MATHEMATIQUES TD N°2 : PROBABILITES ELEMENTAIRES - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2011/2012

Mesure de probabilité, indépendance.

I. Des boules et des cartes - encore -

1°. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelles sont les probabilités d'obtenir 4 as, un carré, 3 coeurs et 2 dames ?

Le fait que les tirages soient simultanés pousse à choisir des tirages non ordonnés.
card $\Omega = C_{32}^5 = 201376$. Il existe une unique façon d'obtenir les 4 as et 28 façons de choisir la dernière carte, soit une proba de $\dfrac{28}{C_{32}^5} = \dfrac{28}{201376}$

Un carré s'obtient de 8 façons, soit une proba de $\dfrac{28 \times 8}{C_{32}^5} = \dfrac{1}{899}$

Soit A l'évènement dont on cherche la proba.
$A = A_1 \cup A_2$ avec :
$A_1 =$ "3 coeurs et deux dames, mais pas la dame de coeur."
$A_2 =$ "3 coeurs et deux dames avec la dame de coeur."
Les deux ensembles sont disjoints ; on a
card $A_1 = C_7^3 \times C_3^2 = 105$ et
card $A_2 = C_7^2 \times C_3^1 \times 21 = 1323$
Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \dfrac{1428}{201376}$

2°. On considère 3 urnes numérotées de 1 à 3. L'urne n°1 contient 1 boule blanche et 2 boules noires. L'urne n°2, 2 blanches et 1 noire et la n°3 contient 3 boules blanches. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne. Quelle la proba que la boule soit blanche ?

On choisit des probabilités uniformes. On utilise la formule des probas totales et en notant U_i l'évènement "on a choisi dans l'urne numéro i", la formule donne :

$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(B/U_i)\mathbb{P}(U_i) = \frac{1}{3}\sum \mathbb{P}(B/U_i)$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1) = \frac{2}{3}$$

3°. On lance trois dés normaux de façon indépendante. Calculer la probabilité que la somme des numéros soit égale à 10. Calculer la probabilité pour qu'un double apparaisse.

L'ensemble Ω choisi est l'ensemble des triplets ordonnés de résultats : *card* $\Omega = 6^3 = 216$
Lorsque l'on modélise l'expérience aléatoire sous cette forme, on tient compte de l'ordre (c'est à dire que l'on peut distinguer les 3 dés). On a alors équiprobabilité parmi les 216 triplets de la forme (i, j, k). Parmi ceux-ci, le nombre de triplets (i, j, k) dont la somme vaut 10 est égal à 27 (dont (6,3,1), (3,6,1), (4,3,3), etc.) d'où une proba de 27/216.
Si l'on cherche à modéliser l'expérience sans tenir compte de l'ordre, on n'aura plus équiprobabilité parmi les issues possibles. En effet, il existe 6 triplets (non ordonnés) de la forme (i, i, i), il existe 30 triplets de la forme (i, i, j) que l'on peut ensuite ordonner de 3 façons (donc 90 ordonnés) et 20 triplets de la forme (i, j, k) avec $i \neq j \neq k$ que l'on peut ordonner de 3! façons ($20 = 6 \times 5 \times 4/3!$). On retrouve alors les 216 possibilités.

4°. Un tiercé compte 20 chevaux au départ. Quelle est la probabilité de gagner dans l'ordre et dans le désordre ?

Le nombre de tiercés dans l'ordre est A_{20}^3, soit une proba de $1/A_{20}^3 \simeq 1,46.10^{-4}$.
Le nombre de tiercés dans le désordre est C_{20}^3, soit une proba de $(6-1)/A_{20}^3 \simeq 7,31.10^{-4}$

5°. Une urne contient 2 boules blanches et 4 noires. On extrait successivement et au hasard toutes les boules. Quelle est la probabilité que les boules blanches soient extraites lors des 4 premiers tirages ?

On regarde toutes les configurations possibles (BBNNNN,BNBNNN,BNNBNN, etc.). Au total, il existe $C_6^2 = 15$ configurations différentes. Parmi celles-ci, six nous conviennent (BBNNNN,BNBNNN,BNNBNN,NBBNNN, NBNBNN,NNBBNN). La proba recherchée est donc 6/15.

6°. Un problème d'examen comporte deux questions Q_1 et Q_2. Il y a 3 réponses possibles à Q_1 et 5 réponses à Q_2. L'étudiant répond au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une réponse correcte ? Au moins une réponse fausse ?

La probabilité que les deux réponses soient fausses est $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{15}$ (on suppose le résultat aux deux questions indépendantes). La proba d'avoir au moins une réponse correcte est donc $1 - 8/15 = 7/15$.

7°. On gare 8 voitures dans un parking de 12 places. Quelle est la probabilité pour que les 4 places libres soient adjacentes ?

On a 12! permutations possibles des places. Il y a $9 \times 4!$ façons de placer les "trous" côte à côte et 8! facons de permuter les voitures. Ainsi, la proba recherchée est $\dfrac{9 \times 4! \times 8!}{12!} = 1/55$

8°. 5 objets sont placés au hasard dans 4 tiroirs. Quelle est la probabilité que tous les tiroirs soient non vides ?

Le nombre de façons de ranger p objets dans n boites est $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$ (ce sont des combinaisons à répétitions). Pour démontrer cela, alignons $n + p - 1$ cases et choisissons-en p pour placer un objet dedans.

Les $n-1$ cases vides restantes peuvent être vues comme des cloisons entre les cases qui contiennent un objet. Choisir leur position se fait donc de C_{n+p-1}^{p} façons. Dans l'exemple, le nombre de façons de placer 5 objets dans 4 tiroirs est donc $C_8^5 = 56$.

Le nombre de façons de placer p objets dans n cases de telle façon qu'aucune case ne soit vide est C_{n-1}^{p-1} (si $p \geq n$). Démontrons le : On commence par mettre un objet par tiroir ; cela se fait d'une seule façon puisque les objets sont indiscernables. Ensuite, il reste à choisir les places des $p-n$ objets restants, ce qui se fait de $\Gamma_n^{p-n} = C_{p-1}^{p-n}$.
Dans l'exemple, on distribue un objet par tiroir ; il en reste un à placer de 4 façons possibles (ie C_4^1).

La proba recherchée est donc $4/56 = 1/14$

9°. 10 range dix livres au hasard. Quelle est la probabilité que les trois tomes d'une série se retrouvent l'un à côté de l'autre ?

On a 10! permutations de livres possibles. Il existe $8 \times 3!$ façons de placer 3 livres côte à côte et 7! façons de placer les autres. Au total la proba recherchée est $\dfrac{8 \times 3! \times 7!}{10!} = 1/15$

10°. On range les n tomes de l'encyclopédie multiversalis. Quelle est la probabilité que les volumes soient dans le bon ordre ?

Il n'y a qu'une possibilité parmi $n!$ de placer les tomes dans le bon ordre. La proba est $1/n!$.

II. Poker.

1°. Déterminer le nombre total de mains possibles.
Une main correspond à une combinaison de 5 cartes parmi 32 (l'ordre n'a pas d'importance) : Il y en a $C_{32}^5 = 201376$.

