equations à variables séparables

1°. $y' = y$ 2°. $y' - y = 0$ 3°. $y' + 2y = 0$ 4°. $xy' - y = 0$

5°. $y' - xy = 0$ 6°. $y' + y\sin x = 0$ 7°. $y' = y^2$ 8°. $y'\sin x - 2y\cos x = 0$

9°. $y'e^y - e^x - x = 0$ 10°. $(1+x^2)^2y' + 2x + 2xy^2 = 0$ 11°. $(x^2+1)y' = xy$ 12°. $y^2y' = x^2$

13°. $xy'\ln x = (1 + 3\ln x)y$ 14°. $y'(x+2) = y - 1$ 15°. $x^2y' - (2x-1)y = 0$ 16°. $y' + 4y = 1$

17°. $(1+x^2)y' = 1 + y^2$ 18°. $\sqrt{1+x^2}y' - y^2 = y + 1$ 19°. $y' = e^{x+y}$ 20°. $x^2y' + y(1-y) = 0$

II. Equations linéaires d'ordre 1

1°. $y' + y = x$ 2°. $y' + y = x^2$ 3°. $y' + y = e^x$ 4°. $y' + y = \sin x$

5°. $(1+x^3)y' - x^2y = x^2$ 6°. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$ 7°. $y' - y = 1$ 8°. $y'x - 2y = \ln x$

9°. $y' + y\cos x = \cos x$ 10°. $y' + 2y = e^{-x}$ 11°. $2xy' + 2y = \dfrac{1}{1+x}$ 12°. $y' - y\tan x = -\cos^2 x$

13°. $y' + 4y = x^2$ 14°. $(e^x - 1)y' + e^xy = 1$ 15°. $(1+x^2)y' + y = \arctan x$ 16°. $y' - y\tan x = \frac{1}{1+\cos x}$

17°. $xy' - 2y = x^5$ 18°. $2xy' - y = \sqrt{x}$ 19°. $y' = |x - y|$ 20°. $y' + y = 2e^x + 2\sin x$

III. Autres types d'équations d'ordre 1

1°. Equations homogènes : $y' = f(\dfrac{y}{x})$ que l'on résoud en posant $y = ux$. Résoudre :

1.1. $(x^2 + y^2) - xyy' = 0$ 1.2. $xy' = y - x\cos^2\dfrac{y}{x}$

2°. Equations de Bernoulli : $y' + g(x)y = h(x)y^\alpha$ où g et h sont des fonctions continues sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si $\alpha = 1$, c'est une équation linéaire. Sinon on pose $z = 1/y^{\alpha-1}$ et l'on se ramène à une équation linéaire en z :

2.1. $y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$ 2.2. $xy' + y = xy^3$ 2.3. $y' + y\tan x + y^2 = 0$

IV. Equations linéaires d'ordre 2

1°. $y'' + 6y' = 2$ 2°. $y'' - 6y' - 7y = 2e^{-x}$ 3°. $y'' + 4y = 0$ 4°. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$

5°. $y'' - y = x^2 + x + 1$ 6°. $y'' - 2y' + y = (6x+4)e^x$ 7°. $y'' = x + 1$ 8°. $y'' + 2y' + 2y = \sin x$

9°. $y'' + 2y' + y = x$ 10°. $y'' - 3y' + 2y = 1$ 11°. $y'' - 4y' + 5y = 0$ 12°. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin x$

13°. $y'' + 2y' + 2y = 0$ 14°. $y'' + 2y' + 2y = 5e^x$ 15°. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2$ 16°. $y'' + 2y' + 2y = 5e^x + 2x^2$

V. Equations incomplètes

1°. Résoudre $y'' + \dfrac{x}{1+x}y' = 0$ en posant $u = y'$

2°. Résoudre de même $y'' - \dfrac{1}{x}y' = 1$

VI. Equations fonctionnelles

On souhaite trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant $f'(x) = f(\dfrac{1}{x})$

1°. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$.
2°. On pose $u(x) = y(e^x)$. Montrer que u est solution de l'équation $u'' - u' + u = 0$.
3°. La résoudre et en déduire les solutions du problème.
4°. Déterminer toutes les fonctions vérifiant $f'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Etudier la dérivabilité des solutions.
5°. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(1-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

VII. BE 1998

On considère les équations différentielles E_1 : $y'' + 4y' + 5y = \cos t$ et E_2 : $y'' + 4y' + 5y = te^t$
1°. Déterminer α et $\beta \in \mathbb{R}$ pour que $\alpha\cos t + \beta\sin t$ soit une solution de E_1.

2°. Résoudre l'équation E_1, puis l'équation E_2.
3°. Déterminer la solution de E_2 vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
4°. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = \cos t + te^t$

VIII. BE 1999

On considère, pour $a \in \mathbb{R}$ les équations différentielles $\left\{ \begin{array}{l} E: \ y'' - 2ay' + (a^2+1)y = \cos t \\ H: \ y'' - 2ay' + (a^2+1)y = 0 \end{array} \right.$
1°. Donner la solution générale de l'équation H.
2°. Déterminer une solution particulière de E.
3°. Si $a \neq 0$, déterminer l'unique solution de E vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$

IX. BE 2001

1°. Trouver les solutions de l'équation $y' - \ln xy = x^x$

2°. Parmi toutes ces solutions, déterminer celle qui satisfait la condition initiale $y(1) = 1 + \dfrac{1}{e}$

X. BE 2002

Considérons les équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{ll} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0 & (H) \\ y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \sin(2t) & (E_1) \\ y''(t) - 2y(t) + 2y(t) = 2e^t \sin t & (E_2) \end{array} \right.$$

1°. Résoudre ces trois équations.
2°. Déterminer la solution de E_2 qui satisfait $y(0) = y'(0) = 0$
3°. Existe-t-il une solution de E_2 vérifiant $y(0) = y(\pi) = 0$

XI. BE 2003

On considère l'équation différentielle $E_1: \ x(2-x)y'(x) + (1-x)y(x) = 1$ sur l'intervalle $I =]0, 2[$
On note $y_1(x)$ la solution de cette équation qui satisfait $y_1(1) = 1$
Résoudre cette équation différentielle.

