MATHEMATIQUES TD N° ? : SERIES ENTIERES ET TRANSFORMEES EN Z. CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2007/2008

I. Calculer les rayons de convergence :

1°. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R=1}$

2°. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$

$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = (\frac{n}{n+1})^2 \to 1$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R=1}$

3°. $\sum_{n\geq 0} z^n$

$a_n = 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \to 1$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R=1}$

4°. $\sum_{n\geq 0} n^4 3^n z^n$

$a_n = n^4 3^n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3(\frac{n+1}{n})^4 \to 3$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R=\frac{1}{3}}$

5°. $\sum_{n\geq 1} (\frac{n-1}{n})^{n^2} z^n$

$a_n^{1/n} = (1-1/n)^n \to 1/e$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R=e}$

6°. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 1$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R=1}$

7°. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \to 0$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R=+\infty}$

8°. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$

$a_n = \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = (1+\frac{1}{n})^n \to e$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R=1/e}$

9°. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n+2}}{8^{n+1}}$

Il s'agit d'une série entière dont certains termes sont nuls. Par suite, on ne peut pas appliquer la règle d'Hadamard et il faut utiliser directement les critères de convergence des séries. On pose donc $u_n(z) = a_n z^n$ et l'on fixe z. On applique alors un critère de convergence et l'on regarde selon la valeur de z lorsque la série converge ou lorsqu'elle diverge. Lorsque l'on a trouvé la frontière entre les deux, on en déduit le rayon de convergence :

$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{|z|^3}{8} < 1 \iff |z| < 2$

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, la série converge ssi $|z| < 2$. Par suite, $\boxed{R=2}$

10°. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n+1} z^{2n+1}$

$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{n+1}{n+2} 2|z|^2 \to 2|z|^2 < 1 \iff |z| < 1/\sqrt{2}$

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, la série converge ssi $|z| < 1/\sqrt{2}$.Par suite, $\boxed{R=1/\sqrt{2}}$

11°. $\sum_{n\geq 0} (3+(-1)^n)^n z^n$

Si n est pair, $u_n(z) = (4z)^n$ sinon $u_n(z) = (2z)^n$

On sépare les termes pairs et impairs dans la série :

$\sum_n u_n(z) = \sum_n 4^{2n} z^{2n} + \sum_n 2^{2n+1} z^{2n+1}$

La première série a un rayon de convergence de 1/4 la seconde de 1/2 la série somme a donc pour rayon de convergence $\boxed{R=1/4}$

12°. $\sum_{n\geq 0} (3n+1) z^{3n}$

$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{3n+4}{3n+1} |x|^2 \to |x|^2 < 1 \iff |x| < 1$

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, la série converge ssi $|x| < 1$.Par suite, $\boxed{R=1}$

13°. $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$

$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = |z|^{2n+1} < 1 \iff |z| < 1$

Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, la série converge ssi $|z| < 1$.Par suite, $\boxed{R=1}$

14°. $\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} z^n$

On passe

15°. $\sum_{n\geq 0} \frac{shn}{ch^2 n} z^n$

Il faut utiliser des équivalents. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1/e$ lorsque $n \to +\infty$ Ainsi $\boxed{R=e}$

16°. $\sum_{n\geq 0} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} z^n$

$\boxed{R=1}$

17°. $\sum_{n\geq 0} \frac{n!^2}{(2n)!} z^n$

$a_n = \frac{n!^2}{(2n)!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)}{n!^2} \to 1/4$ si $n \to +\infty$. Ainsi, $\boxed{R = 4}$

II. Développer en série entière :

1°. $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

On part de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$ dont le rayon de convergence est $R = 1$ et l'on intégre terme à terme. La série obtenue a également un RC égal à 1.

