**STATISTIQUE MATHÉMATIQUE - EXAMEN.**

*ENSAI - Mastères spécialisés - 2025/2026 -*

École nationale
de la statistique
et de l'analyse
de l'information

*Le sujet comporte 2 pages. Durée de l'épreuve : 2h. Tous documents autorisés, calculatrices autorisées. Le barème est indicatif et sans engagement. La qualité de la rédaction entre pour une part importante dans la notation. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante.*

## I. 14 points

On considère un $n$-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une variable aléatoire $X$ de loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. Cette loi modélise le nombre de tirages à pile ou face (avec probabilité de succès $p$) avant que n'apparaisse un premier succès : $\forall x \geq 1$,

$$\mathbb{P}[X = x] = (1-p)^{x-1} p \tag{1}$$

On rappelle que $\mathbb{E}[X] = 1/p$ et $\mathbb{V}(X) = (1-p)/p^2$.

Le paramètre d'intérêt n'est pas $p$ mais $\theta > 0$ défini par

$$p = \frac{1}{1+\theta} \tag{2}$$

1°. Exprimer $\theta$ en fonction de $p$ et donner une interprétation de ce paramètre.

2°. Démontrer que $\mathbb{E}[X] = \theta + 1$ et $\mathbb{V}(X) = \theta(\theta+1)$.

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{X} = S_n/n$ la moyenne empirique de l'échantillon.

3°. Déterminer un estimateur $\widehat{\theta}_1$ de $\theta$ par la méthode des moments. Calculer son biais et son erreur quadratique.

4°. Démontrer qu'il est fortement consistant et qu'il converge en moyenne quadratique. Montrer qu'il est asymptotiquement normal et préciser la variance asymptotique.

5°. Déterminer la vraisemblance de l'échantillon et en déduire l'expression de l'estimateur $\widehat{\theta}_2$ du maximum de vraisemblance. Que constatez-vous ?

6°. Le modèle est-il exponentiel ? Régulier ?

7°. $\widehat{\theta}_2$ est-il exhaustif ? Complet ? Démontrer que $\widehat{\theta}_2$ est un estimateur VUMSB (sans biais de variance minimale) de $\theta$.

8°. Déterminer l'information de Fisher $\mathbb{I}_n(\theta)$ associée au modèle et montrer que $\widehat{\theta}_2$ est un estimateur efficace de $\theta$.

On considère que la loi *a priori* de $\theta$ est une loi bêta de type II, notée $\mathscr{B}'(a,b)$ $(a > 0,\ b > 0)$, dont la densité $f$ vérifie

$$f(\theta) \propto \theta^{a-1}(1+\theta)^{-(a+b)} 1_{[0,+\infty[}(\theta) \tag{3}$$

L'espérance d'une variable aléatoire $H$ de loi bêta de type II est donnée par

$$\mathbb{E}[H] = \frac{a}{b-1} \tag{4}$$

9°. Déterminer la loi *a posteriori* de $\theta$ sachant $[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n]$. En déduire que l'estimateur $\widehat{\theta}_3$ de la moyenne *a posteriori* peut s'exprimer au travers de la statistique $S_n$. Montrer que cet estimateur est biaisé, mais asymptotiquement sans biais.

## II. 8 points

On considère un $n$-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une variable aléatoire $X$ de loi normale $\mathcal{N}(\theta, 1)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer. On note $\phi$ la fonction de répartition de la loi normale, centrée et réduite :

$$\phi(x) = \mathbb{P}[Z \leq x] = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ est une variable aléatoire de loi normale, centrée et réduite. On notera $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ et l'on rappelle que $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1°. Quelle est la loi de $X - \theta$ ? En notant $Z = X - \theta$, démontrer que $\mathbb{P}[X > 0] = \phi(\theta)$.

Posons $p = \phi(\theta)$. Si $\phi$ est une fonction dérivable et bijective, on rappelle que la dérivée de sa réciproque est donnée par la formule :

$$\left(\phi^{-1}\right)'(p) = \frac{1}{\phi'\left(\phi^{-1}(p)\right)}, \ \forall p \in \mathcal{D} \tag{6}$$

où $\mathcal{D}$ est le domaine de définition de $\phi^{-1}$.

2°. Démontrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall p \in ]0,1[$,

$$\left(\phi^{-1}\right)'(p) = \frac{1}{f(\theta)} \tag{7}$$

On suppose que les $X_i$ ne sont pas observés directement. La seule information connue est le fait que $X_i$ soit positif ou non. On pose donc $Y_i = 1_{[X_i > 0]}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{8}$$

3°. Préciser la loi de $Y_1$ ainsi que celle de $n\overline{Y}_n$. Démontrer que $\mathbb{E}\left[\overline{Y}_n\right] = \phi(\theta)$.

4°. Démontrer que $\widehat{\theta}_n = \phi^{-1}(\overline{Y}_n)$ est l'estimateur des moments de $\theta$.

5°. Démontrer que $\widehat{\theta}_n$ est fortement consistant.

6°. Démontrer que $\sqrt{n}(\overline{Y}_n - \phi(\theta))$ est asymptotiquement normal et que la variance de la loi limite est

$$\sigma^2 = \phi(\theta)(1 - \phi(\theta)) \tag{9}$$

7°. Démontrer que $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ est asymptotiquement normal et que la variance de la loi limite est

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{\phi(\theta)(1 - \phi(\theta))}{f(\theta)^2} \tag{10}$$