XII. BE 2006

On considère les équations différentielles suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 1/4)y(x) = 0 & (E_1) \\ x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - a)y(x) = 0 & (E_2) \end{array} \right.$$

1°. On suppose que $y(x)$ est solution de E_1. Démontrer qu'alors $u(x) = \sqrt{x} \times y(x)$ est solution d'une équation différentielle que l'on résoudra.
2°. En déduire l'ensemble des solutions de E_1.
3°. Parmi ces solutions, quelles sont celles pour lesquelles $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x)$ existe ?

On pose $v(x) = \displaystyle\int_0^x t \sin t \, dt$ et $z(x) = \dfrac{v(x)}{x\sqrt{x}}$

4°. Calculer ces fonctions et montrer que $z(x)$ est solution de E_2 pour une certaine valeur de a.

XIII. BE 2007

On considère les deux équations différentielles suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -8t^2 & (E_1) \\ y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -9e^{-2t} & (E_2) \end{array} \right.$$

1°. Résoudre E_1, puis E_2.
2°. Déterminer les solutions de E_1 vérifiant $y(0) = 0$
3°. Déterminer la solution de E_2 vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$

XIV.

On souhaite résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\cos(2x) \quad (\star)$

1°. Montrer que la fonction $y_0(x) = \dfrac{1}{8}\left[\cos(2x) + 2x\sin(2x)\right]e^{-x}$ est solution de $(\star)$

2°. En déduire toutes les solutions de l'équation initiale.

Applications.

XV. Circuits RLC.

Loi d'Ohm, loi de Lenz, lois de Kirchhoff

Rappelons la loi d'Ohm qui indique qu'aux bornes d'une résistance, $v(t) = Ri(t)$ où R est la résistance, $v(t)$ la tension aux bornes et $i(t)$ le courant qui traverse la résistance. Aux bornes d'une inductance, la loi de Lenz donne par ailleurs $v(t) = L\frac{di}{dt}(t)$ où L est la valeur de l'inductance. Enfin, aux bornes d'un condensateur, $\frac{dv}{dt}(t) = \frac{1}{C}i(t)$ où C est la valeur de la capacité.

Rappelons également les lois de Kirchhoff sur les circuits :
• Loi des mailles : la somme des tensions partielles dans une maille de circuit est nulle.
• Loi des noeuds : la somme des courants arrivant à un noeud est égale à la somme des courants partant de ce noeud.

Cellule RC

Considérons la figure ci-dessous qui représente un montage RC en série. $e(t)$ est la tension à l'entrée de la cellule et $v(t)$ est la tension aux bornes du condensateur. Il s'agit d'étudier $v(t)$ en fonction de $e(t)$.

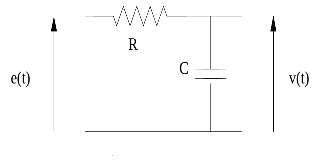


Figure 1 – Cellule RC

1°. Démontrer que l'équation qui pilote ce circuit est donnée par : $RC\frac{d}{dt}v(t) + v(t) = e(t)$
2°. Résoudre l'équation homogène associée.

3°. On suppose que $e(t) = 0$ si $t < 0$ et que $e(t) = V$ est une tension constante pour $t \geq 0$.
Par ailleurs, le condensateur impose à la tension d'être continue à ses bornes, de sorte que $v(0) = 0$. Déterminer une solution particulière de l'équation, puis déduire la solution complète de l'équation avec second membre. Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction. Démontrer que la solution peut se mettre sous la forme $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ représentant le régime transitoire et le régime permanent.

4°. La constante de temps du circuit est $\tau = RC$ qui s'exprime en secondes. Quelle est sa signification ?

5°. Déterminer l'expression du courant dans le circuit en fonction du temps.

6°. Calculer le travail $W = \int_0^{+\infty} Ri(t)^2 dt$ dissipé par effet Joule dans la résistance.

7°. Déterminer $v(t)$ si $e(t) = V\cos\omega t$ est une tension sinusoïdale de pulsation ω.

Circuit RLC

Considérons la figure ci-dessous qui représente un montage RLC. $e(t)$ est à nouveau la tension à l'entrée du circuit et $v(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.

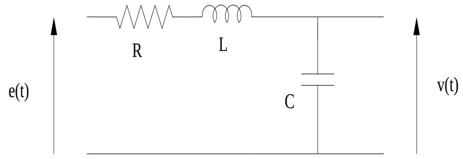


Figure 2 – Circuit RLC

1°. Démontrer que l'équation qui pilote ce circuit est donnée par : $LC\frac{d^2}{dt^2}v(t) + RC\frac{d}{dt}v(t) + v(t) = e(t)$

2°. En posant $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ qui est la pulsation du circuit et $\alpha = \frac{R}{2L}$ qui est le facteur d'amortissement, établir l'équation homogène associée.

