Fonctions de densité et de répartition.

I.

Déterminer α pour que les fonctions $f(x)$ ci-dessous soient des densités de probabilités. Dans chaque cas, calculer Calculer $\mathbb{P}[X > 1]$ et $\mathbb{P}[X = 0]$ si X est une variable aléatoire de densité $f(x)$.

1°. $x^2 \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x)$. 2°. $\alpha e^x \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x)$ 3°. $\dfrac{\alpha}{\cosh(x)}$

4°. $\dfrac{\alpha}{x^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ 5°. $2\alpha x e^{-\alpha x^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ 6°. $\alpha \sin x \mathbb{1}_{[0,\pi[}(x)$

II.

Soit $\dfrac{1}{x}\mathbb{1}_{[1,\alpha]}(x)$

1°. Déterminer α pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité.
2°. Calculer alors $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 2]$

III.

Soit $\alpha(4x - x^2)\mathbb{1}_{[0,4]}(x)$

1°. Déterminer α pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité.
2°. Calculer alors $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[1 \leq X \leq 3]$

IV.

Soit $f(x) = cx(1 - x)\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ avec $c > 0$ et $a < b$.
1°. Déterminer a, b pour que f soit continue et positive, puis c pour que f soit une densité de probabilité.
2°. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$.
3°. Soit $Y = \alpha X + \beta$. A quelles conditions sur α et β X et Y sont-elles corrélées ?
4°. Déterminer la densité $g(y)$ de Y et calculer α et β pour que X et Y possèdent la même loi.

V.

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
1°. Rappeler quelle est la densité de $f(x)$.
2°. Calculer $\mathbb{P}[-1 < X < 0]$, $\mathbb{P}[X \geq 1]$ et $\mathbb{P}[X = 1]$.
3°. Déterminer $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{var}(X)$, $\sigma(X)$ et tracer sa fonction de répartition.

VI.

1°. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Calculer $\mathbb{P}[X < \ln 2]$ et $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 2]$.
2°. Soit X suivant une loi de Cauchy. Calculer $\mathbb{P}[X < \sqrt{3}]$, $\mathbb{P}[-1 < X < 1]$ et $\mathbb{P}[X > 0]$
3°. Soit X suivant une loi de Laplace. Calculer $\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 2]$ et $\mathbb{P}[X = 0]$.

VII.

Calculer espérance, variance et écart type pour les lois ci dessous :

1°. Loi exponentielle de paramètre λ.
2°. Loi de Laplace.
3°. Loi de Cauchy.
4°. Loi triangulaire de densité $f(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

VIII.

1°. Déterminer la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X de loi de Laplace.
2°. Etudier F et tracer sa courbe représentative. Calculer $\mathbb{P}[X \leq 3]$ et $\mathbb{P}[X > 1]$

IX.

Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(s) = 1 - e^{-s/2}$ si $s \geq 0$ et $F(s) = 0$ sinon.
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.
1° Calculer $\mathbb{P}[X \leq 2]$ et $\mathbb{P}[0 < X < 1]$

2°. Déterminer la densité $f(x)$ de X. De quelle loi s'agit-il ?

X.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$ lorsque X et Y sont indépendantes et suivent les lois ci dessous :

1°. X et Y suivent une loi exponentielle de paramètre λ.
2°. X et Y suivent une loi uniforme sur $[-1, 1]$.
3°. X suit une loi exponentielle de paramètre λ et Y une loi uniforme sur $[0, 1]$.

XI.

Soit X une loi exponentielle de paramètre 1. Calculer $\mathbb{P}([X \geq 1/X \leq 2])$

Calculs sur les lois usuelles.

XII. Partie entière d'une loi exponentielle.

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.
Soit $Y = [X]$ la partie entière de X (ie le plus grand entier inférieur ou égal à X)
1°. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
2°. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; exprimer $[Y = k]$ en fonction de X.
3°. En déduire $\mathbb{P}[Y = k]$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et déterminer la loi de Y

XIII. Somme de deux lois uniformes.

1°. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $X + Y$.
2°. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X de loi uniforme sur $[0, n]$. Quelle est la loi de $Y = [X]$, partie entière de X ?

XIV. Loi Gamma.

Soit $h(x) = \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}$ si $x > 0$ et $h(x) = 0$ sinon ($n \in \mathbb{N}^*$).
1°. Après avoir justifier la convergence de l'intégrale généralisée, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = (n-1)!$
(on pourra raisonner par récurrence et effectuer une intégration par parties).
2°. En déduire que $f(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité.
Cette loi s'appelle loi Gamma de paramètres n et λ. On la notera $\Gamma(n, \lambda)$.
3°. Quelle est la loi $\Gamma(1, \lambda)$?
4°. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Soit $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Démontrer que S suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$, calculer $\mathbb{E}[S]$ et $\mathrm{var}(S)$.

