



**I Polynômes et fractions rationnelles en  $\infty$**

1°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x^2 - 2x + 1$     2°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -4x^3 + 9x + 2$     3°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + 4x^2 - x + 1$     4°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 9x - 1}{x^2 + 2}$   
 5°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x + 3}{4x^2 - 3x + 3}$     6°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{x - 1}$     7°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^4 + 2x}$     8°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 - x + 1}{4x^3 - 1}$

**II Pôles d'une fraction rationnelle**

1°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 5}{(x - 2)^2}$     2°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x + 1}{(x - 1)^3}$     3°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$     4°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x}$   
 5°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3}$     6°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 2}$     7°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{2x^3 - 3x^2 + 1}$     8°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^n}{1 - x}, n \in \mathbb{N}^*$   
 9°.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 3)^2}$     10°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x}$     11°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$     12°.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5}{x^2 - a^2}$

**III Fonctions avec radicaux**

1°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$     2°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2} - 2}$     3°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{\sqrt{x} - 1}$     4°.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \sqrt{x^2 + 1}$   
 5°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$     6°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{x}$     7°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$     8°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$   
 9°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{|x|}$     10°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{2x}$     11°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{\sqrt{3x - 2} - 2}$     12°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}$

**IV Utilisation de la règle de l'Hôpital**

1°.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$     2°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$     3°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$     4°.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2}$     5°.  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$   
 6°.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{\sin x - \sin a}$     7°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$     8°.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^r - a^r}{x^s - a^s}$     9°.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{x - \frac{\pi}{4}}$     10°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6 + x} - \sqrt{x + 2}}{x - 2}$

**V Théorèmes de comparaison**

1°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$     2°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$     3°.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$     4°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$     5°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + 3}{2x}$   
 6°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 - x) \sin \frac{1}{x^2}$     7°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cos x$     8°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$     9°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x}$     10°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \times E\left(\frac{1}{x}\right)$

**VI Fonctions avec des puissances**

1°.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$     2°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$     3°.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$     4°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$     5°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1}\right)^{\frac{1}{x}}$   
 6°.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{(x^x)}$     7°.  $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1-x}}$     8°.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$     9°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\ln x / x}$     10°.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{1 + \frac{1}{\ln x}}}$

**VII Un peu de tout**

1°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2}$     2°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 6x + 8}$     3°.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 14x + 20}$     4°.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 14x + 20}$   
 5°.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 + 5x^2 - 13x + 7}$     6°.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$     7°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 2} - \sqrt{x}$     8°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{2x - 1}}$   
 9°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 4}$     10°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 7x}$     11°.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$     12°.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x - 1}$   
 13°.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^x)$     14°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$     15°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$     16°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

$$\begin{aligned}
17^\circ. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e^{\frac{1}{x}}}{x^2 - 1} & \quad 18^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x - \sin x} & \quad 19^\circ. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x^4 - 16} & \quad 20^\circ. \lim_{x \rightarrow e} \frac{e \ln x - x}{x - e} \\
21^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \alpha}{\sqrt{x^2 + \beta^2} - \beta} & \quad 22^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x & \quad 23^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} & \quad 24^\circ. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e^{1/x}}{x - 1} \\
25^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) \times (1 + x - E(x)) & \quad 26^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + x + 1 - E(x)) & \quad 27^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2(\frac{1}{x})) \times \ln x \\
28^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} - \sqrt{x+9}}{x} & \quad 29^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x-1}}) & \quad 30^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x}
\end{aligned}$$

### VIII Limites aux bornes du domaine de définition

$$1^\circ. f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|} - 1} \quad 2^\circ. g(x) = \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} \quad 3^\circ. h(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad 4^\circ. \phi(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$$

### IX Branches infinies

$$\begin{aligned}
1^\circ. \sqrt{x^5} & \quad 2^\circ. 3x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} & \quad 3^\circ. 3x + \sqrt{x} & \quad 4^\circ. 3x^2 + \sqrt{x} & \quad 5^\circ. x + \cos x \\
6^\circ. \ln(x^{\frac{3}{4}} - 1) & \quad 7^\circ. \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} & \quad 8^\circ. \frac{x^3 - 1}{x^2} & \quad 9^\circ. \sqrt{x^2 - 1} & \quad 10^\circ. \sqrt{x^2 - x} \\
11^\circ. x + \sqrt{x^2 - 1} & \quad 12^\circ. \frac{x}{1 - |x|} & \quad 13^\circ. \sqrt[3]{x^3 + x^2\sqrt{x}} & \quad 14^\circ. (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}} & \quad 15^\circ. \frac{1}{x(1 + \ln x)}
\end{aligned}$$

### X Equations d'asymptotes

1°. Soit  $f(x) = \sqrt{4x^2 - x + 1}$  et  $\Delta$  la droite d'équation  $y = ax + b$ . Déterminer  $a$  et  $b$  de telle sorte que  $\Delta$  soit asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ .

2°. Soit  $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + mx$ . Déterminer  $m$  pour que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

### XI Utilisation des équivalents

$$\begin{aligned}
1^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^4 - x^2} & \quad 2^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{1 - \cos 2x} & \quad 3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \tan(\ln(1 + x)) & \quad 4^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \\
5^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} & \quad 6^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1} & \quad 7^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \tan x}{1 - \cos x} & \quad 8^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1 + x)}{1 - e^{2x}} \\
9^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} & \quad 10^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} & \quad 11^\circ. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x} - 1} & \quad 12^\circ. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{e^x - e} \\
13^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{2x} - x^3}{\ln x - x^2 e^x} & \quad 14^\circ. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - x^2}{(2e^x - x \ln x)^2} & \quad 15^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} & \quad 16^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^3 + x^5)}{1 - \cos(5x^3)}
\end{aligned}$$

### XII

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs. On se propose de calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$1^\circ. \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x}{2(1 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b))}$$

2°. En déduire un équivalent de  $\frac{a^x + b^x}{2}$  en 0. Peut-on dire que  $\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)$  et  $\ln\left(1 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b)\right)$  sont équivalents? Pourquoi?

3°. En utilisant la règle de l'Hospital, démontrer que  $\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{x}{2}(\ln a + \ln b)\right)$

4°. Conclure.