3°. Résoudre cette équation dans les trois cas $\alpha > \omega$, $\alpha < \omega$ et $\alpha = \omega$.

4°. On suppose que $e(t) = V$ est constante au cours du temps. La tension devant être continue aux bornes du condensateur, $v(0) = 0$; de même, l'intensité dans l'inductance devant être continue $\frac{\partial}{\partial t}v(0) = 0$. Enfin, après un temps suffisamment long, le régime permanent du circuit impose $\lim_{t\to+\infty} v(t) = V$

A l'aide de toutes ces indications, déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre ainsi que la solution complète de l'équation. Dans chacun des trois cas de la question précédente, étudier la forme de la solution.

XVI. Cellule RL

Un circuit formé d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R montées en série est alimenté par une tension $e(t)$. On admet que l'intensité du courant $i(t)$ dans le circuit est solution de l'équation différentielle

$$L\frac{di}{dt}(t) + R\ i(t) = e(t)$$

On supposera $i(t)$ dérivable et $i(0) = 0$

1°. Résoudre cette équation lorsque $e(t) = E$, constante indépendante du temps.
2°. Résoudre cette équation lorsque $e(t) = \sin(\omega t)$, avec $\omega > 0$ représentant la pulsation du circuit.

XVII. Equation de Schrödinger.

Au début du vingtième siècle, les physiciens ont montré que la physique à l'échelle atomique échappait aux lois de la mécanique classique. Pour étudier, par exemple, le mouvement des électrons autour d'un atome, il faut faire appel à la mécanique quantique. On ne peut plus représenter les trajectoires des particules, mais seulement donner leur probabilité de présence dans un volume donné. En 1926, Erwin Schrödinger a établi l'équation suivant qui porte son nom :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

dans laquelle :
- E est l'énergie de la particule et m sa masse au repos.
- $V(x)$ est le potentiel électrique au point x.
- $\hbar = h/2\pi$ et h est la constante de Planck qui vaut $6,62.10^{-34}J.s^{-1}$.
- $\psi(x)$ est la fonction d'onde de la particule. Son carré sera proportionnel à la probabilité de trouver la particule dans un élément de volume donné et ψ doit vérifier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x)dx = 1$

On se propose de résoudre l'équation de Schrödinger dans un cas très simple : On suppose que la particule se trouve dans un puits de potentiel infini de largeur L (ie V est nul pour $x \in [0, L]$ et est infini à l'extérieur de cet intervalle). On cherche alors toutes les fonctions $\psi(x)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation.

1°. Démontrer que $\psi(x) = 0$ si $x \notin [0, L]$ et $\psi(x) = \alpha\cos(\lambda x) + \beta\sin(\lambda x)$ si $x \in [0, L]$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et λ constante que l'on exprimera en fonction de m, E et $\hbar$.

2°. En utilisant la continuité de ψ en 0 et L, démontrer que l'énergie E de la particule est obligatoirement quantifiée et ne peut prendre comme valeurs que $E_n = \dfrac{n^2h^2}{8mL^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3°. On suppose maintenant que la particule possède une énergie négative E et se trouve dans un puits de potentiel $V(x)$ défini par : $\begin{cases} V(x) = -V \text{ si } |x| < a \\ V(x) = 0 \text{ si } |x| \geq a \end{cases}$
On suppose également que $\psi(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2 sur tout intervalle ne contenant pas $\pm a$.
Déterminer l'expression de $\psi(x)$ dans les trois régions définies ci-dessus ($x < -a$, $-a \leq x \leq a$ et $x > a$) dans l'hypothèse où $V + E > 0$.

XVIII. Désintégration d'atomes radioactifs.

Les atomes d'un élément radioactif se désintègrent au cours du temps. Soit $N(t)$ le nombre d'atomes à l'instant t ; on peut montrer que le nombre de désintégration à t est proportionnel à la quantité d'atomes $N(t)$, le coefficient de proportionnalité λ ne dépendant que de la nature de l'élément. On notera N_0 le nombre d'atomes à $t = 0$.

1°. Démontrer que $N(t)$ est solution de l'équation différentielle $N'(t) + \lambda N(t) = 0$.
2°. Résoudre cette équation différentielle.
3°. La période d'un élément radioactif (appelée aussi demi-vie) est la durée T au bout de laquelle la moitié des atomes s'est désintégrée. Exprimer T en fonction de λ.
4°. L'activité $\alpha(t)$ d'un élément est le nombre moyen de désintégration par seconde. Ainsi, $\alpha(t) = -N'(t)$ et $\alpha(t)$ se mesure en Becquerels (1Bq représente une désintégration par seconde). Exprimer $\alpha(t)$ en fonction de λ et N_0.
5°. Le carbone 14 est un élément radioactif présent dans tous les tissus et les os des êtres vivants. Sa demi-vie est de 5730 ans. Afin de connaître l'age d'un fossile ou d'ossements, on mesure la quantité de carbone 14 présente et on la compare à la quantité moyenne présente dans des tissus jeunes.
Déterminer la valeur de λ pour le carbone 14 et calculer le pourcentage restant dans un fossile vieux de 10000 ans, puis de 100000 ans.

Cette technique a été utilisée par Rutherford il y a un peu plus d'un siècle pour évaluer l'âge de la terre et celui du système solaire. L'élément radioactif utilisé pour cette méthode est le rubidium-87 qui se désintègre en strontium-87 avec une demi-vie de 5×10^{10} années. Ces éléments se trouvent piégés dans certaines roches terrestres et dans certaines météorites. Ils permettent d'évaluer l'âge de la terre à $4,5$ milliards d'années environ.

