MATHEMATIQUES TD N°6 : VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES - CORRIGE.

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2009/2010

Fonctions de densité et de répartition.

I.

Déterminer α pour que les fonctions $f(x)$ ci-dessous soient des densités de probabilités. Dans chaque cas, calculer Calculer $P[X > 1]$ et $P[X = 0]$ si X est une variable aléatoire de densité $f(x)$.

1°. $x^2 \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x)$

f est continue par morceaux et positive. Par ailleurs,
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \iff \alpha = \sqrt[3]{3/2}$

$\mathbb{P}[X > 1] = 1/6$ et $\mathbb{P}[X = 0] = 0$

2°. $\alpha e^x \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x)$

$\mathbb{P}[X > 1] = 1$ et $\mathbb{P}[X = 0] = 0$

f est continue par morceaux et positive. Par ailleurs,
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \iff \alpha = 1$

3°. $\dfrac{\alpha}{\mathrm{ch}(x)}$

f est continue par morceaux et positive. Par ailleurs,
$\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha du}{1+u^2}$ en posant $u = e^x$ et cette intégrale vaut π. Donc $\alpha = 1/\pi$

4°. $\dfrac{\alpha}{x^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$

Cette fonction est continue par morceaux et positive (si α l'est). C'est une densité ssi
$\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx = (-\alpha/x)_1^{\infty} = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

5°. $2\alpha x e^{-\alpha x^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

6°. $\alpha \sin x 1_{[0,\pi[}(x)$

II.

Soit $\dfrac{1}{x}\mathbb{1}_{[1,\alpha]}(x)$

1°. Déterminer α pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité.

$f(x)$ est continue par morceaux, positive. C'est une densité de proba ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
$\iff \int_1^{\alpha} dx/x = 1 \iff \alpha = e$

2°. Calculer alors $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 2]$

$\mathbb{E}[X] = \int_1^e xf(x)dx = \int_1^e dx = e - 1$
$\mathbb{E}[X^2] = \int_1^e x^2 f(x)dx = \int_1^e xdx = (e^2 - 1)/2$
$\Rightarrow \mathrm{var}(X) = 2e - e^2/2 - 3/2$

$\mathbb{P}[X = 1] = 0$ car on a à faire à une loi à densité.
$\mathbb{P}[0 \leq X \leq 2] = \int_1^2 dx/x = \ln 2$

III.

Soit $\alpha(4x - x^2)\mathbb{1}_{[0,4]}(x)$

1°. Déterminer α pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité.
2°. Calculer alors $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[1 \leq X \leq 3]$

IV.

Soit $f(x) = cx(1 - x)\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ avec $c > 0$ et $a < b$.
1°. Déterminer a, b pour que f soit continue et positive, puis c pour que f soit une densité de probabilité.
2°. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$.
3°. Soit $Y = \alpha X + \beta$. A quelles conditions sur α et β X et Y sont-elles corrélées ?
4°. Déterminer la densité $g(y)$ de Y et calculer α et β pour que X et Y possèdent la même loi.

V.

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
1°. $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

2°. $\mathbb{P}[-1 < X < 0] = 1/2$ par symétrie de f,
$\mathbb{P}[X \geq 1] = \mathbb{P}[X = 1] = 0$

3°. $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathrm{var}(X) = (\beta - \alpha)^2/12 = 1/3$ et $\sigma(X) = \sqrt{3}/3$
La fonction de répartition est affine par morceaux : nulle avant -1, égale à 1 après 1 et d'équation $x/2 + 1/2$ entre -1 et 1

VI.

1°. $\mathbb{P}[X < \ln 2] = \int_0^{\ln 2} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - 1/2^{\lambda}$
$\mathbb{P}[0 \leq X \leq 2] = 1 - e^{-2\lambda}$.

2°. $\mathbb{P}[X < \sqrt{3}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = 5/6$
$\mathbb{P}[-1 < X < 1] = 1/2$ et $\mathbb{P}[X > 0] = 1/2$

3°. $\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 2] = 1 - (1/2)(1/e + 1/e^2)$ et $\mathbb{P}[X = 0] = 0$.

VII.

Calculer espérance, variance et écart type pour les lois ci dessous :

1°. $\displaystyle\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}dx = 1/\lambda$ en intégrant par parties. $\displaystyle\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx = 2/\lambda^2$ en effectuant une double intégration par parties. Par suite, $\mathrm{var}(X) = 1/\lambda^2$ et $\sigma = 1/\lambda$

2°. Par symétrie, $\mathbb{E}[X] = 0$ et par calcul $\mathrm{var}(X) = 2$

3°. $xf(x)$ n'est pas intégrable et par suite, l'espérance et la variance n'existent pas.

4°. $\mathbb{E}[X] = 0$ et par calcul $\mathrm{var}(X) = 1/6$

VIII.

1°. Déterminer la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X de loi de Laplace.

