1 Intervalle et région de confiance

Définition

Soient T_1, T_2 deux statistiques à valeurs réelles telles que $T_1 \leq T_2$ $\mathbb{P}_\theta$-p.s. pour tout $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ et

$$\mathbb{P}_\theta[T_1 \leq \theta \leq T_2] = 1-\alpha \tag{1}$$

Alors $IC_{1-\alpha}(\theta) = [T_1, T_2]$ est un intervalle de confiance (IC) de niveau $1-\alpha$ de θ.

Définition

Un sous-ensemble aléatoire $C(X)$ de $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ avec $p \geq 2$, vérifiant pour tout θ:

$$\mathbb{P}_\theta[\theta \in C(X)] = 1-\alpha \tag{2}$$

est appelée région de confiance de θ au niveau $1-\alpha$.

2 critères de qualité pour un IC : longueur et niveau $1-\alpha$.

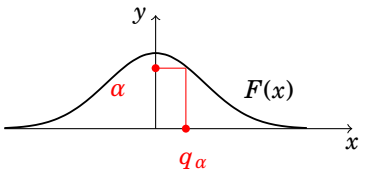


Figure 1: Quantile et fonction de répartition

F continue $\Rightarrow F(q_\alpha) = \alpha$, F strictement croissante $\Rightarrow q_\alpha$ unique.

2 Méthodes pour déterminer un IC

Définition

Un pivot $Z = Z(X, \theta)$ est une fonction de la variable d'observation X et du paramètre θ telle que la loi de Z soit libre en θ.

$X_1, ..., X_n$ n-échantillon $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$.
$q = q_{1-\alpha/2}$ quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$.
$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)$ v.a. pivotale de loi $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\mathbb{P}_\theta\left[\sqrt{n}\left|\overline{X}-\theta\right| \leq q\right] = \Pi(q) - \Pi(-q) = 1-\alpha \tag{3}$$

Π f.r. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \tag{4}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_\theta\left(\theta \in \left[\overline{X} - \frac{q}{\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{q}{\sqrt{n}}\right] \leq q\right) = 1-\alpha \tag{5}$$

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right] \tag{6}$$

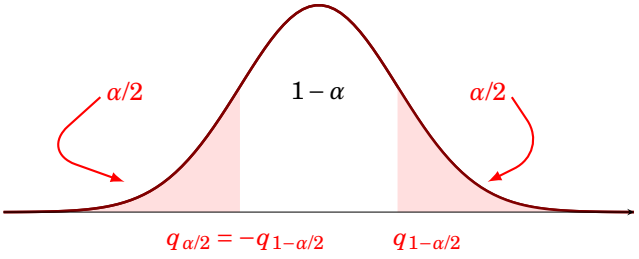


Figure 2: Intervalle de confiance bilatéral

3 Utilisation d'inégalités

Théorème Inégalité de Tchebychev

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon] \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2} \tag{7}$$

Théorème Inégalité de Hoeffding

$X_1, ..., X_n$ n v.a.i.i.d. / : $a \leq X_1 \leq b$ $\mathbb{P}$-p.s. et $\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$. Alors $\forall t > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\overline{X} - \mathbb{E}[\overline{X}]\right| \geq t\right] \leq 2\exp\left(-\frac{2nt^2}{(b-a)^2}\right) \tag{8}$$

$X_1, ..., X_n$ n vaiid / $a \leq X_i \leq b$ et $E[X_i] < \infty$.
IC pour $\theta = m$?
Avec Tchebychev : IC par excès de niveau $1-\alpha$:

$$I_1 = \left[\overline{X} - \frac{b-a}{\sqrt{n\alpha}} \; ; \; \overline{X} + \frac{b-a}{\sqrt{n\alpha}}\right]$$

Avec Hoeffding :

$$\mathbb{P}_\theta\left[|\overline{X} - \theta| \geq t\right] \leq 2\exp\left(-\frac{2nt^2}{(b-a)^2}\right).$$

En posant

$$t = (b-a)\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}}$$

on a (par excès) :

$$I_2 = \left[\overline{X} - (b-a)\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}} \; ; \; \overline{X} + (b-a)\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}}\right]$$

4 Région de confiance asymptotique

Définition

Soit $X_1,...,X_n$ un n-échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$.