XIX. Modèles de croissance d'une population.

1°. Un organisme se développe par division cellulaire : le nombre $N(t)$ de cellules augmente d'un facteur λ à chaque intervalle de temps dt. On suppose que le nombre initial de cellules est 1 et que la fonction $N(t)$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ (la croissance est régulière). Déterminer l'équation différentielle modélisant cette croissance et en déduire $N(t)$ en la résolvant.

2°. Le modèle précédent s'applique à beaucoup de problèmes d'évolution. En 1798, le révérend anglais Thomas Malthus a publié un essai appelé “an essay on the principle of population” et est ainsi devenu l'initiateur des sciences de la démographie. Le modèle Malthusien d'une population est défini comme suit : On suppose que la population $N(t)$ à un instant t augmente proportionnellement à $N(t)$, le coefficient de proportionnalité r étant constant (il représente la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité).
Etablir l'équation différentielle vérifiée par $N(t)$ et la résoudre.

3°. Le modèle malthusien est parfois trop simpliste et ne prend pas en compte différents facteurs. On peut par exemple supposer que le taux de croissance n'est pas constant ou bien introduire un facteur modélisant la capacité d'accueil du milieu (espace limité, nourriture, limites biologiques, ...). En 1838, François Verhulst a proposé un modèle de croissance appelé modèle logistique et piloté par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN}{dt}(t) = r(K - N(t))N(t)$$

Dans ce modèle, le taux d'accroissement $r(K - N(t))$ dépend d'un facteur K appelé *capacité biotique* et de la population elle même. Résoudre cette équation différentielle et en déduire la *formule logistique* qui exprime $N(t)$ en fonction de r, K et t. Tracer l'allure de cette fonction et expliquer sa forme. Calculer $\lim_{t\to+\infty} N(t)$ en fonction de K et $N(0)$ (on pourra distinguer les cas $0 < N(0) < K$ et $N(0) > K$).

4°. Le modèle de Gompertz propose une évolution pilotée par l'équation $\dfrac{dN}{dt}(t) = -rN(t)\ln(\dfrac{N(t)}{K})$

Résoudre cette équation en posant $u(t) = \ln N(t)$, étudier et expliquer l'allure de $N(t)$ selon que $0 < N(0) < K$ ou $N(0) > K$.

XX. Antenne parabolique (problème du miroir parabolique).

Un rayon incident arrivant parallèlement à l'axe d'une parabole est réfléchi vers le foyer de la parabole. A l'inverse, un signal émis depuis le foyer de la parabole sera transmis sous la forme d'ondes parallèles à l'axe de la parabole. Ceci explique l'intérêt des miroirs paraboliques et des antennes ayant la forme d'un paraboloïde de révolution. On se propose de démontrer que la parabole est la seule courbe possédant cette propriété.

On se donne un repère orthonormé du plan et l'on considère une courbe $y(x)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : un rayon incident parallèle à (Oy) et frappant la courbe en $M(x, y)$ est réfléchi vers le point O. Soit H le point d'intersection entre ce rayon et l'axe (Ox). Soit P un point de (HM) se trouvant en dessous de M. Soit Q le point d'intersection entre la tangente à la courbe en M et l'axe (Oy).

Soit θ l'angle d'incidence (angle entre le rayon incident et la normale à la courbe en M). D'après les lois de Descartes, θ est aussi l'angle de réflection entre la normale et la droite (OM). Soit α l'angle entre la rayon incident et la tangente à la courbe en M

1°. Démontrer que $\tan 2\theta = x/y$ et que $\alpha = \widehat{PMQ}$. En déduire que $\tan\alpha = dx/dy$.
2°. Démontrer que $\alpha + \theta = \pi/2$ et en déduire que $\tan\theta = y'(x)$.
3°. Exprimer $\tan 2\theta$ en fonction de $\tan\theta$ et en déduire que $y(x)$ est solution de $xy'^2 + 2yy' - x = 0$
4°. Cette équation différentielle peut-être vue comme une équation du second degré dont l'inconnue est y'. Démontrer alors que $y' = \dfrac{1}{x}(y + \sqrt{x^2 + y^2})$
5°. En posant $u(x) = y(x)/x$, montrer que $u(x) = \sinh(\ln x + k)$
6°. En déduire l'expression de $y(x)$

XXI. Loi de refroidissement de Newton.

1°. La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. Si l'on met une théière à 100 $^\circ C$ dans la neige, démontrer que sa température $\theta(t)$ à t vérifie :

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = -\alpha \times \theta(t)$$

En déduire l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t.

2°. Si l'on est à l'intérieur, la température de l'air n'est pas constante car l'air chauffe en refroidissant les objets qui s'y trouvent. On admet que la température ambiante est de la forme $u(t) = 100 - 90\exp(-\beta t)$ jusqu'à ce que $u(t) = \theta(t)$; ensuite, la température ambiante reste constante. Démontrer que $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = -\alpha(\theta(t) - u(t))$$

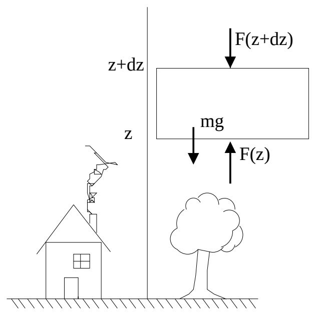
Résoudre cette équation différentielle.