$F(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{-|x|}dx/2$.
Si $s < 0$, $F(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{x}dx/2 = e^{s}/2$ Si $s > 0$,
$F(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx/2 + \int_{0}^{s} e^{-x}dx/2 = 1 - e^{-s}/2$

2°. Etudier F et tracer sa courbe représentative.
Calculer $\mathbb{P}[X \leq 3]$ et $\mathbb{P}[X > 1]$

$\mathbb{P}[X \leq 3] = F(3) = 1 - e^{-3}/2$ et
$\mathbb{P}[X > 1] = 1 - F(1) = e^{-1}/2$

IX.

Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$F(s) = 1 - e^{-s/2}$ si $s \geq 0$ et $F(s) = 0$ sinon.
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.
1° Calculer $\mathbb{P}[X \leq 2] = F(2) = 1 - 1/e$ et
$\mathbb{P}[0 < X < 1] = F(1) - F(0) = 1 - 1/\sqrt{e}$

2°. $F'(s) = 0$ si $x < 0$ et $F'(s) = e^{-s/2}/2$ si $x \geq 0$.
Ainsi, $f(s) = (1/2)e^{-s/2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(s)$. C'est donc une loi exponentielle de paramètre $1/2$

X.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$ lorsque X et Y sont indépendantes et suivent les lois ci dessous :

1°. X et Y suivent une loi exponentielle de paramètre λ.

Z a pour densité $f * f(s) = \lambda^2 s e^{-\lambda s}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(s)$ que l'on trouve après de longs calculs...

2°. X et Y suivent une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Z a pour densité
$h(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(s-x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)dx$
$\mathbb{1}_{[-1,1]}(s - x) = 1$ ssi $x - 1 \leq s \leq x + 1$. Ainsi,
$h(s) = 0$ si $x \notin [-2, 2]$ et l'on obtient après calculs
$h(s) = \dfrac{1}{4}(2 - |s|)\mathbb{1}_{[-2,2]}(s)$ qui est une loi triangulaire sur $[-2, 2]$.

3°. X suit une loi exponentielle de paramètre λ et Y une loi uniforme sur $[0, 1]$.

$h(s) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda(s-x)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx$
$= \lambda e^{-\lambda s}\displaystyle\int_{0}^{1} e^{\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(s-x)dx$
$= (1 - e^{-\lambda s})\mathbb{1}_{[0,1]}(s) + (e^{\lambda} - 1)e^{-\lambda s}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(s)$

XI.

Soit X une loi exponentielle de paramètre 1. Calculer $\mathbb{P}([X \geq 1/X \leq 2])$

$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$
Ici, $A = [X \geq 1]$, $B = [X \leq 2]$ et $A \cap B = [1 \leq X \leq 2]$
$\mathbb{P}[1 \leq X \leq 2] = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$ et $\mathbb{P}[X \leq 2] = 1 - e^{-2\lambda}$
$\mathbb{P}([X \geq 1/X \leq 2]) = (e - 1)/(e^2 - 1)$

Calculs sur les lois usuelles.

XII.

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.
Soit $Y = [X]$ la partie entière de X (ie le plus grand entier inférieur ou égal à X)
1°. Quelles sont les valeurs possibles de Y :
$Y = 0, 1, 2, ...$
Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$

2°. $[Y = k]$="la partie entière de X est k". Ainsi,
$[Y = k] = [k \leq X < k + 1]$

3°. $\mathbb{P}[Y = k] = \displaystyle\int_{k}^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$
Il s'agit donc d'une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1 - e^{-\lambda}$

XIII.

1°. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $X + Y$.
2°. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X de loi uniforme sur $[0, n]$. Quelle est la loi de $Y = [X]$, partie entière de X ?

XIV. Loi Gamma.

Soit $h(x) = \lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}$ si $x > 0$ et $h(x) = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
1°. Après avoir justifier la convergence de l'intégrale généralisée, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = (n - 1)!$
(on pourra raisonner par récurrence et effectuer une intégration par parties).

En 0, $f(0) = 0$ et l'intégrale existe. En l'∞, comme $x^n e^{-\lambda x} \to 0$, il existe $X > 0$ tel que pour tout $x > X$, $x^n e^{-\lambda x} < 1/x^2$ qui est intégrable par critère de majoration.

Si $n = 1$, $I_1 = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1$ donc $I_0 = 1$
Posons comme hypothèse de récurrence $I_n = (n - 1)!$
On a alors
$I_{n+1} = \left[\lambda^{n+1}x^n - e^{-\lambda x}/\lambda\right]_0^{\infty} + n\displaystyle\int_{0}^{\infty} \lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}dx$
$I_{n+1} = nI_n$. On a donc $\forall n \geq 1,\ I_n = (n - 1)!$

2°. En déduire que
$f(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité.
Cette loi s'appelle loi Gamma de paramètres n et λ.
On la notera $\Gamma(n, \lambda)$.

On voit facilement que $f(x)$ est positive, continue par morceaux et la question précédente montre que son intégrale vaut 1 ; c'est donc une densité de probabilité.

3°. Quelle est la loi $\Gamma(1, \lambda)$: C'est la loi exponentielle de paramètre λ.

4°. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. Soit $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Démontrer que S suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$, calculer $E[S]$ et $\text{var}(S)$.