2°. $\ln(1+x)$

3°. $\frac{1}{(1-x)^2}$

4°. $\frac{1}{(1-x)^3}$

5°. $\frac{1}{1+x^2}$

6°. $arctan(x)$

7°. $ch(x)$

8°. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9°. $e^{-x} \sin x$

10°. $\frac{1}{1-x^2}$

11°. $\frac{1}{1-x^5}$

12°. $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$

III. Utilisation du Lemme d'Abel.

1°. En développant $\ln(1-x)$ au voisinage de 0, calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

2°. En développant $arctan(x)$ calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ puis $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

3°. En développant e^x et e^{-x}, calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$

4°. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} x^n$ et l'on note $f(x)$ sa somme

Déterminer le rayon de convergence, l'expression de $f(x)$ puis la valeur de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

IV. Dérivation et intégration de séries entières.

1°. On considère la série $\sum_{n\geq 0} (2x)^n$ et l'on note $S(x)$ sa somme.

1.1. Déterminer son rayon de convergence et donner l'expression de $S(x)$

1.2. Calculer $S'(x)$ et donner son développement au voisinage de 0. En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$

2°. On pose $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$

2.1. Montrer que I est convergente (on pourra poser $t = 1-u$) et calculer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{t^{n-1}}{n}$

2.2. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt \ \forall x < 1$.

En déduire la valeur de I.

3°. Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$.

3.1. Déterminer le développement en série entière de f au voisinage de $x = 0$ ainsi que son rayon de convergence.

3.2. Montrer que $f(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1}$

3.3. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$ et en déduire la valeur de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+2}$

V. Exponentielle complexe.

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n$.

1°. Déterminer le développement en série entière de $h(x) = f(x) + ig(x)$

2°. En déduire celui de $f(x)$ et de $g(x)$.

VI. Somme de série.

1°. Effectuer le développement en série entière de $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

2°. Montrer que

$$\int_0^u \frac{x^p}{x+2} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+p+1) \times 2^n} u^{n+p+1},\ u \in]0, 2[$$

$p \in \mathbb{N}$

3°. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}$

VII. Suites et séries entières.

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $\begin{cases} u_n = u_{n-1} \cos \frac{\pi}{2^n} \\ u_2 = \cos \frac{\pi}{4} \end{cases}$ et soit $(v_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par $v_n = u_n \sin \frac{\pi}{2^n}$

1°. Démontrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique et que $u_n = \frac{2}{2^n \sin(\pi/2^n)}$

2°. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3°. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $f(x)=\sum_{n\geq 2} v_n z^n$ ainsi que l'expression de sa somme.

VIII. Application aux équations différentielles.

Déterminer les solutions des équations différentielles ci dessous qui sont développables en séries entières :
1°. $y'-y=0$ 2°. $xy'-(x-2)y-1=0$ 3°. $x^2y''+x(1+x)y'-y=0$ 4°. $x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0$

IX. Série génératrice.

On appelle série génératrice d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$
On considère la suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} u_0=u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1},\ \forall n\geq 2 \end{cases}$ et l'on note $\phi(x)$ sa fonction génératrice.
On pose enfin $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$
1°. Démontrer que $\phi(x)$ vérifie l'équation $\phi(x)=1+x\phi(x)+x^2\phi(x)$
2°. En déduire une expression simple de $\phi(x)$ sous forme de fraction rationnelle.
3°. Décomposer cette fraction en éléments simples et déduire que $\forall n\geq 0,\ u_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})$

X. Famille d'équations différentielles.

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n=C_{2n}^n\ \forall n\in\mathbb{N}$ et soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ sa fonction génératrice.
Considérons les équations différentielles :

$$\begin{array}{ll} (1-4x)y'(x)-2y(x)=0 & (H) \\ (1-4x)y'(x)-2y(x)=x^n & (E_n) \end{array}$$

1°. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $f(x)$.
2°. Déterminer la dérivée de cette série et montrer que $f(x)$ est solution de (H).
3°. Expliciter $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
4°. Déterminer un polynôme qui soit solution particulière de (E_1) et en déduire toutes les solutions de cette équation.
5°. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, (E_n) admet un polynôme de degré n comme solution particulière.
6°. En déduire la forme de la solution générale de (E_n).