XV. Minimum de lois exponentielles.

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.
Soient M_n la variable définie par $M_n = min(X_1, X_2, ..., X_n)$
1°. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $[M_n \geq t]$ en fonction de $[X_1 \geq t]$, $[X_2 \geq t]$, ..., $[X_n \geq t]$ et en déduire que $\mathbb{P}[M_n \geq t] = (\mathbb{P}[X_1 \geq t])^n$
2°. En déduire l'expression de F, fonction de répartition de la variable M_n.
3°. Déterminer la densité de cette variable aléatoire.
4°. Reprendre l'exercice pour calculer le minimum de deux lois uniformes sur $[0, 1]$.

XVI. Minimum de lois uniformes.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z = min(X, Y)$

1°. Donner l'expression de la densité f de X et de Y et celle de leur fonction de répartition F
2°. Quelles sont les valeurs possibles de Z ?
3°. On note ϕ la fonction de répartition de Z. Donner une relation entre $[X > t]$, $[Y > t]$ et $[Z > t]$ $\forall t \in \mathbb{R}$
En déduire que $\phi(t) = 1 - (1 - F(t))^2$ $\forall t \in \mathbb{R}$

4°. A l'aide de la question précédente et des propriétés de la fonction de répartition, exprimer la densité g de Z en fonction de F. Représenter g et calculer $\mathbb{P}[Z > \frac{1}{2}]$

XVII. Changement de variables.

On considère une variable aléatoire X de densité $f(x)$ suivant une loi de Laplace.
On définit la variable aléatoire Y par $Y = |X|$

1°. Démontrer que f est bien une densité de probabilité.
2°. Calculer $\mathbb{P}[X \geq 2]$, $\mathbb{P}[X < 0]$ et $\mathbb{P}[X = 0]$

3°. Déterminer l'expression de la fonction de répartition $F(s)$ de la variable X
4°. Soit $G(s)$ la fonction de répartition de Y
Exprimer $G(s)$ en fonction de F (on distinguera $s > 0$ de $s < 0$)

5°. En déduire la densité $g(x)$ de la variable aléatoire Y. Quelle est la loi de Y ?

6°. X suit maintenant une loi uniforme sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et l'on pose $Y = \tan X$
Soit F la fonction de répartition de X et G la fonction de répartition de Y.
Démontrer que $G(s) = F(\arctan s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$. En déduire sa densité et reconnaitre cette loi.

XVIII.

Soit $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ la densité d'une variable aléatoire X.

1°. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{P}[0 \leq X < 1]$ et déterminer sa fonction de répartition $F(s)$ (on distinguera $s \geq 0$ et $s < 0$).
2°. On pose $Y = \exp(X)$. Quelles valeurs peut prendre Y ?
Soit $G(s)$ la fonction de répartition de Y. Montrer que $G(s) = F(\ln s)$ puis en déduire l'expression de $G(s)$ et la densité $g(s)$ de Y.

XIX.

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $X = \tan(\pi(U - 1/2))$

XX.

Soit $f(x) = ax^{(a+1)/a}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$

1°. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2°. Calculer alors sa fonction de répartition et son espérance.
3°. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ indépendantes de même loi de densité f et l'on pose $T_n = \min(X_1, ..., X_n)$. Quelle est la loi de T_n ?
4°. On pose $Z = \ln X$. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Loi normale.

XXI.

Z est une variable de loi normale centrée réduite et X une loi normale $\mathcal{N}(-1, 2)$.
1°. Calculer $\mathbb{P}[Z \geq 0]$, $\mathbb{P}[Z \geq 1]$, $\mathbb{P}[Z \leq -1]$, $\mathbb{P}[-1 < Z < \frac{1}{2}]$, $\mathbb{P}[|Z| \leq 1]$.
2°. Calculer $\mathbb{P}[X \geq -1]$, $\mathbb{P}[X > 1]$, $\mathbb{P}[|X| \leq 1]$.
3°. Soit Y une variable aléatoire normale telle que $\mathbb{P}[Y < 3] = \mathbb{P}[Y > -1] = 0.8413$. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{var}(Y)$.

XXII.

Le poids d'une bouteille d'eau suit une loi normale $\mathcal{N}(1550, 30)$. Quelle est la loi suivie par le poids d'un pack de 6 bouteilles ? Quelle est la probabilité pour que le pack pèse plus de $9,4kg$?

XXIII.

Une machine fabrique des résistances indépendantes dont la valeur nominale en ohms suit une loi normale $\mathcal{N}(100, 3)$ et une autre des résistances dont la valeur suit une loi normale $\mathcal{N}(200, 4)$.
Quelle est la loi suivie par la résistance équivalente à deux de ces résistances montées en série ?