On a déjà vu que $X_1 + X_2$ a pour densité $\lambda^2 s e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s)$ qui représente la loi $\Gamma(2, \lambda)$. Supposons que $X_1 + ... + X_{n-1}$ suive une loi $\Gamma(n-1, \lambda)$. Alors par indépendance des X_k, $S = (X_1 + ...X_{n-1}) + X_n$ a pour densité

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(s-x)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s-x)...$$

$$...\lambda^{n-1} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x)} x^{n-2} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s-x) dx$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s)$$

qui est la densité de $\Gamma(n, \lambda)$
$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = n/\lambda$. De même, par indépendance $\text{var}(S) = n/\lambda^2$, ie $\sigma = \sqrt{n}/\lambda$. De la même façon, on montre que $\Gamma(n, \lambda) + \Gamma(p, \lambda) = \Gamma(n+p, \lambda)$

XV.

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.
Soient M_n la variable définie par $M_n = min(X_1, X_2, ..., X_n)$
1°. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $[M_n \geq t]$ en fonction de $[X_1 \geq t]$, $[X_2 \geq t]$, ..., $[X_n \geq t]$ et en déduire que $\mathbb{P}[M_n \geq t] = (\mathbb{P}[X_1 \geq t])^n$

$[M_n \geq t] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k \geq t]$ et par indépendance des X_k :

$\mathbb{P}[M_n \geq t] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}[X_k \geq t] = (\mathbb{P}[X_1 \geq t])^n = (e^{-\lambda t})^n$

2°. En déduire l'expression de F, fonction de répartition de la variable M_n.

$F(t) = \mathbb{P}[M_n \leq t] = 1 - (e^{-\lambda n t})$ si $t > 0$ et 0 si $t \leq 0$
Il s'agit donc d'une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$

3°. Déterminer la densité de cette variable aléatoire.

$\mathbb{P}[X \geq t] = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t 1_{[0,1]}(x) dx$
$[Z > t] = [X > t] \cap [Y > t]$; par indépendance, on a donc $\mathbb{P}[Z > t] = \mathbb{P}[X > t]\mathbb{P}[Y > t]$
$\Rightarrow \phi(t) = \mathbb{P}[Z \leq t] = 1 - (1 - F(t))^2$
$g(x)$ densité de Z est telle que $g(x) = \phi'(x)$
$g(x) = 2F'(x)(1 - F(x)) = 0$ si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ et $g(x) = 1 - F(x)$ si $s \in]0, 1[$

XVI.

Soient X et Y deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Z = min(X, Y)$

1°. $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

2°. Quelles sont les valeurs possibles de Z ?

Z prend ses valeurs dans $[0, 1]$ de façon continue.

3°. On note ϕ la fonction de répartition de Z. Donner une relation entre $[X > t]$, $[Y > t]$ et $[Z > t]$ $\forall t \in \mathbb{R}$
En déduire que $\phi(t) = 1 - (1 - F(t))^2$ $\forall t \in \mathbb{R}$

D'après les propriétés du minimum, $[Z > t] = [X > t] \cap [Y > t]$. Ainsi, $\mathbb{P}[Z > t] = \mathbb{P}[X > t]\mathbb{P}[Y > t]$ par indépendance de X et Y. Comme $F(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$, alors $1 - \phi(t) = (1 - F(t))^2$, ie $\phi(t) = 1 - (1 - F(t))^2$

4°. A l'aide de la question précédente et des propriétés de la fonction de répartition, exprimer la densité g de Z en fonction de F. Représenter g et calculer $\mathbb{P}[Z > \frac{1}{2}]$

La densité de Z est la dérivée de sa fonction de répartition : $g(x) = \phi'(x) = 2F'(x)(1 - F(x))$
Si $x \leq 0$, $g(x) = 0$. Si $x \geq 1$, $F(x) = 1$ donc $g(x) = 0$.
Enfin, si $0 < x < 1$, $F'(x) = 1$ donc $g(x) = 1 - F(x)$
$\mathbb{P}[Z > \frac{1}{2}] = 1 - \phi(1/2) = 1/4$

XVII.

On considère une variable aléatoire X de densité $f(x)$ suivant une loi de Laplace.
On définit la variable aléatoire Y par $Y = |X|$

1°. Démontrer que f est bien une densité de probabilité.

On rappelle que X a pour densité $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$
Un calcul fait en cours et plusieurs fois en TD donne $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, ce qui prouve que la fonction est une densité de probabilité (en outre elle est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

2°. Calculer $\mathbb{P}[X \geq 2]$, $\mathbb{P}[X < 0]$ et $\mathbb{P}[X = 0]$

$$\mathbb{P}[X \geq 2] = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-x}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-2}$$

Par parité de la fonction de densité, $\mathbb{P}[X < 0] = \frac{1}{2}$

Enfin, par définition de la densité, on a bien entendu $\mathbb{P}[X = 0] = 0$

3°. Déterminer l'expression de la fonction de répartition $F(s)$ de la variable X

Là aussi, le résultat a déjà été vu en cours comme en TD. On a $F(s) = \frac{1}{2} e^s$ si $s < 0$ et $F(s) = 1 - \frac{1}{2} e^{-s}$ si $s \geq 0$.