2°. Une paire est un groupe de 2 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec (exactement) une paire ?
On peut choisir la hauteur des deux cartes de la paire parmi les 8 hauteurs possibles : il y a 8 possibilités. Ensuite, on choisit 2 cartes parmi les 4 ayant la hauteur choisie, ce qui se fait de C_4^2 façons. On doit enfin choisir les hauteurs des 3 autres cartes parmi les 7 hauteurs restantes (de C_7^3 façons pour ne pas avoir deux fois la même hauteur, ce qui créerait une nouvelle paire) et pour chacune de ces 7 hauteurs, on doit prendre une carte parmi les 4 possibles, soit 4^3.
Au total, on a : $8 \times C_4^2 \times C_7^3 \times 4^3 = 107520$

3°. Une double paire est formée de deux paires. Combien existe-t-il de mains avec une double paire ?
De la même façon, on doit choisir deux hauteurs de cartes parmi huit de C_8^2 façons, puis pour chaque hauteur 2 cartes ayant cette hauteur, de C_4^2 façons et choisir enfin la dernière carte parmi les cartes restantes (il reste 6 hauteurs possibles de 4 cartes, soit 24).
Au total, on a : $C_8^2 \times C_4^2 \times C_4^2 \times 24 = 24192$

4°. Un brelan est un groupe de 3 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec un brelan ?
On choisit la hauteur du brelan parmi 8 puis les 3 cartes du brelan parmi 4, soit de C_4^3 façons. Les deux dernières cartes doivent correspondrent à 2 hauteurs différentes choisies parmi les 7 hauteurs restantes, soit C_7^2 façons de choisir, et l'on prend une des 4 cartes possibles.
Au total : $8 \times C_4^3 \times C_7^2 \times 4 \times 4 = 10752$

5°. Un full est une main composée d'une paire et d'un brelan. Combien existe-t-il de fulls ?
Il faut choisir un brelan et une paire n'étant pas de même hauteur : On a 8 choix du brelan et 7 de la paire (de façon non ordonnée) et C_4^3 façon de constituer le brelan, C_4^2 de constituer la paire.
Au total $A_8^2 \times C_4^3 \times C_4^2 = 1344$ possibilités.

6°. Une quinte est une main composée de cinq cartes de hauteurs consécutives. Combien existe-t-il de quintes ?
On doit choisir la carte haute parmi 4 cartes (A,R,D,V) et les suivantes sont alors fixées ; on ne peut choisir en dessous du valet si l'on veut 5 cartes successives ! Chaque carte peut-être choisie parmi les 4 de la hauteur considérée : cela fait 4^5 choix. Enfin, parmi toutes les combinaisons, il y a celles qui correspondent à une couleur et en ce cas, la quinte est une quinte flush qu'il faut retirer du décompte : il y a 16 quintes flush au total (4 choix de couleur et 4 choix de hauteur).
Le nombre de possibilités est donc de $4 \times 4^5 - 16 = 4080$

7°. Un carré est un groupe de 4 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec un carré ?
Le choix de la hauteur est 8 et la dernière carte est à choisir parmi les 28 cartes restantes, soit au total $8 \times 28 = 224$ cas possibles.

8°. Une couleur est une main de 5 cartes de même couleur et de valeurs différentes. Combien en existe-t-il ?
On choisit les 5 cartes dans des hauteurs différentes (de C_8^5 façons) et pour chaque hauteur, on a 2 choix possibles dans une couleur et 2 pour choisir cette couleur. La couleur peut-être une quinte-flush, et il faut donc retirer les 16 cas correspondants.
Au total, $C_8^5 \times 2 \times 2 - 16 = 208$

9°. Une quinte flush est une main de 5 cartes de hauteurs consécutives et de même couleur. Combien en existe-t-il ?
Il en existe 16 et nous avons déjà expliqué pourquoi plus haut ! !

10°. Combien existe-t-il de mains "banales" sans aucune figure ? On choisit 5 cartes de hauteurs différentes (pour éviter les paires, doubles paires, brelans, full et carrés) de $C_8^5 \times 4^5$ façons puis on retire

les quintes, couleurs et quintes flush ; soit au total $C_8^5 \times 4^5 - 4080 - 208 - 16 = 53040$
On s'aperçoit que la somme de toutes les possibilités redonne bien les 201376 mains possibles.

11°. On pose l'équiprobabilité sur l'ensemble de toutes les mains possibles (on suppose qu'il n'y a pas de tricheurs). Calculer la probabilité de chacune des figures ci-dessus.

Il suffit de reprendre les résultats de chaque question ci dessus et de les diviser par C_{32}^5

12°. On possède une paire que l'on souhaite transformer en brelan en changeant une carte. Calculer alors la probabilité d'obtenir un brelan.
13°. Calculer la probabilité d'obtenir une double paire en changeant trois cartes à partir d'une paire.
14°. Calculer la probabilité d'obtenir un full en changeant trois cartes à partir d'une paire, puis deux cartes à partir d'un brelan.
15°. Calculer la probabilité d'améliorer une carte haute en une paire, puis en un brelan.
16° Calculer la probabilité de construire une couleur ou une quinte lorsqu'il ne manque qu'une ou deux cartes pour y parvenir.

III.

Soient A,B,C trois évènements d'une expérience aléatoire. Trouver les expressions des évènements :

1°. A et B sont réalisés, mais pas C : $A \cap B \cap \bar{C}$
2°. Les trois évènements sont réalisés : $A \cap B \cap C$
3°. Au moins l'un des évènements est réalisé : $A \cup B \cup C$
4°. Deux ou plus sont réalisés : $(A \cap B \cap C) \cup \big(A \cap B \cap \bar{C}\big) \cup \big(A \cap \bar{B} \cap C\big)\ \big(\bar{A} \cap B \cap C\big)$
5°. Deux au plus sont réalisés : $\overline{A \cap B \cap C}$

IV.

Une urne contient r boules blanches et s boules noires. On extrait simultanément et au hasard, n boules $(1 \leq n < r+s)$:
1°. Comment modéliser cette expérience ?
Le nombre de configurations possibles est C_{r+s}^n et sur cet ensemble on peut choisir l'équiprobabilité.

2°. Calculer la probabilité de l'évènement $A_k =$ "Parmi les n boules, k sont blanches"
Le nombre de configurations avec k cases blanches est $C_r^k \times C_s^{n-k}$, soit une proba de

$$\frac{C_r^k \times C_s^{n-k}}{C_{r+s}^n}$$

3°. Quelle relation obtient-on sur les coefficients binomiaux ?

En faisant la somme sur k de 0 à n, on doit obtenir 1 (puisque c'est une proba). On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} C_r^k C_s^{n-k} = C_{r+s}^n$$

V.

Au tapis vert, on sépare un jeu de 32 cartes en 4 piles de 8 cartes de la même couleur. Le joueur sélectionne mentalement une hauteur de carte pour chaque couleur. On tire ensuite une carte de chaque pile.
1°. Comment modéliser cette expérience ?
On a 8 choix possibles pour chaque couleur, soit au total 8^4 et sur cet ensemble on peut choisir l'équiprobabilité.