Un pivot asymptotique $Z_n = Z(X_1,...,X_n,\theta)$ est une suite de v.a. telle que Z_n converge en loi vers une v.a. qui ne dépend pas de θ.

Soit $\widehat{\theta}_n$ un estimateur $\sqrt{n}$-consistant et A.N. de θ :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

Un pivot asymptotique est

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Si σ connu, $q_{1-\alpha/2}$ quantile $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\theta[Z_n \leq q] = 1-\alpha/2 \\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\theta[Z_n \leq -q] = \alpha/2 \end{cases}$$

L'IC asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour θ est

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\left|\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq q\right]$$

Méthode de Wald :

Si σ inconnu ou dépend de θ, on remplace par $\widehat{\sigma}(\theta)$:

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)}{\widehat{\sigma}} \rightsquigarrow \frac{1}{\sigma(\theta)}\mathcal{N}(0,\sigma(\theta)^2) = \mathcal{N}(0,1)$$

Si q quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$, l'IC asymptotique est

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\widehat{\theta} - q\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \;;\; \widehat{\theta} + q\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

Stabilisation de la variance :

$\Psi : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable / $\Psi'(\theta) = \nabla\Psi(\theta) = 1/\sigma(\theta)$. Si

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\sigma(\theta)^2)$$

par la méthode delta,

$$\sqrt{n}\left(\Psi(\widehat{\theta}_n) - \Psi(\theta)\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, J_\Psi(\theta)\sigma(\theta)^2 J'_\Psi(\theta)) = \mathcal{N}(0,1)$$

$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\Psi(\widehat{\theta}_n) - \Psi(\theta)\right)$ pivot asymptotique. Si Ψ bijective croissante et q quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$, alors l'IC asymptotique est

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\Psi^{-1}\left(\Psi(\widehat{\theta}) - \frac{q}{\sqrt{n}}\right); \Psi^{-1}\left(\Psi(\widehat{\theta}) + \frac{q}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

5 Intervalle de crédibilité dans un cadre bayésien

Dans un cadre bayésien où l'on suppose que $X \sim \mathbb{P}_\theta$ et $\theta \sim \Pi$, l'analogue d'un intervalle de confiance est appelé intervalle de crédibilité.

Définition

Un intervalle de crédibilité de niveau $1-\alpha$ pour θ est un sous-ensemble $IC_\Pi(X) \subset \Theta$ vérifiant

$$\mathbb{P}[H \in IC_\Pi(X) \mid X = x] = \mathbb{P}[\theta \in IC_\Pi(X) \mid X = x] = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}[a \leq \theta \leq b \mid X = x] = \int_a^b L(\theta,x)d\theta = 1-\alpha \qquad (9)$$

Dans un intervalle de confiance, le paramètre est fixe et les bornes sont aléatoires (en tout cas tant que l'observation sur X n'a pas été réalisée), tandis que dans un intervalle de crédibilité, les bornes sont fixes tandis que le paramètre est aléatoire.

Ex : un n-échantillon gaussien de loi $\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$ où σ^2 est connu et θ a pour loi *a priori* également gaussienne $\mathcal{N}(a,b^2)$. Alors on a vu que la loi *a posteriori* était une gaussienne $\mathcal{N}(m,\tau^2)$ avec

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{n}{\sigma^2} \\ \frac{m}{\tau^2} = \frac{a}{b^2} + \frac{n\overline{x}}{\sigma^2} \end{cases} \qquad (10)$$

soit encore

$$\begin{cases} m = \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + b^2}a + \frac{b^2}{\sigma^2/n + b^2}\overline{x} \\ \tau^2 = \frac{\sigma^2 b^2/n}{\sigma^2/n + b^2} \end{cases} \qquad (11)$$

Sachant $[X = x]$, la v.a. $Z = (\theta - m)/\tau \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour un risque $\alpha \in [0,1]$, si q est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors l'intervalle

$$IC_\Pi(X) = [m - q\tau \;;\; m + q\tau] \qquad (12)$$

est $(1-\alpha)$ crédible car $\mathbb{P}_{Z|[X=x]}[-q \leq Z \leq q] = 1-\alpha$.