4°. Soit $G(s)$ la fonction de répartition de Y
Exprimer $G(s)$ en fonction de F (on distinguera $s > 0$ de $s < 0$)

$G(s) = \mathbb{P}[Y \leq s] = \mathbb{P}[|X| \leq s]$
Si $s \leq 0$, cette probabilité est nulle. Si $s > 0$, On a $G(s) = \mathbb{P}[-s \leq X \leq s] = F(s) = -F(-s) = 1 - e^{-s}$

On reconnait la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$

5°. En déduire la densité $g(x)$ de la variable aléatoire Y. Quelle est la loi de Y ?

$g(x) = G(x)' = e^{-x}$ si $x > 0$ et 0 sinon.

6°. X suit maintenant une loi uniforme sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et l'on pose $Y = \tan X$
Soit F la fonction de répartition de X et G la fonction de répartition de Y.
Démontrer que $G(s) = F(\arctan s)\ \forall s \in \mathbb{R}$. En déduire sa densité et reconnaitre cette loi.

XVIII.

Soit $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ la densité d'une variable aléatoire X.

1°. $\mathbb{E}[X] = 1$, $\mathbb{P}[0 \le X < 1] = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - 1/e$
$F(s) = \int_0^s e^{-x}dx = 1 - e^{-s}$ si $s \ge 0$ et 0 sinon.

2°. On pose $Y = \exp(X)$. Quelles valeurs peut prendre Y ? Soit $G(s)$ la fonction de répartition de Y. Montrer que $G(s) = F(\ln s)$ puis en déduire l'expression de $G(s)$ et la densité $g(s)$ de Y.

$Y = e^X$ prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et
$Y = e^X \iff X = \ln Y$. On a alors
$G(s) = \mathbb{P}[Y \le s] = \mathbb{P}[\ln Y \le \ln s] = F(\ln s)$ si $s \ge 1$ et 0 sinon.
$\Rightarrow G(s) = 1 - e^{-\ln s} = 1 - 1/s$ si $s \ge 1$
$\Rightarrow G(s) = (1 - 1/s)\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(s)$
En dérivant, on obtient $g(s) = 1/s^2 1_{[1,+\infty[}(s)$

XIX.

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$.
Déterminer la loi de $X = \tan(\pi(U - 1/2))$

XX.

Soit $f(x) = ax^{(a+1)/a}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$

1°. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2°. Calculer alors sa fonction de répartition et son espérance.
3°. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ indépendantes de même loi de densité f et l'on pose $T_n = \min(X_1, ..., X_n)$. Quelle est la loi de T_n ?
4°. On pose $Z = \ln X$. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Loi normale.

XXI.

Z est une variable de loi normale centrée réduite et X une loi normale $\mathcal{N}(-1, 2)$.

1°. $P[Z \ge 0] = 1/2$, $P[Z \ge 1] = 1 - \mathbb{P}[Z \le 1] = 0.1587$,
$P[Z \le -1] = P[Z \ge 1] = 0.159$,
$\mathbb{P}[-1 < Z < \frac{1}{2}] = \pi(1/2) - \pi(-1) = 0.5328$,
$\mathbb{P}[|Z| \le 1] = 2\pi(1) - 1 = 0.6826$.

2°. On pose $Z = (X - m)/\sigma$ pour centrer et réduire la variable aléatoire. On peut alors utiliser la loi de l'écart réduit.
$P[X \ge -1] = \mathbb{P}[Z \ge 0] = 1/2$,
$P[X > 1] = \mathbb{P}[Z > 1] = 0.1587$,
$\mathbb{P}[|X| \le 1] = \mathbb{P}[-1 < X < 1] = 0.3413$.

3°. $P[Y < 3] = P[Y > -1] = 0.8413$
$$\iff \begin{cases} m + \sigma = 3 \\ m - \sigma = -1 \end{cases} \quad \text{ie } Y \sim \mathcal{N}(1, 2)$$

XXII.

Le poids d'une bouteille d'eau suit une loi normale $\mathcal{N}(1550, 30)$. Quelle est la loi suivie par un pack de 6 bouteilles ? Quelle est la probabilité pour que le pack pèse plus de $9,4kg$?

On peut admettre que les poids sont indépendants. Si Y est le poids total, $Y = X_1 + ... + X_6$ où X_k suit une loi $\mathcal{N}(9300, 30)$. En ce cas, $Y \sim \mathcal{N}(6 \times 9300, \sqrt{6} \times 30)$
On cherche $\mathbb{P}[Y \ge 9400] = \mathbb{P}[Z \ge 1.36] =$
$1 - \pi(1.36) = 1 - 0.9131 = 0.0869$

XXIII.

Une machine fabrique des résistances dont la valeur nominale en ohms suit une loi normale $\mathcal{N}(100, 3)$ et une autre des résistances dont la valeur suit une loi normale $\mathcal{N}(200, 4)$.
Quelle est la loi suivie par la résistance équivalente à deux de ces résistances montées en série ?