2°. Quelle est la probabilité qu'un joueur ait deviné exactement k bonnes cartes pour $k = 0, 1, ..., 4$?
$k = 0$, $\mathbb{P} = (7/8)^4$
$k = 1$, $\mathbb{P} = 4 \times (1/8) \times (7/8)^3$
$k = 2$, $\mathbb{P} = C_4^2 \times (1/8)^2 \times (7/8)^2$
$k = 3$, $\mathbb{P} = 4 \times (1/8)^3 \times (7/8)$
$k = 4$, $\mathbb{P} = (1/8)^4$

VI. Roméo & Juliette.

1°. Ils conviennent de ne pas attendre plus de 15 minutes mais arrivent au lieu de rendez-vous de façon aléatoire. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

$\Omega[0, 60] \times [0, 60]$
Si x et y sont les heures d'arrivées de chacun (en minutes), alors ils se croisent si $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 60$ et $|x - y| \leq 15$ (faites un dessin ! !)
Soit R l'évènement "ils se rencontrent" :
$\mathbb{P}(\bar{R}) = \dfrac{1}{2}(45 \times 45) \times 2\dfrac{1}{60^2} = \dfrac{9}{16}$ et donc $\mathbb{P}(R) = \dfrac{7}{16}$

2°. Combien de temps doivent-ils attendre pour que leur probabilité de rencontre soit supérieure ou égale à 0.5.
Soit t le temps d'attente. On a
$\mathbb{P}(\bar{R}) = \left(\dfrac{60-t}{60}\right)^2 \leq \dfrac{1}{2} \iff -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{60-t}{60} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\iff t \geq 60\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ ce qui représente environ 17 minutes 34s.

VII.

Une machine comprend trois organes A, B et C indépendants et nécessaires à son fonctionnement. On note I l'évènement " l'organe I est défaillant " et l'on donne $\mathbb{P}(A) = 0.02$, $\mathbb{P}(B) = 0.05$ et $\mathbb{P}(C) = 0.1$. Calculer la probabilité que la machine tombe en panne.

La machine tombe en panne si A, B ou C se réalise.
Donc $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$
$= 1 - \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(\bar{C})$ par indépendance des évènements.
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - 0,98 \times 0,95 \times 0,9 = 0,1621$

VIII.

On jette un dé deux fois de suite et l'on considère les évènements suivants :

A="Le premier nombre obtenu est pair"
B="Le second nombre obtenu est pair"
C="La somme des nombres est impaire"
D="Le 3 est obtenu au moins une fois"

1°. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A\cap B)$, $\mathbb{P}(A\cap C)$ et $\mathbb{P}(B\cap C)$. Les évènements A,B,C sont-ils deux à deux indépendants ?
On suppose évidemment les lancers indépendants. On a $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=1/2$ et
$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(C\cap B)=1/4$
Dans tous les cas, la proba de l'intersection est égale au produit des probas et ces évènements sont donc 2 à 2 indépendants.

2°. Sont-ils indépendants dans leur ensemble ?
On voit clairement que $A\cap B\cap C=\emptyset$ donc
$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=0$ tandis que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=1/8$
Les deux résultats n'étant pas égaux, A,B,C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

3°. Calculer $\mathbb{P}(C\cap D)$, $\mathbb{P}(C\cup D)$, $\mathbb{P}(C\cap\bar{D})$, $\mathbb{P}((C\cap\bar{D})\cup\bar{C})$.
$C\cap D=\{(3,2),(3,4),(3,6),(2,3),(4,3),(6,3)\}$ et donc $\mathbb{P}(C\cap D)=6/36=1/6$
$\mathbb{P}(C\cup D)=\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D)-\mathbb{P}(C\cap D)$
$=18/36+11/36-6/36=23/36$
Déterminons le cardinal de $C\cap\bar{D}$. Ecrivons cela sous la forme (1er lancer : cas possibles pour le second) :
$1:2-4-6$
$2:1-5$
$4:1-5$
$5:2-4-6$
$6:1-5$
On a donc 12 cas favorables sur 36 ie
$\mathbb{P}(C\cap\bar{D})=12/36=1/3$
Enfin, $\mathbb{P}((C\cap\bar{D})\cup\bar{C})=\mathbb{P}(\bar{D}\cup\bar{C})$
$=1-\mathbb{P}(D\cap C)=5/6$

IX.

Un circuit électronique comprend n éléments identiques et indépendants dont la probabilité de tomber en panne est de 0.002 chacun.
1°. Calculer la probabilité que le circuit tombe en panne si $n=4$.
2°. On remplace chaque élément par un couple d'éléments en parallèle. Quelle est la probabilité que le circuit tombe en panne ?

Le circuit fonctionne si tous les éléments fonctionnent ; la proba de fonctionnement est donc $(1-2.10^{-3})^4\simeq 0.992$. La proba de panne est donc 0.008. Si l'on double les composants, la proba de panne d'un composant passe à $(2.10^{-3})^2\simeq 4.10^{-6}$. La proba de panne du circuit est donc
$1-(1-4.10^{-6})^4\simeq 8.10^{-6}$

X. Indépendance.

1°. Deux évènements indépendants peuvent-ils être disjoints ?
Deux évènements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et disjoints si $\mathbb{P}(A\cap B)=0$.
Les deux sont possibles si $\mathbb{P}(A)$ ou $\mathbb{P}(B)$ est nulle.

2°. Montrer que : (A et B indépendants) $\iff$ (A et $\bar{B}$ indépendants) $\iff$ ($\bar{A}$ et $\bar{B}$ indépendants)

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap(B\cup\bar{B}))=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap\bar{B})$
$\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap\bar{B})=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))$
$\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap\bar{B})==\Rightarrow\mathbb{P}(A)\Rightarrow\mathbb{P}(\bar{B})$
Ces deux évènements sont donc indépendants.
La dernière assertion s'obtient à partir de la seconde en permutant le rôle de A et B.

3°. Montrer que ($\forall B$, A et B indépendants) $\iff$ ($\mathbb{P}(A)=0$ ou $\mathbb{P}(A)=1$)

Si $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ pour tout B, alors si $B=A$, on obtient $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A)^2$ ie $\mathbb{P}(A)=0$ ou $\mathbb{P}(A)=1$
Réciproquement, si $\mathbb{P}(A)=0$ alors
$\mathbb{P}(A\cap B)\leq\mathbb{P}(A)=0$ et si $\mathbb{P}(A)=1$ alors
$1=\mathbb{P}(A\cup B)=1+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$
$\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B)$ cqfd

4°. Si A,B,C sont trois évènements deux à deux indépendants, montrer que A est indépendant de $B\cup C$ et de $B\cap C$

$\mathbb{P}(A\cap(B\cup C))=\mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap C))$
$=\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$
$=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
$=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B\cap C)$

De la même façon, $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B\cap C)$

XI. Equation aléatoire

On considère les résultats du lancer de deux dés a et b.
Calculer la probabilité que l'équation $x^2+ax+b=0$ possède des solutions.

On travaille dans $\Omega=\{1,2,...,6\}^2$ qui comporte donc 36 éléments. $\Delta=a^2-4b\geq 0$
Au total, 16 couples sont dans l'évènement $[\Delta>0]$ d'où une proba de $\dfrac{16}{36}=\dfrac{4}{9}$

XII.