XI. BE 2001.

On pose $a_n(k)=\dfrac{1}{16^{n+1}(8n+k)}$, $S_k=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(k)$, $f(x)=\dfrac{x-1}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}$, $I=\int_0^1 f(x)dx$ et $J=\int_0^1 \dfrac{4-2x^3-x^4-x^5}{16-x^8}dx$
1°. Déterminer le développement en série entière de $\dfrac{x^k}{16-x^8}$ autour de 0, $k\in\mathbb{N}$
2°. Montrer que $S_k=\int_0^1 \dfrac{x^{k-1}}{16-x^8}dx$ pour $k\geq 1$
3°. Exprimer $16J$ en fonction des S_k
4°. Montrer que $I=J$
5°. Calculer I

XII.

1°. Déterminer le développement en série entière autour de 0 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ et en déduire celui de $\arctan x$
2°. On pose $\phi(x)=\dfrac{\arctan x}{x}$ si $x\neq 0$ et $\phi(0)=1$ sinon.

Déterminer le développement en série entière de $\phi(x)$ autour de 0
Quel est le rayon de convergence de cette série ?

3°. Démontrer l'égalité ci dessous :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}dx$$

4°. En développant en série entière une primitive de $\arctan x$, déterminer la valeur exacte de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

XIII. Rendre la monnaie.

On cherche à déterminer de combien de façon différentes on peut réaliser 100F avec des pièces de 1F, 2F et 5F.
1°. Développer $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1-x^2}$ et $\dfrac{1}{1-x^5}$ au voisinage de 0 et déterminer le rayon de convergence des séries obtenues.
2°. En déduire que $u(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$ est développable autour de 0 et possède un rayon de convergence ≥ 1.
On note $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ son développement.
3°. Montrer, en utilisant la définition du produit de Cauchy, que $a_n=card\{(a,b,c)\in\mathbb{N}^3/a+2b+5c=n\}$
En déduire que la solution cherchée est la nombre a_{100}
4°. On pose $P(x)=(1-x)^3(1+x)$ et $Q(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$. Trouver une relation entre $u(x), P(x)$ et $Q(x)$
5°. En posant $A(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x+1}{5}$ et $B(x)=\dfrac{x^3-x^2-3x+4}{5}$, montrer que $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$
6°. En déduire que $u(x)=\dfrac{A(x)}{Q(x)}+\dfrac{B(x)}{P(x)}$
7°. Développer en série entière $\dfrac{A(x)}{Q(x)}$ puis $\dfrac{B(x)}{P(x)}$ après avoir décomposer cette seconde fraction en éléments simples
8°. Calculer la valeur de a_{100}

XIV. Calculer les transformées en z.

1°. $u_n=1\ \forall n\in\mathbb{N}$ 2°. $u_0=1$ et $u_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ 3°. $u_n=q^n,\ q\in\mathbb{R}$ 4°. $u_n=n$ 5°. $u_n=\cos n\omega,\ \omega\in\mathbb{R}$

XV. Calculer les originaux.

1°. $\dfrac{z}{(z-2)(z+3)}$ 2°. $\dfrac{1}{(z-2)(z+3)}$ 3°. $\dfrac{z}{(z-2)^2}$ 4°. $\dfrac{z^2}{z^2-3z+2}$

XVI. Equations aux différences finies.

Déterminer la ou les suites satisfaisant à :

$$\begin{cases} u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = n \\ u_0 = 2, u_1 = 0 \end{cases}$$

XVII. Filtrage numérique.

On considère une chaine de traitement numérique définie de la façon suivante :
Si l'entrée correspond à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et la sortie à $(v_n)_{n\geq 0}$, alors $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
1°. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du système et calculer sa réponse impulsionnelle.
2°. Même question si l'action du filtre est donnée par $v_n = \alpha u_n - \beta v_{n-1}$