On suppose ces résistances indépendantes. La valeur de la résistance équivalente est la somme des deux résistances. R suit donc une loi normale
$\mathcal{N}(300, \sqrt{3^2 + 4^2}) = \mathcal{N}(300, 5)$

XXIV.

Le nombre d'usagers se présentant à un guichet entre $12h$ et $13h$ suit une loi de Poisson de paramètre 20.
Quelle est la probabilité pour qu'il se présente un jour donné entre 18 et 22 personnes ? PLus de 30 personnes ? Moins de 10 personnes ?

On approche par une loi normale (car $npq \ge 18$)de paramètres $m = npq = 20$ et $\sigma = \sqrt{20}$ de sorte que
$\mathbb{P}[18 \le X \le 22] = \mathbb{P}[-0.45 \le Z \le 0.45]$
$= 2\pi(0.45) - 1 \simeq 0.35$
De même, $\mathbb{P}[X \ge 30] = \mathbb{P}[Z \ge 2.23] \simeq 0.01$
Enfin, $\mathbb{P}[X \le 10] = \mathbb{P}[Z \le -2.23] \simeq 0.01$

XXV.

Une ligne de transmission transporte des fichiers, chaque fichier étant constitué de 10^5 bits (caractères, info de transmission ou de contrôle). La probabilité qu'un bit soit erroné est $p = 0.001$ et l'on admet que les erreurs sont indépendantes les unes des autres.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs dans la transmission d'un fichier donné.

1°. Quelle est la loi de X ? Quels sont les paramètres ?

Une erreur est représentée par une loi de Bernoulli. Le nombre X d'erreurs suit donc, par indépendance des transmissions, une loi binomiale de paramètres
$n = 10^5$ et $p = 10^{-3}$. $\mathbb{E}[X] = np = 100$

2°. Déterminer la probabilité pour qu'un fichier contienne moins de 90 erreurs.

Comme $npq \geq 18$, on peut approcher la loi de X par une loi normale $\mathcal{N}(100, 10)$;
$\mathbb{P}[X < 90] = \mathbb{P}[Z < -1] = \mathbb{P}[Z > 1] = 1 - \Pi(1)$
$\approx 1 - 0.8413 \approx 0.16$

3°. Déterminer p pour que $\mathbb{P}[X \leq 30] = 0.9875$ et $\mathbb{P}[X \geq 17] = 0.7486$

$\mathbb{P}[Z < (30 - m)/\sigma] = \Pi(2.24)$ et
$\mathbb{P}[Z < (m - 17)/\sigma] = \Pi(0.67)$
$\Rightarrow m + 2.24\sigma = 30$ et $m - 0.67\sigma = 17$. On trouve $m \approx 20$ et $\sigma \approx 4.5$. Alors $p = 2.10^{-4}$

4°. On améliore la qualité de transmission afin que $p = 10^{-5}$
Par quelle loi peut-on approcher X ? Pourquoi ?
Calculer alors $\mathbb{P}[X \leq 1]$

$\Rightarrow np = 1$ lois des évènements rares : $\mathbb{P}[X \leq 1] = 2/e$

XXVI.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(1, 1)$ et $\mathcal{N}(1, -1)$.

1°. Déterminer la loi de $X + Y$ et celle de $X - Y$.

D'après le cours, on a $X - Y \simeq \mathcal{N}(0, \sqrt{2})$ et
$X + Y \simeq \mathcal{N}(2, \sqrt{2})$

2°. $\mathbb{P}[X = Y] = 0$ car il s'agit de lois à densité puis
$\mathbb{P}[X \geq Y] = \mathbb{P}[X - Y \geq 0] = \mathbb{P}[Z \geq 1/\sqrt{2}] \simeq 0.92$

3°. On lance 600 fois un dé équilibré à 6 faces et l'on note X le nombre de 1 obtenus. Calculez $\mathbb{P}[X > 110]$ et $\mathbb{P}[90 \leq X \leq 110]$. Combien obtient-on de 1 en moyenne au cours de ces 600 lancers ?

Il s'agit d'une loi binomiale avec $n = 600$ et $p = 1/6$
$\Rightarrow np = 100 \geq 50$ et $npq \geq 18$. On peut donc l'approcher par une loi normale :
$\mathbb{P}[X > 110] = \mathbb{P}[Z > 1.15] \simeq 0.13$ et
$\mathbb{P}[90 < X < 110] = \mathbb{P}[-1.15 < Z < 1.15] \simeq 0.74$

XXVII.

Soient X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une variable aléatoire prenant comme valeurs -1 et 1 avec probabilités respectives p et $1 - p$.

1°. Déterminer la loi de XY, ainsi que celle de X^2.
2°. Déterminer la loi de $Z = \exp(X)$ ainsi que son espérance.

XXVIII.

