MATHEMATIQUES TD N° 8 : INTEGRALES MULTIPLES.

R&T Saint-Malo - 2ndee année - 2009/2010

I Intégrales doubles.

1°. $\displaystyle\int\int_P \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}$ $P = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\}$

2°. $\displaystyle\int\int_P \sin(x+y)dxdy$ $P = \{(x,y)/\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$

3°. $\displaystyle\int\int_P \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$ $P = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\}$

4°. $\displaystyle\int\int_P e^{\frac{x}{y}}dxdy$ $P = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ,\ y \le 1\ ,\ y \ge x\}$

5°. $\displaystyle\int\int_D xydxdy$ $D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ ,\ x+y \le 1\}$

6°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{xy}$ $D = \{(x,y)/\ 1 \le x \le e\ ,\ 1 \le y \le e\}$

II Changement de variables.

1°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ $D = \{(x,y)/\ x^2+y^2 \le 1\}$

2°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+xy}$ $D = \{(x,y)/\ 4 < x^2+y^2 < 16\}$

3°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ $D = \{(x,y)/\ x^2+y^2 \le 1\}$

4°. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $D = \{(x,y)/\ y \ge 0\ ,\ x^2+y^2-2x \le 0\}$

5°. $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ $D = \{(x,y)/\ x^2+y^2-2y \ge 0\ ,\ x^2+y^2-1 \le 0\}$

6°. $\displaystyle\int\int_D \frac{xy}{(1-x)^2}dxdy$ $D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ ,\ x+y \le 1\}$ en posant $x = u$ et $y = (1-u)v$

III Intégrales triples.

1°. $\displaystyle\int\int\int_P \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ avec $P = [0,1]^3$

2°. $\displaystyle\int\int\int_D xdxdydz$ avec $D = \{(x,y,z)/\ x,y,z \ge 0\ ,\ x+y+z \le 1\}$

3°. $\displaystyle\int\int\int_D yx^2e^{xyz}dxdydz$ avec $D = [0,1]^3$

4°. $\displaystyle\int\int\int_V \frac{\sin x}{\pi-x-y}dxdydz$ avec $V = \{(x,y)/\ x,y,z \ge 0\ ,\ x+y+z \le \pi\}$

5°. $\displaystyle\int\int\int_\Delta \frac{w^3}{uv}dudvdw$ avec $\Delta = \{(u,v,w)/\ 0 \le w \le v \le u \le 1\}$

6°. $\displaystyle\int\int\int_D dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z)/\ x,y,z \ge 0\ ,\ x+y+z \le 1\}$

IV Changement de variables.

1°. Soit J$=\displaystyle\int\int\int_D \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z)/\ x,y,z \ge 0\ ,\ x+y+z \le 1\}$
On pose $u = x+y+z, v = y+z, w = z$ et $\Delta = \{(u,v,w)/\ 0 \le w \le v \le u \le 1\}$.
Démontrer que la fonction h définie par $h(u,v,w) = (x,y,z)$ vérifie $h(u,v,w) = (u-v, v-w, w)$.
Déterminer son jacobien et démontrer que $h(\Delta) = D$. En déduire la valeur de J.

2°. Soit $h : [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3\ /\ h(r,\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)$
Déterminer le jacobien de cette application et calculer $\displaystyle\int\int\int_D \frac{dxdydz}{z}$
D intersection de la demi boule supérieure de centre O et rayon R et du cône de révolution d'axe (Oz) et d'ouverture 2α.

V Calculs d'aires et de volumes.

1°. Calculer le volume de la boule de $\mathbb{R}^3$ centrée en O et de rayon R.

2°. Calculer le volume de l'éllipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} < 1$.

VI Intégrales généralisées.

Dans cet exercice, on notera $\mathcal{P}$ le quart de plan défini par $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

1°. Soit $I = \int\int_{\mathcal{P}} e^{-x^2-y^2} dxdy$ et $J_n = \int\int_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$ avec $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geq 0; y \geq 0; x^2+y^2 < n^2\}$
Calculer J_n en passant en coordonnées polaires, en déduire que I converge et calculer sa valeur.

2°. Déterminer α pour que $I = \int\int_{\mathcal{P}} \dfrac{dxdy}{(1+x+y)^\alpha}$ puis $J = \int\int_{\mathcal{P}} \dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$ convergent et donner leur valeur.

3°. Même question pour $I = \int\int_{D} \dfrac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\}$

4°. Calculer $\int\int_{\mathcal{P}} e^{-x^2-2xy-y^2} dxdy$ à l'aide du changement de variables $u = x$ et $v = x + y$.