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{10(x-8)}{x(x-1)}$ et l'on pose $\alpha=8+2\sqrt{14}$ et $\beta=8-2\sqrt{14}$

1°. Etudier f et la décomposer en éléments simples.
$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}/\{0,1\}$ et $f'(x)=-\dfrac{10(x^2-16x+8)}{x^2(x-1)^2}$ de sorte que f est croissante entre 1 et α puis décroissante de α à $+\infty$. On a $\alpha\simeq 15,4$ et $f(\alpha)\simeq 0,33$
Enfin, la décomposition en éléments simples est quasi-évidente : 0 et 1 sont pôles simples et le théorème des résidus donne :

$$f(x) = \frac{80}{x} - \frac{70}{x-1}$$

Une urne contient n boules avec $n > 8$ dont 3 jaunes et 5 vertes ; les autres sont rouges.

2°. On suppose que $n = 16$. On tire une boule, on la remet dans l'urne, puis en on tire une seconde. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A="On a deux boules rouges"
B="On a une boule rouge et une verte"
C="On a une boule rouge ou une jaune parmi les deux boules"
D="On a au moins une boule rouge"

si $n = 16$, on a immédiatement $\mathbb{P}(A) = 1/4$,
$\mathbb{P}(B) = 1/2 \times 5/8 \times 2 = 5/8$
$\mathbb{P}(C) = 1 - 5/16 \times 5/16$ et
$\mathbb{P}(D) = (1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2) + 1/4 = 3/4$

3°. On effectue maintenant le tirage des deux boules de façon simultanée. Reprendre les questions précédentes.
Rien ne change ! !

4°. On suppose maintenant n quelconque. Calculer la probabilité de l'évènement A_n="On a tirer une boule rouge et une verte". Déterminer n pour que cette probabilité soit maximale et calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(An)$

$\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{n-8}{n} \times \dfrac{5}{n-1} + \dfrac{5}{n} \times \dfrac{n-8}{n-1}$
$= \dfrac{10(n-8)}{n(n-1)} = f(n)$

Quand n tend vers l'infini cette proba tend vers 0 et le maximum est obtenu pour l'entier n le plus proche de α ie $n = 15$ auquel cas la proba vaut environ 0.33.

XIII. Paradoxe des anniversaires.

Quelle est la probabilité que dans une classe de n élèves, deux élèves aient la même date d'anniversaire ?

On ne tiendra pas compte des années bissextiles. Il y a 365 dates possibles d'anniversaire par personne, ce qui fait au total 365^n possibilités équiprobables. Les anniversaires sont tous différents dans A_{365}^n cas. On a donc une probabilité d'au moins deux anniversaires le même jour qui vaut

$$1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

Le calcul montre que dès que $n \geq 23$, cette proba est supérieure à $1/2$. C'est le paradoxe en question.

XIV. Formule de Poincaré.

On considère une expérience aléatoire modélisée par un ensemble Ω et n évènements $A_1, ..., A_n$.
1°. Démontrer par récurrence la formule de Poincaré

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$$

Si $n = 2$, on a bien
$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$
Supposons la formule vraie au rang n,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbb{P}((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}))$$

Nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence aux deux extrêmes et la formule s'en déduit (avec un peu de calcul...).

2°. 4 personnes déposent leur chapeau en entrant dans une salle et en reprennent un au hasard en sortant. Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne retrouve son chapeau ?

XV. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Une particule initialement placée en 0 se déplace au hasard sur $\mathbb{Z}$ par saut d'amplitude 1 ou -1 avec proba $1/2$. On appelle trajectoire de la particule la suite des abscisses successives dans un déplacement de n sauts. On désigne par Ω l'ensemble de ces trajectoires et l'on définit $\mathbb{P}$ comme l'équiprobabilité sur Ω.

1°. Expliciter Ω et son cardinal, puis représenter graphiquement les éléments de Ω par des lignes polygonales de $[0, n] \times \mathbb{Z}$. Indiquer les positions possibles de la particule après $n = 2$ et $n = 3$ sauts et les probabilités correspondantes.

$\Omega = \{-1, +1\}^2$ dont le cardinal est 2^n
A vous de faire le dessin.
Si $n = 2$, $\mathbb{P}(2) = \mathbb{P}(-2) = 1/4$, $\mathbb{P}(0) = 1/2$
Si $n = 3$, $\mathbb{P}(3) = \mathbb{P}(-3) = 1/8$, $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(-1) = 3/8$

2°. n est maintenant quelconque. Si $\omega \in \Omega$, on note $k(\omega)$ le nombre de sauts d'amplitude 1 et $l(\omega)$ le nombre de sauts d'amplitude -1 lors de la trajectoire ω. Que vaut $k(\omega) + l(\omega)$? Que représente $k(\omega) - l(\omega)$?

$k + l = n$ et $k - l$ représente la hauteur atteinte.

3°. Soit $x \in \mathbb{Z}$ et A_x l'évènement "la particule est en x après n sauts". Montrer que $A_x \neq \emptyset$ si et seulement s'il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = n$ et $k - l = x$. Résoudre le système obtenu et en déduire $\mathbb{P}(A_x)$

D'après la question précédente, on a immédiatement $k + l = n$ et $k - l = x$ soit encore $k = (n + x)/2$ et $l = (n - x)/2$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_x) = \frac{C_n^x}{2^n}$$

Probabilité conditionnelle.

XVI. Jetons à deux faces

Une urne contient 3 jetons avec 2 faces, chaque face étant noire ou blanche.
L'un des jetons a les deux face noires, un autre a les deux faces blanches et le dernier possède une face blanche et une noire. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un jeton au hasard et à deviner la couleur de la face cachée.

On pourra noter A_v l'évènement " la face visible est de couleur A " et A_c " l'évènement la face cachée est de couleur A ".

1°. Construire l'ensemble Ω correspondant et définir une probabilité sur cet ensemble (On pourra choisir comme élément de Ω des couples de la forme (n°jeton,n°face)).

Notons $\Omega = \{(n^\circ\ jeton, n^\circ\ face)\}$
$= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

2°. Calculer $\mathbb{P}[N_C/N_V]$. Répondre à la question posée.

$N_V = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$
$N_C = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
$\mathbb{P}(N_C/N_V) = \dfrac{\mathbb{P}(N_C \cap N_V)}{\mathbb{P}(N_V)} = \dfrac{2}{3}$
De même, $\mathbb{P}(B_C/N_V) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(B_C/B_V) = \dfrac{2}{3}$
Ainsi, mieux vaut parier que la face cachée à même couleur que la face visible.

XVII.

On considère deux urnes A et B qui contiennent respectivement 1 boule noire et 2 rouges et 2 boules noires et deux rouges. On effectue un tirage à pile ou face équitable. Si l'on fait pile, on choisit une boule dans A sinon on choisit une boule dans B.
On considère les évènements suivants :

A="On tire une boule dans A" (idem pour B)
N="On tire une boule noire" (idem pour R)

1°. 2°. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(R/A)$ et $\mathbb{P}(R/B)$

$\mathbb{P}(R/A) = \dfrac{2}{3}$, $\mathbb{P}(R/B) = \dfrac{1}{2}$,

$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R/B)\mathbb{P}(B) = \dfrac{7}{12}$

$\mathbb{P}(A/R) = \dfrac{\mathbb{P}(R/A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(R)} = \dfrac{4}{7}$

3°. Les évènements A et R sont-ils indépendants ? disjoints ?
$\mathbb{P}(A/R) \neq \mathbb{P}(A)$ donc A et R ne sont pas indépendants.
$\mathbb{P}(A \cap R) \neq 0$ ils ne sont donc pas disjoints non plus.

XVIII.