3°. Lorsque $\alpha = 0,1$ et $\beta = 0,005$, déterminer la temps au bout duquel l'équilibre thermique est atteint et la température ambiante à cet instant.

XXII. Pression atmosphérique.

Rappels de thermodynamique

La pression P est le rapport d'une force par la surface sur laquelle elle s'exerce : $P = F/S$
La masse volumique ρ d'un corps est le quotient de sa masse par son volume : $\rho = m/V$
La loi des gazs parfaits s'énonce de la façon suivante $PV = nRT$ avec V volume de gaz, T température du gaz, n nombre de moles de gaz et R constante des gazs parfaits.
On aura également besoin de certaines des données numériques ci-dessous :



- $R = 8,32\ J.K^{-1}.mol^{-1}$ constante des gazs parfaits.
- $P_0 = 10^5\ Pa$ pression atmosphérique au niveau de la mer.
- $M = 29\ g.mol^{-1}$ masse molaire de l'air.
- $g = 9,8\ m.s^{-2}$ constante de la gravitation universelle.
- $T = 273\ K$ température moyenne de l'atmosphère.

Modèle de l'atmosphère terrestre

On considère l'air atmosphérique comme étant un gaz parfait en équilibre sous l'action de la pression et de la force de pesanteur. Nous cherchons à étudier sa pression en fonction de l'altitude.

1°. En considérant une couche de surface S comprise entre les altitudes z et $z + dz$, montrer que le bilan des forces extérieures agissant sur l'air est $mg + SP(z) - SP(z + dz) = 0$
En déduire que $P(z)$, pression de l'air à l'altitude z, vérifie l'équation différentielle $\dfrac{dP}{dz} = -\rho g$

2°. Si l'on suppose que l'air est un fluide incompressible, ρ ne dépend pas de z. Dans ce cas, résoudre l'équation différentielle.

3°. On suppose maintenant que l'atmosphère terrestre est isotherme avec pour température $T = 273\ K$. Exprimer ρ en fonction de P, M, R et T puis résoudre l'équation différentielle du 1°. Montrer que

$$P(z) = P_0 e^{-z/H}$$

où H est une constante qui s'appelle le *facteur d'échelle* et que l'on exprimera en fonction de M, g, R et T.
Quelle est la dimension de H ? Calculer une valeur approchée de H.

XXIII. Décantation de l'eau.

La décantation est l'une des étapes du traitement de l'eau pour la rendre potable. Le principe consiste à laisser couler au fond du bassin les particules en suspension dans l'eau. Une fois déposée au fond, ces particules forment une boue qui sera évacuée ultérieurement. On suppose que le bassin a pour hauteur h. Soit (Ox) l'axe vertical dirigé vers le haut, avec son origine O placée au fond du bassin. On considère également les données suivantes :

- $g = 9,8\ m.s^{-2}$ constante de la gravitation universelle.
- $\mu = 10^3\ kg.m^{-3}$ masse volumique de l'eau.
- $\nu = 1.31 \times 10^{-6}\ SI$ viscosité dynamique de l'eau.
- $e = 1.6 \times 10^{-19}\ C$ charge élementaire de l'électron.
- $\epsilon_0 = 8,84 \times 10^{-12}\ SI$ permitivité du vide.
- $k = 1,38 \times 10^{-23}\ J.K^{-1}$ constante de Boltzmann.

1°. Une particule de volume V est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède. Donner l'expression de ces deux forces en fonction de V, μ et μ_s où μ_s est la masse volumique de la particule. A quelle condition cette particule va-t-elle couler au fond du bassin ?

2°. On suppose maintenant que la particule est sphérique de rayon R et animée d'une vitesse $\vec{v}$. Elle subit alors une force de frottement appelée *force de Stokes*, inversement proportionnelle à la vitesse et donnée par $\vec{F_S} = -6\pi\mu\nu R\vec{v}$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, démontrer que la position $x(t)$ de la particule à l'instant t vérifie l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) + \frac{6\pi\nu R}{Vd}x'(t) + (\frac{1}{d} - g) = 0$$

avec $d = \mu_s/\mu$ densité de la particule.

3°. Résoudre cette équation différentielle et en déduire que la particule atteint une vitesse limite de chute $\vec{v}_L$ que l'on exprimera à l'aide de R, ν, g et d. Retrouver cette vitesse sans résoudre d'équation différentielle.

4°. Calculer la vitesse de décantation de particules de sable de masse volumique $2,65\ g.cm^{-3}$ et de rayon $R = 50\ \mu m$, puis $R = \ 5\mu m$ et enfin $R = 0,5\ \mu m$.

La couleur et la *turbidité* d'une eau de surface sont dûes à la présence de particules sphériques de très faible diamètre (inférieur à 1 μm). L'ensemble du liquide et des particules en suspension est appelé *colloïde*. Ces particules sont chargées en surface et leur répulsion électrostatique assure une grande stabilité à leur suspension. On ne peut donc directement les éliminer par décantation. La *coagulation* est un processus qui permet de déstabiliser le colloïde est neutralisant les charges de surface grâce à l'adjonction d'ions de charges opposée. Les particules s'agrègent alors et sont rapidement éliminées par décantation.