La durée de vie d'une ampoule électrique suit une loi normale de paramètres $m = 457h$ et $\sigma = 20h$

1°. Calculer la probabilité qu'une ampoule dure plus de $490h$

$\mathbb{P}[X \geq 490] = \mathbb{P}[Z \geq 33/20] = 1 - \Pi(1, 65) \simeq 0.05$

2°. Quelle est la durée de vie minimale atteinte par 80% des ampoules.

$\mathbb{P}[X \geq \alpha] = 0.8 \iff \Pi\left(\dfrac{457 - \alpha}{20}\right) = \Pi(0, 84)$
$\iff \dfrac{457 - \alpha}{20} = 0, 84 \iff \alpha = 457 - 0.84 \times 20$
$\alpha = 440h$

3°. On considère un lot de 100 ampoules indépendantes et l'on note Y le nombre d'ampoules qui fonctionnent au delà de $490h$. Quelle est la loi de Y ? Calculer $\mathbb{P}[Y > 10]$

Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0.05$. D'après la loi des évènements rares, on peut approcher cette loi par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 5$. En ce cas,

$$\mathbb{P}[X \geq 10] = 1 - \sum_{k=0}^{10} e^{-5} 5^k / k!$$

4°. On considère maintenant un lot de 1000 ampoules. Déterminer le nombre moyen d'ampoules qui fonctionnent plus de $490h$. Calculer $\mathbb{P}[36 \leq Y \leq 64]$

On met au point un nouveau type d'ampoule dont la durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.001h$
5°. Calculer la probabilité qu'une ampoule fonctionne au delà de $500h$
6°. Si l'on souhaite utiliser des ampoules qui durent plus de $500h$, quel type d'ampoules vaut-il mieux choisir ?

XXIX.

La durée de vie d'un disque dur suit une loi normale de moyenne $m = 80\ 000$ heures et d'écart type $\sigma = 10\ 000$ heures.

1°. Quelle est la probabilité que le disque fonctionne au delà de 100 000 heures ?
Quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 70 000 heures ?

2°. La transmission des données depuis le disque dur se fait avec une probabilité d'erreur de 10^{-12} par bit. On transfert un fichier de 1 Go. Quelle est la probabilité qu'une erreur de produise durant le transfert ?
Quel est le nombre moyen d'erreur pour un tel fichier ?

3°. Quelle devra être la taille du fichier pour qu'une erreur se produise avec une probabilité de 0.2 ?

XXX.

Des ordinateurs sont fabriqués à la chaine de façon indépendante les uns des autres.
La probabilité qu'un PC soit défectueux est $p = 10^{-2}$.
Un entreprise commande 100 ordinateurs.
On note X le nombre de PC défectueux dans cette commande.

1°. Quelle est la loi suivie par X ? Quelle est la probabilité qu'au moins un PC soit en panne ?
2°. Quel est le nombre moyen de PC défectueux dans cette commande ?

On améliore la qualité des PC en les testant avant la

vente. On a alors $p = 2 \times 10^{-3}$
On prendra $npq = 16$. Durant un mois, la société fabrique 8000 PC.

3°. Calculer le nombre moyen de PC défectueux dans le stock, après que les tests aient été effectués.

4°. On approche la loi de X par une loi normale.
Quelle est la probabilité que plus de 10 ordinateurs soient défectueux ?
Quelle est la probabilité que le nombre d'ordinateurs défectueux soit compris entre 10 et 20 ?

XXXI.

On considère un composant électronique qui a une probabilité $p = 10^{-5}$ d'être défectueux. On étudie un échantillon de 10 000 composants indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de composants défectueux dans cet échantillon.

1°. Quel est le nombre moyen de composants défectueux ?

X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$; le fait d'être défectueux est une épreuve de Bernoulli et X est donc la somme de n épreuves indépendantes de Bernoulli.
$\mathbb{E}[X] = np = 10^{-1}$

2°. $np < 5$ et $n > 50$, on peut donc appliquer la loi des évènements rares, cad que X suit à peu près une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.1$.
$\mathbb{P}[X = 0] = e^{-\lambda} = e^{-0.1}$, $\mathbb{P}[X > 2] \simeq 1.1 \times e^{-0.1}$

3°. Soit Y la durée de vie d'un composant. Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/3$ (en années). Déterminer $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathrm{var}(Y)$, puis calculer $\mathbb{P}[X > 3]$ et $\mathbb{P}[X > 5]$

$\mathbb{E}[Y] = 1/\lambda$, $\mathrm{var}(Y) = 1/\lambda^2$ en effectuant des intégrations par parties.

XXXII.

Soit T le temps d'émission aléatoire d'une source d'électrons et $f(t)$ la densité de T.

1°. Exprimer sous forme d'intégrale $\mathbb{P}[s < T \leq t]$, $0 < s < t$.
2°. Calculer $\mathbb{P}[T > t + s / T > s]$
3°. Effectuer le calcul ci-dessus lorsque $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.
4°. Une variable aléatoire possède la propriété d'absence de mémoire si
$\mathbb{P}[T > t + s / T > s] = \mathbb{P}[T > t]$.
Montrer qu'alors sa densité est nécessairement celle d'une loi exponentielle.
5°. Si $\lambda = 2$, calculer le temps moyen d'émission d'un électron et la probabilité d'attendre 2 unités de temps après une heure d'attente sans émission.