XXIV.

Le nombre d'usagers se présentant à un guichet entre $12h$ et $13h$ suit une loi de Poisson de paramètre 20.
Quelle est la probabilité pour qu'il se présente un jour donné entre 18 et 22 personnes ? Plus de 30 personnes ? Moins de 10 personnes ?

XXV.

Une ligne de transmission transporte des fichiers, chaque fichier étant constitué de 10^5 bits (caractères, info de transmission ou de contrôle). La probabilité qu'un bit soit erroné est $p = 0.001$ et l'on admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs dans la transmission d'un fichier donné.

1°. Quelle est la loi de X ? Quels sont les paramètres ?
2°. Déterminer la probabilité pour qu'un fichier contienne moins de 90 erreurs.
3°. Déterminer p pour que $\mathbb{P}[X \leq 30] = 0.9875$ et $\mathbb{P}[X \geq 17] = 0.7486$
4°. On améliore la qualité de transmission afin que $p = 10^{-5}$
Par quelle loi peut-on approcher X ? Pourquoi ? Calculer alors $\mathbb{P}[X \leq 1]$

XXVI.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(1,1)$ et $\mathcal{N}(1,-1)$.

1°. Déterminer la loi de $X+Y$ et celle de $X-Y$.
2°. Calculer $\mathbb{P}[X=Y]$ puis $\mathbb{P}[X \geq Y]$
3°. On lance 600 fois un dé équilibré à 6 faces et l'on note X le nombre de 1 obtenus. Calculez $\mathbb{P}[X>110]$ et $\mathbb{P}[90 \leq X \leq 110]$. Combien obtient-on de 1 en moyenne au cours de ces 600 lancers ?

XXVII.

Soient X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire prenant comme valeurs -1 et 1 avec probabilités respectives p et $1-p$.

1°. Déterminer la loi de XY, ainsi que celle de X^2.
2°. Déterminer la loi de $Z=\exp(X)$ ainsi que son espérance.

XXVIII.

La durée de vie d'une ampoule électrique suit une loi normale de paramètres $m=457h$ et $\sigma=20h$

1°. Calculer la probabilité qu'une ampoule dure plus de $490h$
2°. Quelle est la durée de vie minimale atteinte par 80% des ampoules.

3°. On considère un lot de 100 ampoules indépendantes et l'on note Y le nombre d'ampoules qui fonctionnent au delà de $490h$. Quelle est la loi de Y ? Calculer $\mathbb{P}[Y>10]$

4°. On considère maintenant un lot de 1000 ampoules.
Déterminer le nombre moyen d'ampoules qui fonctionnent plus de $490h$. Calculer $\mathbb{P}[36 \leq Y \leq 64]$

On met au point un nouveau type d'ampoule dont la durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.001h$
5°. Calculer la probabilité qu'une ampoule fonctionne au delà de $500h$
6°. Si l'on souhaite utiliser des ampoules qui durent plus de $500h$, quel type d'ampoules vaut-il mieux choisir ?

XXIX.

La durée de vie d'un disque dur suit une loi normale de moyenne $m=80\ 000$ heures et d'écart type $\sigma = 10\ 000$ heures.

1°. Quelle est la probabilité que le disque fonctionne au delà de 100 000 heures ?
Quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 70 000 heures ?

2°. La transmission des données depuis le disque dur se fait avec une probabilité d'erreur de 10^{-12} par bit. On transfert un fichier de 1 Go. Quelle est la probabilité qu'une erreur de produise durant le transfert ? Quel est le nombre moyen d'erreur pour un tel fichier ?

3°. Quelle devra être la taille du fichier pour qu'une erreur se produise avec une probabilité de 0.2 ?

XXX.

Des ordinateurs sont fabriqués à la chaine de façon indépendante les uns des autres.
La probabilité qu'un PC soit défectueux est $p=10^{-2}$. Un entreprise commande 100 ordinateurs.
On note X le nombre de PC défectueux dans cette commande.

1°. Quelle est la loi suivie par X ? Quelle est la probabilité qu'au moins un PC soit en panne ?
2°. Quel est le nombre moyen de PC défectueux dans cette commande ?

On améliore la qualité des PC en les testant avant la vente. On a alors $p = 2 \times 10^{-3}$
On prendra $npq = 16$. Durant un mois, la société fabrique 8000 PC.

3°. Calculer le nombre moyen de PC défectueux dans le stock, après que les tests aient été effectués.

4°. On approche la loi de X par une loi normale.
Quelle est la probabilité que plus de 10 ordinateurs soient défectueux ?
Quelle est la probabilité que le nombre d'ordinateurs défectueux soit compris entre 10 et 20 ?