Soit $\vec{E}(x)$ le champ électrique dans la solution et $\rho(x)$ la charge volumique dans la solution (charge électrique par unité de volume). On admet que le champ vérifie l'équation de Poisson $d^2E/dx^2 = -\rho/\epsilon$ avec $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ (ici $\epsilon_r = 80$). La solution contient des ions positifs et négatifs de charge $q = \pm Z \times e$. Le nombre d'ions de chaque sorte par unité de volume est donné par

$$nq \times \exp\left(-\frac{qV(x)}{kT}\right)$$

n est une constante qui représente le nombre d'ions par unité de volume très loin de la surface du liquide et l'exponentielle s'appelle le *facteur de Boltzmann* (c'est une quantité très importante en thermodynamique).

5°. Démontrer que $\rho(x) = -2nZe \times sh\left(\frac{ZeV(x)}{kT}\right)$ et en déduire l'équation différentielle vérifée par $V(x)$

6°. On suppose que le potentiel $V(x)$ est petit devant kT/e. Simplifier alors l'équation différentielle et la résoudre; on pourra poser $\lambda = \left(\frac{\epsilon kT}{2nZ^2e^2}\right)^{1/2}$

7°. Dans le cas où l'hypothèse précédente n'est pas vérifiée, intégrer l'équation différentielle pour obtenir une relation entre $V(x)$ et $V'(x)$. Montrer alors que le champ électrique est donné par

$$E(x) = \left(\frac{8nkT}{\epsilon}\right)^{1/2} \times \mathrm{sh}\left(\frac{ZeV(x)}{2kT}\right) \qquad \forall x > 0$$

8°. Exprimer alors $V(x)$ en fonction de x.

NB. Cet exercice est tiré d'une composition de physique au concours d'entrée à l'école polytechnique.

XXIV. Suspension colloïdale.

On s'intéresse au comportement de particules colloïdales chargées dans une solution. Cette solution contient des ions monovalents positifs et négatifs qui vont se placer au voisinage des surfaces chargées pour former un écran. On supposera les surfaces planes et les champs ne varieront que suivant la direction (Oz).

La distribution des ions dans un champ électrostatique est donnée par la relation de Boltzmann. Si l'on note n_+ la concentration d'ions positifs, n_- celle des ions négatifs et n_∞ la concentration en l'infini, alors

$$n_+(z) = n_\infty \exp\left(-\frac{e\psi(z)}{kT}\right) \quad n_-(z) = n_\infty \exp\left(\frac{e\psi(z)}{kT}\right)$$

$\psi(z)$ est le potentiel électrostatique à la hauteur z. Ce potentiel est solution de l'équation de Poisson-Boltzmann :

$$\psi(z)'' + \frac{1}{\epsilon}\rho(z) = 0 \qquad (\bullet)$$

avec $\rho(z) = e(n_+(z) - n_-(z))$ distribution de charge (e est la charge d'un ion).

1°. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par ψ
2°. Dans l'hypothèse où le potentiel est faible, montrer que cette équation peut être approchée par $\psi''(z) - \lambda^2\psi(z)$ où λ est une constante que l'on exprimera en fonction de e, n_∞, ϵ, k et T. Vérifier que $1/\lambda$ a la dimension d'une longueur.

3°. On suppose que la surface chargée est placée en $z = 0$ et que le potentiel $\psi(z)$ et sa dérivée sont nuls en l'infini. Résoudre cette équation différentielle en fonction du champ ψ_0 au niveau de la surface et de λ.

4°. On s'intéresse maintenant à la distribution entre deux surfaces planes chargées, situées en $z = -D/2$ et $z = D/2$. Nous supposerons qu'entre ces deux surfaces, le potentiel $\psi(z)$ est la somme des potentiel de chaque surface et donc que

$$\psi(z) = \psi_0 \exp(-\lambda(z + D/2)) + \psi_0 \exp(\lambda(z - D/2))$$

Afin de respecter la neutralité électrique totale dans l'intervalle entre les deux surfaces, la charge doit être nulle pour $z \in [-D/2, D/2]$. Si σ est la charge de surface, on doit donc avoir

$$2\sigma + \int_{-D/2}^{D/2} \rho(z)dz = 0$$

En utilisant l'équation ($\bullet$), montrer que l'équation précédente conduit à une relation liant ψ' en $-D/2$ et $D/2$. En déduire alors la valeur de ψ_0 en fonction de $\sigma, \lambda, \epsilon$ et D.

5°. Calculer la valeur de $\psi(z)$ à la hauteur du plan médian $z = 0$. On notera ψ_m cette valeur. Montrer que si λD est très grand devant 1, alors

$$\psi_m = \frac{2\sigma}{\lambda\epsilon} \exp(-\frac{\lambda D}{2})$$

6°. Lorsque l'on approche les deux surfaces chargées, la concentration ionique augmente dans l'intervalle. La pression osmotique est définie par $P = \lambda T(c_D - c_\infty)$ où c_D est la concentration totale des ions au niveau du plan médian lorsque les deux surfaces sont séparées d'une distance D ; autrement dit, $c_D = (n_+(z) + n_-(z))\rfloor_{z=0}$. De même, $c_\infty = 2n_\infty$.

Calculer $c_D - c_\infty$ en fonction de ψ_m et montrer que si ψ_m est petit, alors $c_D - c_\infty = \dfrac{e^2\psi_m^2}{(kT)^2}$

En déduire l'expression de la pression osmotique.

NB. Ce problème provient d'un examen du Master "matière molle" de l'Université d'Orsay.

XXV. Trajectoire d'un projectile.

On laisse tomber, sans vitesse initiale, un objet de masse m. On néglige la résistance de l'air. On suppose que l'axe (Ox) est dirigé vers le bas avec comme origine O, position initiale de l'objet. Soit $x(t)$ la position à t de l'objet.