Soient U et V deux urnes. U contient 75% de boules blanches et V 50%. On suppose en outre que U contient trois fois plus de boules que V. On place toutes les boules de U et de V dans une même urne et on tire une boule au hasard. On constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U ?

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(B/U) = 3/4$, $\mathbb{P}(B/V) = 1/2$, $\mathbb{P}(U) = 3/4$ et $\mathbb{P}(V) = 1/4$
$\mathbb{P}(U/B) = \dfrac{\mathbb{P}(B/U)\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{3/4 \times 3/4}{3/4 \times 3/4 + 1/2 \times 1/4}$
$= 9/11$ en appliquant la Formule de Bayes.

XIX.

Une famille a deux enfants. Le facteur sonne et c'est une fille qui ouvre. Quelle est la probabilité que le second enfant soit un garçon ?

Cet exercice est résolu dans le cours : On choisit comme ensemble univers
$\Omega = \{(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)\}$ sur lequel on peut choisir l'équiprobabilité. On considère les évènements A="la famille a une fille" et B= "la famille a un garçon". On veut calculer
$\mathbb{P}(B/A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{2/4}{3/4} = 2/3$ et non $1/2$ comme on pourrait le penser.

XX. Concours 1999.

On dispose de 3 urnes U, V et W. U comprend 4 boules marquées v et une marquée w.
L'urne V comprend 9 boules blanches et une noire.
L'urne W comprend 4 boules blanches, trois noires et trois jaunes.

On tire au hasard une boule de l'urne U.
Si la boule tirée est marquée v, on tire alors au hasard une deuxième boule de l'urne V.
Si elle est marquée w, on tire alors une deuxième boule de l'urne W.

On pose V=" La première boule tirée est marquée v " et C=" La deuxième boule tirée est de couleur C "

1°. $\mathbb{P}(V) = \dfrac{4}{5}$, $\mathbb{P}(W) = \dfrac{1}{5}$, $\mathbb{P}(J/V) = 0$, $\mathbb{P}(N/V) = \dfrac{1}{10}$
$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N/V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(N/W)\mathbb{P}(W)$
$= \dfrac{1}{10} \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{7}{50}$
$\mathbb{P}(V/N) = \dfrac{\mathbb{P}(N/V)\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(N)} = \dfrac{4}{7}$

2°. Les évènements V et J sont-ils indépendants ?

$\mathbb{P}(J/V) \neq \mathbb{P}(J)$ donc ils ne sont pas indépendants.

3°. Les évènements W et J sont-ils disjoints ?

$\mathbb{P}(W \cup J) \neq 0$ et les évènements ne sont donc pas disjoints.

XXI.

Suite à une épidémie, on estime 60% de la population atteinte par une maladie M. On effectue alors deux tests biologiques dont les résultats sont indépendants. Les deux tests donnent 95% de résultats positifs pour les personnes atteintes par M et 10% de résultats positifs pour les personnes non atteintes.

1°. Quelle est la probabilité que la personne soit malade si les deux tests sont positifs ?

On commence par traduire l'énoncé en termes de probabilités d'évènements (avec les notations habituelles). On a $\mathbb{P}(+_1/M) = \mathbb{P}(+_2/M) = 0.95$,
$\mathbb{P}(+_1/\bar{M}) = \mathbb{P}(+_2/\bar{M}) = 0.1$ et $\mathbb{P}(M) = 0.6$
On applique alors la formule de Bayes à l'évènement $+_1+_2$ qui consiste à faire les deux tests :

$$\mathbb{P}(M/+_1+_2) = \frac{\mathbb{P}(+_1+_2/M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(+_1+_2)}$$

Or, $\mathbb{P}(+_1+_2) = \mathbb{P}(+_1)\mathbb{P}(+_2)$ car les tests sont supposés indépendants ; de même,
$\mathbb{P}(+_1+_2/M) = \mathbb{P}(+_1/M)\mathbb{P}(+_2/M)$ et
$\mathbb{P}(+_1+_2/\bar{M}) = \mathbb{P}(+_1/\bar{M})\mathbb{P}(+_2/\bar{M})$

2°. Quelle est la probabilité que le second test soit positif si le premier l'est ?

$\mathbb{P}(+_2/+_1) = \mathbb{P}(+_2)$ puisque les tests sont indépendants !

XXII. Test de dépistage.

Un test destiné à déceler la présence d'une maladie s'avère positif dans 99% des cas si la personne est malade et négatif dans la meme proportion si la personne est saine. Ce test est considéré comme efficace si, étant positif chez une personne choisie au hasard, cette personne est effectivement malade avec une probabilité supérieure à 0.95.

A partir de quel pourcentage de personnes atteintes de la maladie le test est-il efficace ?

Notons x le % recherché. On a :
$\mathbb{P}(x) = \mathbb{P}(M/+) = \dfrac{\mathbb{P}(+/M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(+)} = \dfrac{0,99x}{0,98x+0,01}$
$\mathbb{P}(x) \geq 0,95 \iff 0,99x \geq 0,95(0,98x+0,01)$
$\iff x \geq 0,161$

Le test est efficace si 16% de la population est atteinte.

XXIII.

On considère un dé normal à 6 faces ainsi que deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules rouges et vertes. U_1 contient 2 boules rouges et 4 vertes, tandis que U_2 contient 3 boules rouges et 3 vertes.
L'expérience aléatoire consiste à lancer le dé ; si le résultat est inférieur ou égal à 4, on choisit une boule dans l'urne U_1, sinon on choisit une boule dans l'urne U_2.

On notera U_i l'évènement “on tire une boule dans l'urne n°i ”, R l'évènement “on tire une boule rouge” et V l'évènement “on tire une boule verte”.

1°. Calculer $\mathbb{P}(U_1)$, $\mathbb{P}(U_2)$, $\mathbb{P}(R/U_1)$, $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(U_2/R)$

Comme toujours, on commence par traduire en probabilités l'énoncé : $\mathbb{P}(U_1) = 2/3$, $\mathbb{P}(U_2) = 1/3$,
$\mathbb{P}(R/U_1) = 1/3$ et d'après la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R/U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(R/U_2)\mathbb{P}(U_2)$
$= 1/3 \times 2/3 + 1/2 \times 1/3 = 7/18$

En appliquant la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(U_2/R) = \frac{\mathbb{P}(R/U_2)\mathbb{P}(U_2)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{1/2 \times 1/3}{1/2 \times 1/3 + 1/3 \times 2/3}$$

$\mathbb{P}(U_2/R) = 3/7$

2°. Les évènements R et U_1 sont-ils indépendants ? Disjoints ?

$\mathbb{P}(R/U_1) = 1/3$ et $\mathbb{P}(R)\mathbb{P}(U_1) = 7/18 \times 2/3 = 1/3$; ces évènements ne sont donc pas indépendants. De la même façon, $\mathbb{P}(R \cap U_1) \neq 0$ ils ne sont donc pas disjoints non plus.

XXIV.

Une entreprise de sondage par téléphone appelle des personnes (c'est très pénible). Lors du premier appel, la personne a une probabilité 0.4 d'être absente. Si elle est présente, elle accepte de répondre avec probabilité 0.2. Lorsque la personne est absente, on rappelle une seconde fois. La probabilité de l'avoir est alors de 0.3 et la probabilité qu'elle accepte de répondre est toujours 0.2. On considère les évènements suivants :
A_i=“La personne est absente à l'appel numéro i”
D_i=“La personne décroche à l'appel numéro i”
R=“La personne accepte de répondre”

1°. $\mathbb{P}(D_1) = 0.6$.