XXXI.

On considère un composant électronique qui a une probabilité $p=10^{-5}$ d'être défectueux. On étudie un échantillon de 10 000 composants indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de composants défectueux dans cet échantillon.

1°. Quel est le nombre moyen de composants défectueux ?

2°. Calculer $\mathbb{P}[X = 0]$ et $\mathbb{P}[X > 2]$.
3°. Soit Y la durée de vie d'un composant. Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/3$ (en années). Déterminer $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{var}(Y)$, puis calculer $\mathbb{P}[Y > 3]$ et $\mathbb{P}[Y > 5]$

XXXII.

Soit T le temps d'émission aléatoire d'une source d'électrons et $f(t)$ la densité de T.

1°. Exprimer sous forme d'intégrale $\mathbb{P}[s < T \leq t]$, $0 < s < t$.
2°. Calculer $\mathbb{P}[T > t + s/T > s]$
3°. Effectuer le calcul ci-dessus lorsque $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.
4°. Une variable aléatoire possède la propriété d'absence de mémoire si $\mathbb{P}[T > t + s/T > s] = \mathbb{P}[T > t]$. Montrer qu'alors sa densité est nécessairement celle d'une loi exponentielle.
5°. Si $\lambda = 2$, calculer le temps moyen d'émission d'un électron et la probabilité d'attendre 2 unités de temps après une heure d'attente sans émission.

XXXIII.

Trouver le nombre de jets de dés à partir duquel la probabilité pour que la moyenne des points obtenus diffère d'au plus 1/50 soit supérieure à 0.95

XXXIV.

On effectue 100 lancers à pile ou face avec une pièce équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir 40 faces ? au plus 50 piles ? Au moins 40 et au plus 50 ?

XXXV.

Soit X une variable aléatoire binomiale telle que $\mathbb{P}[X < 96240] = 0.8413$ et $\mathbb{P}[X < 95640] = 0.0668$
Calculer les paramètres n et p de cette loi ?

XXXVI.

Si on admet que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.5, quelle probabilité a-t-on (à 1/100 près) dans une marternité où sont nés 576 enfants, d'avoir plus de 300 naissances de filles ?

XXXVII

Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne $m = 3$ et d'écart type $\sigma = 1$.
Quelles sont les valeurs a et b pour que $\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[a \leq X \leq B] = \mathbb{P}[b \leq X] = \dfrac{1}{3}$

XXXVIII.

Des données binaires indépendantes sont transmises sur un canal radio. La probabilité d'erreur par bit est $p = 2 \times 10^{-6}$. On transmet une communication composée de $n = 10^7$ bits sur ce canal et l'on note X le nombre d'erreurs durant la transmission.

1°. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{var}(X)$.

2°. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
Calculer $\mathbb{P}[X \geq 15]$ et $\mathbb{P}[18 \leq X \leq 22]$

3°. On améliore la transmission afin d'obtenir $p = 10^{-7}$.
Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? Calculer $\mathbb{P}[X = 0]$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[X = 4]$

4°. Lorsque de nombreux obstacles dispersent le signal radio, le modèle de canal habituellement utilisé est le canal à évanouissement de Rayleigh. Dans ce cas, l'enveloppe du signal est une variable aléatoire Y de densité

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \times \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

Démontrer qu'il s'agit bien d'une densité de variable aléatoire et calculer $\mathbb{P}[Y \geq 1]$

Processus de Poisson et files d'attente.

XXXIX.

On s'intéresse aux appels arrivant à un central téléphonique.
Soit N_t la variable aléatoire égale au nombre d'appels s"étant produits pendant l'intervalle de temps $[0, t[$.
On admet que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

1°. Déterminer le nombre moyen d'appels durant l'intervalle $[0, t[$ et le nombre moyen par unité de temps.

2°. Calculer, en fonction de λ et t, la probabilité qu'au moins un appel survienne entre 0 et t.

3°. L'unité de temps étant la minute, on pose $\lambda = \frac{5}{6}$. Calculer $\mathbb{P}[N_t \geq 2]$

4°. Soit X la variable aléatoire égale à la durée écoulée entre deux appels consécutifs. X est-elle une variable discrète ou continue ? Exprimer, par une phrase en français (sans faute), la signification des évènements $[N_t = 0]$ et $[X > t]$. Donner une relation simple entre ces deux évènements et en déduire $\mathbb{P}[X > t]$

5°. Soit $F(t)$ la fonction de répartition de X. A l'aide de la question précédente, déterminer l'expression de $F(t)$ en fonction de λ et t (on distinguera $t > 0$ et $t \leq 0$). En déduire la loi de X et sa densité.

6°. Déterminer le temps moyen entre deux appels consécutifs.