1°. Etablir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution puis la résoudre. On laisse tomber deux objets de même forme mais de masses différentes. Lequel touche le sol en premier ?

2°. On suppose maintenant que la résistance de l'air provoque une force de frottement $\vec{F} = -\lambda \vec{v}(t)$ où $\vec{v}(t)$ est la vitesse à t de l'objet et λ une constante positive. Répondre aux mêmes questions que précédemment. Montrer que l'objet atteint une vitesse limite que l'on déterminera.

On considère un projectile lancé depuis le sol (supposé horizontal) à une vitesse initiale $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec celui-ci. Le projectile n'est soumis qu'à son poids et l'on néglige la résistance de l'air.

3°. Faire un dessin en choisissant convenablement un repère orthonormé et établir le bilan des forces appliquées en un point $M(x(t), y(t))$ de la trajectoire. En appliquant le principe fondamental de la dynamique et en projetant cette relation sur les axes (Ox) et (Oy) en déduire les équations différentielles dont $x(t)$ et $y(t)$ sont solutions.

4°. Résoudre ces équations différentielles, puis en déduire l'équation du mouvement sous la forme $y = f(x)$. De quel type de courbe s'agit-il ?

5°. Déterminer la portée du tir (distance entre le point de tir et le point de retombée) en fonction de v_0, g et α. A quel angle de tir cette portée est-elle maximale ?

XXVI. Mouvement d'un pendule.

On considère un pendule fixé en O, de longueur L, dont le poids est négligeable et au bout duquel est attaché une masse m. La masse est soumise à la tension $\vec{T}$ du fil et à son poids (on néglige la résistance de l'air). On écarte la masse de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 \in]0, \pi[$ puis on la laisse osciller sans vitesse initiale. Soit $M(t)$ la position à t de la masse, H le point de passage de la masse à la verticale et $x(t)$ la longueur de l'arc de cercle $HM(t)$

1°. Etablir le bilan des forces et appliquer le principe fondamental de la dynamique. Projeter la relation obtenue sur la tangente en $M(t)$ à la trajectoire de la masse.

2°. En déduire l'équation différentielle dont $\theta(t)$ est solution.

3°. En supposant que $\theta(t)$ reste petit, montrer que $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$

4°. Résoudre cette équation et en déduire la période des oscillations. Constater, comme l'a fait en premier Galilée au dix-septième siècle, que cette période T ne dépend ni de m ni de θ_0.

5°. A partir de maintenant, nous ne supposons plus que θ est petit et nous revenons à l'équation initiale.
Nous posons $v(t) = L\theta'(t)$. Montrer que $\frac{d}{dt}(v^2/2) = Lg\frac{d}{dt}(\cos\theta)$

6°. Montrer que $\displaystyle\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{L}}t$ et justifier la convergence de cette intégrale.

7°. Montrer que $\displaystyle T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\theta_0}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}$ avec $k = \sin^2(\theta_0/2)$

8°. Démontrer que T est une fonction croissante de θ_0 et déterminer $\lim\limits_{\theta_0 \to 0^+} T$

XXVII. Mouvement d'un ressort.

On note g l'accélération de la pesanteur. Un ressort de masse négligeable et de constante de raideur $k > 0$ est fixé en un point. A l'autre extrémité de ce ressort est attachée une masse m. On choisit comme origine O du repère, la position au repos du ressort. On néglige dans un premier temps les forces de frottements. La masse est donc soumise à deux forces : son poids et la force de rappel du ressort. On rappelle que celle-ci est proportionnelle à l'allongement $x(t)$ du ressort (écart entre la position à t de la masse et la position au repos) et tend à ramener le ressort vers sa position d'équilibre. L'axe (Ox) est dirigé vers le bas et coïncide avec l'axe du ressort. On écarte la masse de sa position au repos, puis on la lâche sans vitesse initiale depuis cette position x_0, à l'instant $t = 0$.

1°. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour démontrer que $mx''(t) + kx(t) = mg$

2°. Résoudre cette équation différentielle. Démontrer que le mouvement est périodique et exprimer la période T en fonction de g, m et k. Déterminer la position d'équilibre en fonction de ces mêmes constantes.

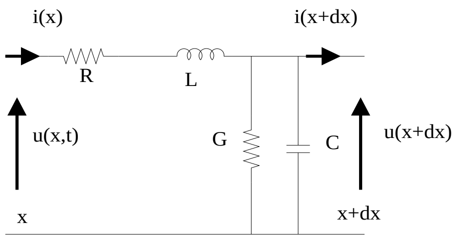
3°. On plonge maintenant la masse dans un liquide (eau, huile, etc.) afin de construire un amortisseur. La force de frottement créée est proportionnelle à la vitesse et sera toujours de direction opposée à celle-ci. On la notera $-cx'(t)$. Déterminer l'équation différentielle pilotant ce système.

4°. Démontrer que la forme des solutions dépend du signe de $c^2 - 4km$ et les expliciter dans les trois cas.

XXVIII. Modèle d'une ligne de transmission.

Une ligne de transmission (câble coaxial, fil de cuivre, ou autre) peut être considérée comme un circuit RLC : on considère une portion de ligne élémentaire de longueur infiniment petite dx. La ligne est alors caractérisée par :

- R résistance linéique (en $\Omega.m^{-1}$) dûe à la résistance des matériaux.
- L inductance linéique ($H.m^{-1}$) dûe à la présence d'un courant dans la ligne.
- C capacité linéique ($F.m^{-1}$) dûe à la présence d'un isolant entre les conducteurs.
- G admittance linéique ($S.m^{-1}$) dûe aux défauts de l'isolant.