2°. $\mathbb{P}(D_2) = \mathbb{P}(D_2/D_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2/\bar{D}_1)\mathbb{P}(\bar{D}_1)$
$\mathbb{P}(D_2) = 0 + 0.3 \times 0.6 = 0.18$
$\mathbb{P}(R) = 0.176$

3°. Sachant qu'une personne a accepté de répondre, quelle est la probabilité que cette réponse ait eu lieu lors du premier appel ?
4°. On suppose les sondages indépendants. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne sur 20 contactée accepte de répondre ?

XXV.

Lors du premier tour d'une élection, les trois candidats en présence A,B et C ont obtenu respectivement 15 %, 40% et 45% des voix. Il n'y a pas eu d'abstentions. Un sondage effectué avant le second tour indique que, après désistement de A, 1/3 des ses électeurs s'abstiendront le dimanche suivant tandis que les autres voteront à raison de 40% pour B et 60% pour C. Le même sondage indique qu'en raison des fréquentes déclarations contradictoires des candidats, 20% des électeurs de B se reporteront sur C et 30% des électeurs de C se reporteront sur B.

On considère les évènements suivants :
A_1= “l'individu choisi a voté pour A au premier tour”
A_2= “l'individu choisi s'abstiendra au second tour”

B_1= "l'individu choisi a voté pour B au premier tour"
B_2= "l'individu choisi votera pour B au second tour"
C_1= "l'individu choisi a voté pour C au premier tour"
C_2= "l'individu choisi votera pour C au second tour"

1°. Interpréter les évènements $A_1 \cap A_2^c$ et $A_1 \cap B_2$

Une bonne idée consiste à faire un dessin dans lequel apparait tous les évènements et leur intersection.

$A_1 \cap A_2^c$ = "l'individu a voté A au premier tour et votera au second tour".
$A_2 \cap B_2$ est l'ensemble vide.

2°. Traduire l'énoncé en termes probabilistes.

$\mathbb{P}(A_1) = 0.15$, $\mathbb{P}(B_1) = 0.4$, $\mathbb{P}(C_1) = 0.45$,
$\mathbb{P}(A_2/A_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(B_2/A_1) = 0.4 \times 2/3$,
$\mathbb{P}(C_2/A_1) = 0.6 \times 2/3$, $\mathbb{P}(B_2/A_1 \cap A_2^c) = 0.4$,
$\mathbb{P}(C_2/A_1 \cap A_2^c) = 0.6$, $\mathbb{P}(B_2/C_1) = 0.3 \times 0.45$,
$\mathbb{P}(C_2/B_1) = 0.2 \times 0.4$

3°. Calculer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c)$. Montrer que $\mathbb{P}(B_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(B_2 \cap A_1 \cap A_2^c)$ puis en déduire $\mathbb{P}(B_2 \cap A_1)$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_2^c/A_1)\mathbb{P}(A_1) = 2/3 \times 0.15$
$\mathbb{P}(B_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(B_2 \cap A_1 \cap A_2^c) + \mathbb{P}(B_2 \cap A_1 \cap A_2)$
La seconde probabilité est nulle car $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, donc $= \mathbb{P}(B_2/A_1 \cap A_2^c)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) = 0.4 \times 2/3 \times 0.15 = 0.04$
Ou bien $\mathbb{P}(B_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(B_2/A_1) \times \mathbb{P}(A_1) = 0.04$

4°. Calculer $\mathbb{P}(B_2)$ et en déduire qui sera élu.

$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(B_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(B_2 \cap C_1)$
$= 0.04 + (1 - \mathbb{P}(C_2/B1))\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2/C_1)\mathbb{P}(C_1)$
$= 0.04 + 0.32 + 0.135 = 0.495$ On a aussi $\mathbb{P}(A_2) = 0.05$ et $\mathbb{P}(C_2) = 0.455$ et c'est donc B_2 qui sera élu.

XXVI.

Les trois composants α, β, γ d'un circuit sont sujets à pannes. Le signal émis passe d'abord dans α, puis traverse β et γ avant d'arriver au récepteur (cf. figure). On note S l'évènement "le signal a été reçu".
On note A,B,C respectivement les évènements α fonctionne, β fonctionne et γ fonctionne.
On donne $\mathbb{P}(A) = 0.9$, $\mathbb{P}(B/A) = 0.9$,
$\mathbb{P}(C/A \cap B^c) = 0.5$,

1°. Exprimer S à l'aide de A,B,C et montrer que $S \cap \overline{A \cap B} = A \cap \bar{B} \cap C$.
2°. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B^c)$, en déduire $\mathbb{P}(S)$.

XXVII.

On dispose de deux urnes U et V.
U comporte a boules blanches et b boules noires. V comporte b blanches et a noires. Les tirages s'effectuent avec remise.
On note U_n l'évènement "le nième tirage a lieu dans U" et B_n l'évènement "la nième boule est blanche".
Si a l'étape n on a tiré une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectuera dans U, sinon il s'effectura dans V.
On pose enfin $u_n = \mathbb{P}(B_n)$

1°. $\mathbb{P}(B_n/U_n) = \dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}(B_n/V_n) = \dfrac{b}{a+b}$

2°. $\mathbb{P}(B_{n+1}/B_n) = \dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}(B_{n+1}/\bar{B}_n) = \dfrac{b}{a+b}$

3°. En déduire une relation entre u_{n+1} et u_n

$u_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1})$
$= \mathbb{P}(B_{n+1}/B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}/\bar{B}_n)\mathbb{P}(\bar{B}_n)$
$= \dfrac{a}{a+b}u_n + \dfrac{b}{a+b}(1-u_n) = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)u_n + \dfrac{b}{a+b}$

4°. 5°. $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}, \forall n \geq 1$

$v_n = u_n - \dfrac{1}{2} \Rightarrow v_{n+1} = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)v_n$
$\Rightarrow v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

6°. On change de règle : si à l'étape n on tire une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectue dans la même urne; sinon on change d'urne. Calculer $\mathbb{P}(U_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n \geq 1$

$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n/U_n)\mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(\bar{B}_n/V_n)\mathbb{P}(V_n) = \dfrac{a}{a+b}$
$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_n/U_n)\mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_n/V_n)\mathbb{P}(V_n) = \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$

7°. Quelle est la meilleure règle de conduite si l'objectif est de tirer des boules blanches ?

$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$
$\Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \geq \dfrac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2)} \geq \dfrac{1}{2}$

XXVIII.

Une urne U_1 contient 1 boule noire et 5 blanches et une urne U_2 4 boules noires et 2 blanches. On tire une boule au hasard dans l'une des deux urnes, on note sa couleur et on la replace dans l'urne d'où elle provient. Si la boule est blanche, on effectue un autre tirage dans la meme urne, sinon on effectue le second tirage dans l'autre urne. On recommence cette expérience une infinité de fois.

ATTENTION : cet exercice utilise la notion de suite arithmético-géométrique.

1°. Calculer, en fonction du rang n de l'expérience, la probabilité u_n pour que le nième tirage s'effectue dans l'urne U_1.