XXXIII.

Trouver le nombre de jets de dés à partir duquel la probabilité pour que la moyenne des points obtenus diffère d'au plus 1/50 soit supérieure à 0.95

Soit X_k le résultat du kième lancer (qui suit une loi équiprobable sur $\{1, ..., 6\}$) et
$\bar{X} = S_n/n = (X_1 + ... + X_n)/n$ la moyenne des n lancers. On cherche n tel que

$$\mathbb{P}\left[|S_n/n - \mathbb{E}[X_k]| < 1/100\right] > 0.95$$

On a $\mathbb{E}[X_k] = 3.5$; appliquons alors l'inégalité de Tchebychev à S_n/n :

$$\mathbb{P}\left[|S_n/n - \mathbb{E}[S_n/n]| > \epsilon\right] \leq \frac{\mathrm{var}(S_n/n)}{\epsilon^2}$$

$\mathrm{var}(S_n/n) = \mathrm{var}(S_n)/n^2 = \mathrm{var}(X_k)/n = 35/10$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left[|S_n/n - 3.5| < \epsilon\right] > 1 - \frac{\mathrm{var}(X)}{n\epsilon^2}$$

$$\iff \mathbb{P}\left[|S_n/n - 3.5| > \epsilon\right] \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{n\epsilon^2}$$

$\iff 0.95 = 1 - \mathrm{var}(X)/n\epsilon^2 \iff n = 10^6/7$ ie $n \simeq 583333$

XXXIV.

On effectue 100 lancers à pile ou face avec une pièce équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir 40 faces ? au plus 50 piles ? Au moins 40 et au plus 50 ?

Si X représente le nombre de faces obtenus, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0.5$.
Ainsi, $\mathbb{E}[X] = np = 50$ et $\sigma = \sqrt{npq}$; X suit une loi normale $\mathcal{N}(50; 5)$
Posons $T = (X - 50)/5$. T suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$:
$\mathbb{P}[X \leq 40] = \mathbb{P}[T \leq -2] = 1 - \pi(2) = 0.02275$
$\mathbb{P}[X \leq 50] = 0.5$ et
$\mathbb{P}[45 \leq X \leq 55] = \pi(1) + \pi(1.2) - 1 \simeq 0.7263$

XXXV.

Soit X une variable aléatoire binomiale telle que $\mathbb{P}[X < 96240] = 0.8413$ et $\mathbb{P}[X < 95640] = 0.0668$
Calculer les paramètres n et p de cette loi ?

On suppose que la loi de X peut être approchée par une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$; On pose $T = (X - m)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et l'on a
$\mathbb{P}[X < 96240] = \mathbb{P}[T < (96240 - m)/\sigma] \simeq 0.8413$
$\mathbb{P}[T < (95640 - m)/\sigma] \simeq 0.0668$
On cherche donc, dans la table de l'écart réduit, une valeur α telle que $\pi(\alpha) = 0.8413$ et une valeur β telle que $\pi(\beta) = 0.0668$:

$$\begin{cases} (96240 - m)/\sigma \simeq 1 \\ (96240 - m)/\sigma \simeq 1.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + \sigma \simeq 96240 \\ m - 3\sigma/2 \simeq 95640 \end{cases}$$

Finalement, $m \simeq 96000$ et $\sigma \simeq 240$
$\Rightarrow np = 96240 \Rightarrow n = 240\ 000 \Rightarrow p = 0.4$
X suit donc une loi $\mathcal{B}(240\ 000, 0.4)$
On peut vérifier, à postériori, que l'approximation était bonne.

XXXVI.

Si on admet que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.5, quelle probabilité a-t-on (à 1/100 près) dans une marternité où sont nés 576 enfants, d'avoir plus de 300 naissances de filles ?

X représente le nombre de filles parmi les 500 naissances ; X suit une loi binomiale de paramètres $n = 576$ et $p = 1/2$. On a donc $np = 288$ et $npq \geq 18$; on peut donc approcher la loi par une loi normale de paramètres $\mathcal{N}(288, 12)$.
Ainsi, $\mathbb{P}[X \geq 300] = \mathbb{P}[X \geq 300.5]$
$= \mathbb{P}[Z \geq (300.5 - 288)/12] = \mathbb{P}[Z \geq 1.04] \simeq 0.149$
Remarque : nous avons changé le 300 en 300.5 car nous approchons une loi discrète par une loi continue.

XXXVII

Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne $m = 3$ et d'écart type $\sigma = 1$.
Quelles sont les valeurs a et b pour que
$\mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[a \leq X \leq B] = \mathbb{P}[b \leq X] = \dfrac{1}{3}$

$Z = X - 3$ suit une normale centrée réduite. Ainsi,

$$\begin{cases} \pi(a-3) = 0.333 \\ \pi(b-3) = 0.666 \end{cases}$$

$a \simeq 2.59$, $b \simeq 3.41$.

XXXVIII.