On considère que la ligne est sans perte lorsque le signal n'y est pas atténué. On a alors $R = 0$ et $G = 0$. C'est dans ce cas que nous nous placerons par la suite.

1°. En utilisant la loi des mailles et la loi des noeuds pour les impédances complexes, démontrer que la tension complexe U et l'intensité complexe I (de pulsation ω) dans la portion de ligne considérée vérifient

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -LC\omega^2 U \quad ; \quad \frac{d^2I}{dx^2} = -LC\omega^2 I$$

2°. Résoudre ces équations différentielles et exprimer l'impédance $Z = U/I$ de la ligne en un point x de celle-ci.

3°. On suppose que le câble a une longueur l, qu'il débute par un récepteur d'impédance Z_e et se termine par un récepteur d'impédance Z_s. Démontrer que le signal dans le câble est la superposition de deux fonctions représentant une onde incidente et une onde réfléchie. Caractériser leur vitesse de propagation.

4°. Le coefficient de réflection du câble est le rapport des impédances réfléchies et incidentes. Calculer ce coefficient.

5°. Que se passe-t-il si la ligne est infinie ?

XXIX. Problème de la chaînette et ponts suspendus.

La chaînette est la forme que prend un fil suspendu entre deux points et soumis uniquement à son poids et à la tension du fil, en supposant que celui-ci est infiniment mince, homogène et sans raideur.

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé en choisissant O pour que le point le plus bas de la chaînette ait une abscisse nulle et l'on considère un élément infinitésimal de fil compris entre les points M d'abscisse x et $M + dM$ d'abscisse $x + dx$. L'abscisse curviligne entre M et $M + dM$ sera notée ds. Nous noterons g la constante de la gravitation universelle et λ la masse linéïque du fil (masse par unité de longueur) : Le poids de l'élément de fil est donc $m = \lambda ds$.

Soit $\vec{T}(x)$ la tension du fil en M d'abscisse x et $\vec{T}(x + dx)$ la tension en $M + dM$. Soit $\alpha(x)$ l'angle entre $\vec{T}$ et l'horizontale. On admettra que l'absence de raideur du fil assure que la tension $\vec{T}$ est tangente au fil en M.

Soit enfin T_0 l'intensité de la tension au point d'abscisse 0.

1°. Faire un dessin et appliquer le théorème fondamental de la statique pour montrer que $\vec{T}(x + dx) + \vec{T}(x) = \lambda g ds \vec{j}$
2°. En projetant cette relation sur l'axe (Ox) démontrer que $T(x) \cos \alpha(x) = T_0$ est une constante indépendante de x.
3°. En projetant la relation sur (Oy) en déduire une seconde équation puis démontrer que

$$\tan \alpha(x + dx) - \tan \alpha(x) = \frac{\lambda dsg}{T_0}$$

4°. Faire apparaître sur un dessin les quantités dx, dy et ds, puis démontrer que $\dfrac{d}{dx}(\tan \alpha(x)) = \dfrac{\lambda g}{T_0} \dfrac{ds}{dx}$

5°. Posons $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Déduire de ce qui précède la relation $\dfrac{d}{dx}(y') = \lambda g \sqrt{1 + (y')^2}\ dx$
(On pourra considérer, en justifiant, que lorsque dx tend vers 0, $ds^2 = dx^2 + dy^2$)

6°. Intégrer cette équation et en déduire l'équation de la courbe $y = f(x)$ suivie par la chaînette.

7°. Supposons maintenant que la masse d'un élément infinitésimal de fil ne soit plus égale à λds mais à λdx. Cela signifie que la masse est répartie horizontalement sur toute la longueur du fil. On suppose donc que le fil ne repose plus sur ses deux extrémités, mais que la suspension est répartie sur sa longueur. Dans ces conditions, déterminer l'équation de la courbe obtenue.

Galilée pensait que la chaînette formait un arc de parabole. C'est J. Bernoulli qui a démontré en 1690 que ce n'était pas le cas et qui a effectué la démonstration précédente. La différence entre un arc de parabole et un cosinus hyperbolique n'est d'ailleurs pas évidente à voir pour de petites longueurs. En étudiant ces deux courbes sur une même longueur, on constate que la parabole est plus pointue.

Les câbles aériens, les ponts en corde, les colliers, les voiles de bateaux et de nombreux édifices architecturaux ont une forme de chaînette. Par contre, les câbles porteurs d'un pont suspendu sont des arcs de parabole. En effet, un câble porteur est relié au tablier du pont par de nombreux fils d'acier qui transmettent au câble les poids et les tensions de l'ouvrage. La charge est alors uniformément répartie sur la longueur du câble.

XXX. Le parachute.

Un parachutiste saute d'un avion avec une vitesse initiale $\vec{v}_0(t)$. On ne s'intéresse qu'à la composante verticale de cette vitesse. On admet que l'équation satisfaite par la vitesse est

$$mv'(t) + qv(t) = mg$$

dans laquelle g est l'accélération de la pesanteur, q est une constante de freinage dépendant du parachute et m la masse du parachutiste (et du parachute).

1°. Résoudre cette équation différentielle et montrer l'existence d'une vitesse de chute limite v_L.
2°. On pose $g = 10\ ms^{-2}$, $m = 100\ kg$ et $q = 25\ SI$. Déterminer la solution de l'équation vérifiant $v(0) = 5\ ms^{-1}$