Notons :
A_n="le nième tirage s'effectue dans U_1 et $\bar{A}_n$="le nième tirage s'effectue dans U_2"
D'après la formule des probas totales,
$u_n = \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_n/A_{n-1})\mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n/\bar{A}_{n-1})\mathbb{P}(\bar{A}_{n-1})$
$u_n = \dfrac{5}{6}u_{n-1} + \dfrac{4}{6}(1-u_{n-1})$
$u_n = \dfrac{1}{6}u_{n-1} + \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{10}(\dfrac{1}{6})^{n-1}$ en résolvant l'équation de récurrence à l'aide de l'équation caractéristique. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{4}{5}$

Pour résoudre l'équation de récurrence, on doit poser $v_n = u_n - \frac{4}{5}$

On en déduit alors que $v_n = \dfrac{1}{6}u_{n-1} - \dfrac{4}{5} + \dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{6}v_{n-1}$ de sorte que $(v_n)_n$ est une suite géométrique donc de la forme $v_n = v_0 q^n = -\dfrac{3}{10} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

2°. Calculer de même la probabilité v_n pour que le nième tirage donne une boule blanche.

Notons B_n="le nième tirage donne une blanche".
$v_n = \dfrac{5}{6}u_n + \dfrac{2}{6}(1-u_n) = \dfrac{11}{15} - \dfrac{3}{20}(\dfrac{1}{6})^{n-1}$ et l'on en déduit ensuite l'expression de u_n donnée ci-dessus.

XXIX. Menteurs.

1°. 4 personnes A,B,C,D se transmettent une histoire. Chacun dit la vérité avec probabilité 1/3 et modifie l'histoire avec probabilité 2/3. On suppose que D a dit la vérité. Quelle est la probabilité que A ait dit la vérité ?

Soit K_v l'évènement "la personne K dit la vérité".
D'après l'énoncé,
$\mathbb{P}(D_v) = \mathbb{P}(D_v/C_v)\mathbb{P}(C_v)\mathbb{P}(D_v/\bar{C}_v)\mathbb{P}(\bar{C}_v)$
$\mathbb{P}(D_v) = 2/3 - 1/3\mathbb{P}(C_v)$
Ainsi, $\mathbb{P}(A_v) = 1/3$, $\mathbb{P}(B_v) = -1/3 \times 1/3 + 2/3 = 5/9$, $\mathbb{P}(C_v) = -1/3 \times 5/9 + 2/3 = 13/27$ et $\mathbb{P}(D_v) = 41/81$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_v/D_v) = \frac{\mathbb{P}(A_v)\mathbb{P}(D_v/A_v)}{\mathbb{P}(D_v)} = \frac{1/3 \times 13/27}{41/81}$$
$$= \frac{13}{41} \simeq 0.32$$

2°. Généraliser à n personnes. Que se passe-t-il si $n \to +\infty$?

On notera $A_1, ..., A_n$ les personnes et K_i^v si la ième personne dit la vérité. On a :
$\mathbb{P}(A_{k+1}^v) = 2/3 - 1/3\mathbb{P}(A_k^v)$
$\mathbb{P}(A_k^v) = (-1/3)^{k-1}(\mathbb{P}(A_1^v) - 1/2) + 1/2$
Puis de $\mathbb{P}(A_1^v) = 1/3$, il vient
$\mathbb{P}(A_k^v) = 1/2 + 1/2(-1/3)^k$
D'après la formule de Bayses,
$$\mathbb{P}(A_1^v/A_k^v) = \frac{\mathbb{P}(A_k^v/A_1^v)\mathbb{P}(A_1^v)}{\mathbb{P}(A_k^v)}$$
$$= (1/3)\frac{1+(-1/3)^{k-1}}{1+(-1/3)^k}$$
$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(A_k^v) = 1/3$ et $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(A_1^v/A_k^v) = 1/3$

XXX. BE 2004

Une urne contient 8 boules : trois boules rouges numérotées $1, 2, 3$, deux vertes numérotées $4, 5$ et trois bleues numérotées $6, 7, 8$. On suppose les boules indiscernables au toucher et l'on en choisit une au hasard. On note I l'évènement "le numéro tiré est impair" et l'on note C l'évènement "la boule tirée est de couleur C".

1°. 2°. 3°.

$\mathbb{P}(V)\mathbb{P}(I) = \dfrac{2}{8} \times 12 = \dfrac{1}{8} = \mathbb{P}(V \cap I)$
$\mathbb{P}(R)\mathbb{P}(I) = \dfrac{3}{8} \times 12 = \dfrac{1}{4}$
$\mathbb{P}(R \cap V) = 0 \neq \mathbb{P}(R)\mathbb{P}(V)$
$\mathbb{P}(R \cup I) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{8} = \dfrac{5}{8}$

4°. On tire successivement trois boules avec remise. Calculer les probabilités des évènements suivants :

- On tire d'abord une rouge, puis une verte, puis une bleue.
- On tire trois boules de couleurs différentes.
- On tire une verte parmi les trois boules.
- On tire trois boules vertes.
- On tire trois boules de même couleur.

Les tirages sont indépendants ; on peut donc effectuer un produit de probas :
$\mathbb{P}(R)\mathbb{P}(V)\mathbb{P}(B) = \dfrac{3}{8}\dfrac{2}{8}\dfrac{3}{8} = \dfrac{9}{256}$
Soit A l'evt "on a 3 boules de couleurs différentes".
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{54}{256}$
Soit B l'evt "une verte parmi trois".
$\mathbb{P}(B) = \dfrac{2}{8}\dfrac{6}{8}\dfrac{6}{8} \times 3 = \dfrac{27}{64}$
$\mathbb{P}(VVV) = \dfrac{2}{8}\dfrac{2}{8}\dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{64}$
Soit C l'evt "même couleur" :
$\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{64} + \dfrac{27}{512} + \dfrac{27}{512} = \dfrac{62}{512}$

Applications des probabilités aux télécommunications.

XXXI. Quantité d'information.

1°. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Calculer $I(\Omega)$, $I(A \cap B)$ et montrer que si $A \subset B$ alors $I(A) \geq I(B)$. Montrer que $I(A) \geq 0$ pour tout évènement A de Ω.

$I(\Omega) = -\log \mathbb{P}(\Omega) = -\log 1 = 0$
$I(A \cap B) = -\log \mathbb{P}(A \cap B) = -\log(\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))$ si A et B sont indépendants.
$\Rightarrow I(A \cap B) = -\log \mathbb{P}(A) - \log \mathbb{P}(B) = I(A) + I(B)$
$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et puisque la fonction $-\log x$ est décroissante, ceci implique $I(A) \geq I(B)$
Enfin, pour tout évènement A, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ donc $\log \mathbb{P}(A) \leq 0$ ie $I(A) \geq 0$

2°. On appelle quantité d'information conditionnelle de A sachant B le réel $I(A/B) = -\log \mathbb{P}(A/B)$
On appelle information mutuelle de deux évènements A et B et l'on note $I(A; B)$ la quantité

$$I(A; B) = \log\left(\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}\right)$$

Démontrer que $I(A; B) = I(A/B) - I(B)$ et $I(A; B) = I(B; A)$

3°. Si $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ et $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/n$ calculer $I(\{\omega_i\})$.