Des données binaires indépendantes sont transmises sur un canal radio. La probabilité d'erreur par bit est $p = 2 \times 10^{-6}$. On transmet une communication composée de $n = 10^7$ bits sur ce canal et l'on note X le nombre d'erreurs durant la transmission.

1°. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$.

X suit une loi binomiale de paramètres n et p : nombre de succès au cours de n expériences de Bernoulli indépendantes, la proba de chaque succès étant égale à p. On a alors, d'après le cours, $\mathbb{E}[X] = np = 20$ et $\mathrm{var}(X) = npq \simeq 20$

2°. Calculer $\mathbb{P}[X \geq 15]$, $\mathbb{P}[18 \leq X \leq 22]$.

On ne peut pas faire le calcul directement, mais en appliquant le théorème de la limite centrale ($npq \geq 18$) on peut approcher la loi de X par une loi normale de paramètre $m = 20$ et $\sigma = \sqrt{20}$. Si Z est une loi normale centrée réduite, on a alors $Z = (X - 20)/(2\sqrt{5})$. Ainsi,
$\mathbb{P}[X \geq 15] = \mathbb{P}[Z \geq (15 - 20)/(2\sqrt{5})] = \mathbb{P}[Z \geq -1.12]$
$= \mathbb{P}[Z \leq 1.12] \simeq 0.87$ d'après la table de la loi normale.

$\mathbb{P}[18 \leq X \leq 22] = \mathbb{P}[-1/\sqrt{5} \leq Z \leq 1/\sqrt{5}]$
$= \mathbb{P}[-0.45 \leq Z \leq 0.45] = 2\Pi(0.45) - 1 \simeq 0.34$

3°. On améliore la transmission afin d'obtenir $p = 10^{-7}$. Calculer $\mathbb{P}[X = 0]$, $\mathbb{P}[X = 1]$ et $\mathbb{P}[X > 1]$.

Cette fois-ci, on peut appliquer la loi des évènements rares car $n \geq 50$ et $np = 1 < 5$. On pose $\lambda = np = 1$ et on approche la loi de X par une loi de Poisson de paramètre λ.

$\mathbb{P}[X = 0] \simeq e^{-\lambda} = 1/e$
$\mathbb{P}[X = 1] \simeq \lambda e^{-\lambda} = 1/e$
$\mathbb{P}[X = 4] \simeq e^{-\lambda}/4! \simeq 0.015$

4°. $f(x)$ est clairement positive et continue par morceaux. De plus, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$
$= \left(-\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2}\exp(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2})\right)_0^{\infty} = 1$

De plus
$\mathbb{P}[Y > 1] = \left(-\dfrac{\sigma^2}{\sigma^2}\exp(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2})\right)_1^{\infty} = \exp(-\dfrac{1}{2\sigma^2})$

Processus de Poisson et files d'attente.

XXXIX.

On s'intéresse aux appels arrivant à un central téléphonique.
Soit N_t la variable aléatoire égale au nombre d'appels s'"étant produits pendant l'intervalle de temps $[0, t[$.
On admet que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

1°. Déterminer le nombre moyen d'appels durant l'intervalle $[0, t[$ et le nombre moyen par unité de temps.

$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ et si $t = 1$, $\mathbb{E}[N_t] = \lambda \Rightarrow \lambda$ est le taux d'arrivée.

2°. Calculer, en fonction de λ et t, la probabilité qu'au moins un appel survienne entre 0 et t.

$\mathbb{P}[N_t > 0] = 1 - \mathbb{P}[N_t = 0] = 1 - e^{-\lambda t}$

3°. L'unité de temps étant la minute, on pose $\lambda = \dfrac{5}{6}$.
Calculer $P[N_t \geq 2]$

$\mathbb{P}[N_1 \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[N_1 = 0] - \mathbb{P}[N_1 = 1] = 1 - e^{-\lambda}(1 - \lambda)$

4°. Soit X la variable aléatoire égale à la durée écoulée entre deux appels consécutifs. X est-elle une variable discrète ou continue ? Exprimer, par une phrase en français (sans faute), la signification des évènements $[N_t = 0]$ et $[X > t]$. Donner une relation simple entre ces deux évènements et en déduire $P[X > t]$

X est continue et peut prendre toute valeur réelle supérieure ou égale à t.
$[N_t = 0]$ = "Il n'y a pas eu d'appels entre 0 et t"
$[X > t]$= "la durée entre deux appels consécutifs est au moins t".
Ainsi, $[X > t] = [N_t = 0]$ donc $\mathbb{P}[X > t] = e^{-\lambda t}$

5°. Soit $F(t)$ la fonction de répartition de X. A l'aide de la question précédente, déterminer l'expression de $F(t)$ en fonction de λ et t (on distinguera $t > 0$ et $t \leq 0$). En déduire la loi de X et sa densité.

$F(t) = \mathbb{P}[X \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$ et 0 sinon. Il s'agit de la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ et sa densité est

$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$

6°. Déterminer le temps moyen entre deux appels consécutifs.

$\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ en effectuant une intégration par parties.