5°. Calculer $\int\int_{\mathcal{P}} xye^{-y} dxdy$ avec $\mathcal{P} = \{(x,y) /\ 0 \leq x \leq y\}$

VII Application au calcul d'une intégrale simple.

Soit $D = \{(x,y) /\ 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1\}$.
$\forall (x,y) \in D$, on pose $f(x,y) = \dfrac{x}{(1+x^2)(1+xy)}$ et $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

1°. Montrer que $\forall x > -1$, $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy$ et en déduire que $I = \int\int_D f(x,y) dxdy$

2°. $\forall (x,y) \in D$, on pose $g(x,y) = f(x,y) + f(y,x)$. Montrer que $g(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$

3°. Montrer que D est symétrique par rapport à la droite $y = x$, en déduire que $\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D f(y,x)dxdy$

4°. Montrer que $2I = \int\int_D g(x,y)dxdy$

5°. Montrer que $g(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}(\dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{y}{1+y^2})$ et en déduire I.

VIII Majoration dans une intégrale généralisée.

Soit $\lambda > 0$, soient $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq y \leq x \leq \lambda\}$ et $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq u \leq \lambda\ ,\ 0 \leq v \leq 1\}$
On pose en outre $I(\lambda) = \int\int_T e^{-x^2-y^2} dxdy$, $K(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 e^{-\lambda^2(1+v^2)} \frac{dv}{1+v^2}$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-y^2} dy$

1°. Pour une valeur fixée de λ, tracer rapidement l'allure de T et Δ.

2°. Démontrer que $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda J(x)e^{-x^2} dx$. Calculer $J'(x)$ et en déduire que $I(\lambda) = \dfrac{1}{2} J(\lambda)^2$

3°. On pose $\Phi : \Delta \longrightarrow T /\ \Phi(u,v) = (u, uv)$. Montrer que $\Phi(\Delta) = T$ et calculer le jacobien de Φ en (u,v).

4°. A l'aide du changement de variables $x = u$ et $y = uv$, établir que $I(\lambda) = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2} K(\lambda)$

5°. Montrer que $\forall v \in [0,1]$ $|\dfrac{e^{-\lambda^2(1+v^2)}}{1+v^2}| \leq e^{-\lambda^2}$ et en déduire que $|K(\lambda)| \leq e^{-\lambda^2}$

6°. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} K(\lambda)$, en déduire $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda)$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

IX Fonctions eulériennes.

On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ $x, p, q > 0$.

1°. Montrer que $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x > 0$, puis que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

2°. En posant $t = u^2$, montrer que $\Gamma(x) = 2 \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du$.

3°. En déduire que $\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int\int_D u^{2p-1} v^{2q-1} e^{-(u^2+v^2)} dudv$ avec $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 /\ u \geq 0, v \geq 0\}$

4°. En passant en coordonnées polaires, montrer que $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) \times 2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \times \sin^{2q-1}\theta\ d\theta$

5°. En posant enfin $x = \cos^2\theta$, en déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

X Série entière et intégrale multiple.

$\forall \lambda \in [0, \frac{1}{2}]$, on pose $D(\lambda) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1\ ,\ x + y \leq 2(1-\lambda)\}$ et $I(\lambda) = \int\int_{D(\lambda)} \dfrac{dxdy}{1-xy}$

1°. Tracer $D(\lambda)$, calculer son aire $s(\lambda)$ et montrer que $I(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ sur $]0, \frac{1}{2}]$.
2°. En posant $x = u - v$ et $y = u + v$ montrer que :

$$\frac{I(\lambda)}{4} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, du + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin(1-\lambda)} (\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})\, d\theta$$

3°. Montrer que $I(\lambda)$ est une fonction continue sur $[0, \dfrac{1}{2}]$ et calculer $I(0)$.

4°. On pose $u_n(\lambda) = \displaystyle\int\int_{D(\lambda)} x^n y^n dxdy$

Calculer $u_n(0)$, montrer que la série de terme général $u_n(\lambda)$ est convergente sur $[0, \frac{1}{2}]$

En déduire que la somme f de cette fonction vérifie $f(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5°. Montrer que le reste $R_n(x,y) = \displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} x^p y^p$ de la série est continue sur $]0, \dfrac{1}{2}]$ et calculer $\displaystyle\sup_{(x,y)\in D(\lambda)} R_n(x,y)$

6°. Montrer que $I(\lambda) = f(\lambda)\ \forall\ \lambda \in [0, \dfrac{1}{2}]$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$