4°. Si $\Omega = \{\pi, \phi\}$ avec $\mathbb{P}(\pi) = \mathbb{P}(\phi) = 1/2$, calculer $I(\{\pi\})$ et $I(\{\phi\})$.

5°. On considère un jeu de 32 cartes et des mains de 4 cartes. Calculer la quantité d'information des évènements suivants :

$E_1 =$ " Pas de carte inférieure au valet. "
$E_2 =$ " Pas de figure. "
$E_3 =$ " Quatre cartes de même valeurs. "
$E_4 =$ " Quatre as. "

$I(E_1) = 4,3$ Sh, $I(E_2) = 2,89$ Sh, $I(E_3) = 12,13Sh$ et $I(E_4) = 15,13$ Sh.
$I(E_1; E_2) = -7,93$ Sh et $I(E_1; E_3) = 3,3$ Sh.

XXXII. Canal binaire symétrique.

1°. $\mathbb{P}(E_0) = \mathbb{P}(E_1) = 1/2$ par hypothèse.
$\mathbb{P}(R_0) = \mathbb{P}(R_0/E_0)\mathbb{P}(E_0) + \mathbb{P}(R_0/E_1)\mathbb{P}(E_1) = (p+q)/2 = 1/2$
$\mathbb{P}(R_1) = 1/2$

2°. $\mathbb{P}(E_0/R_1) = \mathbb{P}(R_1/E_0)\mathbb{P}(E_0)/\mathbb{P}(R_1)$ d'après la formule de Bayses.
$= \mathbb{P}(R_1/E_0) = p \Rightarrow \mathbb{P}(E_1/R_1 = 1 - p$
$\mathbb{P}(E_1/R_0) = p$ et donc $\mathbb{P}(E_0/R_0) = 1 - p$

3°. $\mathbb{P}(E_1/R_0) = p$ et donc $\mathbb{P}(E_1/R_0) = p$

4°. On souhaite décider si un 0 ou un 1 a été émis ; calculer la probabilité α de se tromper.

La proba de se tromper est
$\alpha = \mathbb{P}\left((R_0 \cap E_1) \cup (R_1 \cap E_0)\right)$
$\alpha = \mathbb{P}(R_0/E_1)\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(R_1/E_0)\mathbb{P}(E_0) = (p+p)/2 = p$

5°. On ne suppose plus le canal symétrique et l'on donne $\mathbb{P}(R_0/E_0) = 0.9$, $\mathbb{P}(R_0/E_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(E_0) = \mathbb{P}(E_1) = 1/2$. Refaire les questions 1° à 4° avec ces nouvelles hypothèses.

$\mathbb{P}(R_0) = 0.9 \times 0.5 + 0.4 \times 0.5 = 0.65$
$\mathbb{P}(R_1) = 0.35 = 1 - \mathbb{P}(R_0)$
$\mathbb{P}(E_0/R_1) = (0.1 \times 0.5)/(0.7 \times 0.5) = 1/7$,
$\mathbb{P}(E_1/R_1) = 6/7$, $\mathbb{P}(E_1/R_0) = 4/13$ et $\mathbb{P}(E_0/R_0) = 9/13$
$\alpha = 0.4 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 = 0.25$

6°. En général, on connait les probabilités $\mathbb{P}(E_i/R_j)$; on les appelle vraisemblance du canal tandis que les probabilités $\mathbb{P}(R_i/E_j)$ s'appellent probabilités à postériori.

Notons $x = \mathbb{P}(E_0)$. On a

$$\mathbb{P}(E_0/R_0) = \frac{0.9x}{0.5x + 0.4} > \frac{0.4 - 0.4x}{0.5x + 0.4} = \mathbb{P}(E_1/R_0)$$

$\iff 1.3x > 0.4 \iff x > 0.31$
De même, $\dfrac{0.6 - 0.6x}{-0.5x + 0.6} > \dfrac{0.1x}{-0.5x + 0.6}$
$\iff x < 0.6/0.7 = 0.86$

XXXIII. Matrices stochastiques.

XXXIV. Matrice d'un canal de communication.

Applications à la génétique.

XXXV.

Dans une population où le nombre de mâles est la moitié du nombre de femelles, la fréquence du caractère albinos est de 6% chez les mâles et de 36% chez les femelles. Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard soit albinos ? Quelle est la probabilité qu'un albinos de cette population soit un mâle.

XXXVI.

La maladie M est une maladie génétique. Dans les familles atteintes, seuls les garçons peuvent être malades ; un garçon a une chance sur deux d'avoir cette maladie. Les filles sont toujours indemnes. On considère que la probabilité de naissance d'une fille est la même que celle d'nu garçon. On note F l'évènement "naissance d'une fille", G l'évènement "naissance d'un garçon non malade" et M l'évènement "naissance d'un garçon malade". On étudie les familles de deux enfants.

1°. 2°. Déterminer l'ensemble univers de cette expérience aléatoire. A-t-on équiprobabilité sur cet ensemble ?

Il est clair que $\mathbb{P}(MM) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(M)$. Or, $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M/G)\mathbb{P}(G)$ car $\mathbb{P}(M/F) = 0$. Donc $\mathbb{P}(MM) = ((1/2) \times (1/2))^2 = 1/(16)$
Par suite, l'espace n'est pas équiprobable car $\mathbb{P}(FF) = 1/4$

3°. Si le premier enfant est une fille, quelle est la probabilité d'avoir un garçon malade comme second enfant ?

L'ordre des naissances ne change rien au problème : nous cherchons $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(M/G)\mathbb{P}(G) = 1/4$

XXXVII.

Une souris femelle hétérozygote notée $(G; b)$ quant à la couleur de son poil (caractère gris dominant noté G et caractère blanc récessif noté b) a deux souriceaux : l'un gris et l'autre blanc. On admet qu'elle a eu ces souriceaux avec un mâle choisi au hasard quant à son caractère "couleur de poil".

Quelle est la probabilité que le père soit blanc ?

Notons B l'évènement "le père est blanc" et S l'évènement "l'un des souriceau est blanc, l'autre noir". On veut $\mathbb{P}(B/S)$. D'après la formule de Bayes,
$\mathbb{P}(B/S) = \dfrac{\mathbb{P}(S/B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(S/B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(S/\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})}$
Calcul de $\mathbb{P}(S/B)$: Si le père est blanc, il est de la forme (bb). La descendance de (Gb) et (bb) sera $(Gb), (Gb), (bb), (bb)$ de façon équiprobable. Ainsi, $\mathbb{P}(S/B) = 1/2$
Calcul de $\mathbb{P}(S/\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B}$: D'après la formule des probas conditionnelles, ce produit est égal à $\mathbb{P}(S \cap \bar{B})$. Mais $\bar{B} = (GG) \cup (Gb)$ car il ne peut y avoir de souriceau

blanc si la mère est (Gb) et le père (GG). Ainsi, la descendance de (Gb) et (Gb) est $(GG),(Gb),(bG),(bb)$:
$\mathbb{P}(S/Gb) = (1/4) \times (3/4) + (1/4)(3/4) = 3/8$ et
$\mathbb{P}(Gb) = 1/2$. Finalement,
$\mathbb{P}(B/S) = \dfrac{(1/2) \times (1/4)}{(1/2) \times (1/4) + (1/2) \times (3/8)} = 2/5$

Informatique quantique.

Applications à la cryptographie.