

1. Spam ou pas spam

On dispose des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(S) = 0,4, \quad \mathbb{P}(N) = 0,6$$

où S signifie «spam» et N signifie «non spam».
Pour un message contenant le mot *promo*, on sait que :

$$\mathbb{P}(\text{promo} | S) = 0,8, \quad \mathbb{P}(\text{promo} | N) = 0,2.$$

Classer un message qui contient le mot *promo*.

Correction. On compare :

$$\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(\text{promo} | S) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$$

et

$$\mathbb{P}(N)\mathbb{P}(\text{promo} | N) = 0,6 \times 0,2 = 0,12.$$

Comme $0,32 > 0,12$, le message est classé comme spam.

2. Avis positif ou négatif

On veut classer un avis client comme positif + ou négatif -.

On suppose :

$$\mathbb{P}(+) = 0,5, \quad \mathbb{P}(-) = 0,5.$$

L'avis contient le mot *excellent*. On sait que :

$$\mathbb{P}(\text{excellent} | +) = 0,7, \quad \mathbb{P}(\text{excellent} | -) = 0,1.$$

Classer l'avis.

Correction.

On compare :

$$\mathbb{P}(+)\mathbb{P}(\text{excellent} | +) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$$

et

$$\mathbb{P}(-)\mathbb{P}(\text{excellent} | -) = 0,5 \times 0,1 = 0,$$

Comme $0,35 > 0,05$, l'avis est classé comme positif.

3. Naïve Bayes en deux mots.

On veut classer un message comme spam S ou non spam N.

On suppose :

$$\mathbb{P}(S) = 0,5, \quad \mathbb{P}(N) = 0,5.$$

Le message contient les mots *gratuit* et *urgent*. On connaît :

$$\mathbb{P}(\text{gratuit} | S) = 0,8, \quad \mathbb{P}(\text{urgent} | S) = 0,6,$$

$$\mathbb{P}(\text{gratuit} | N) = 0,2, \quad \mathbb{P}(\text{urgent} | N) = 0,1.$$

Classer le message avec l'hypothèse naïve d'indépendance conditionnelle.

Correction.

Avec Naïve Bayes, on peut multiplier les probabilités conditionnelles (hypothèse d'indépendance conditionnelle). Pour la classe spam :

$$\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(\text{gratuit} | S)\mathbb{P}(\text{urgent} | S) = 0,5 \times 0,8 \times 0,6 = 0,24.$$

Pour la classe non spam :

$$\mathbb{P}(N)\mathbb{P}(\text{gratuit} | N)\mathbb{P}(\text{urgent} | N) = 0,5 \times 0,2 \times 0,1 = 0,01.$$

Comme $0,24 > 0,01$, le message est classé comme spam.

4. Sport ou politique.

On veut classer un court texte comme parlant de sport S ou de politique P.

On suppose :

$$\mathbb{P}(S) = 0,6, \quad \mathbb{P}(P) = 0,4.$$

Le texte contient le mot *match*. On connaît :

$$\mathbb{P}(\text{match} | S) = 0,7, \quad \mathbb{P}(\text{match} | P) = 0,1.$$

Classer le texte.

Correction.

On compare :

$$\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(\text{match} | S) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$$

et

$$\mathbb{P}(P)\mathbb{P}(\text{match} | P) = 0,4 \times 0,1 = 0,04.$$

Comme $0,42 > 0,04$, le texte est classé comme sport.

5. Classification de messages

On veut classer un court message selon une étiquette y pouvant prendre trois valeurs :

$$y \in \{A, B, C\}.$$

On dispose des probabilités a priori :

$$\mathbb{P}(A) = 0,5, \quad \mathbb{P}(B) = 0,3, \quad \mathbb{P}(C) = 0,2.$$

Le message contient les trois mots :

$$x_1 = \text{“urgent”}, \quad x_2 = \text{“réunion”}, \quad x_3 = \text{“gratuit”}.$$

On connaît les probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P}(x_1 | A) = 0,6, \quad \mathbb{P}(x_2 | A) = 0,7, \quad \mathbb{P}(x_3 | A) = 0,1,$$

$$\mathbb{P}(x_1 | B) = 0,2, \quad \mathbb{P}(x_2 | B) = 0,8, \quad \mathbb{P}(x_3 | B) = 0,2,$$

$$\mathbb{P}(x_1 | C) = 0,7, \quad \mathbb{P}(x_2 | C) = 0,1, \quad \mathbb{P}(x_3 | C) = 0,9.$$

On suppose que les mots sont conditionnellement indépendants sachant la classe.

1°. Classifier le message avec la méthode naïve de Bayes.

2°. Quelle est l'expression du classifieur naïf de Bayes ?

Correction. On calcule un score pour chaque classe :

$$\text{score}(y) = \mathbb{P}(y) \mathbb{P}(x_1 | y) \mathbb{P}(x_2 | y) \mathbb{P}(x_3 | y).$$

Pour la classe A :

$$\text{score}(A) = 0,5 \times 0,6 \times 0,7 \times 0,1 = 0,021.$$

Pour la classe B :

$$\text{score}(B) = 0,3 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,2 = 0,0096.$$

Pour la classe C :

$$\text{score}(C) = 0,2 \times 0,7 \times 0,1 \times 0,9 = 0,0126.$$

On compare donc :

$$0,021, \quad 0,0096, \quad 0,0126.$$

Le plus grand score est celui de la classe A. Ainsi, le message est classé comme A.

On peut aussi calculer les probabilités *a posteriori* normalisées. On commence par calculer :

$$Z = 0,021 + 0,0096 + 0,0126 = 0,0432.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(A | x_1, x_2, x_3) = \frac{0,021}{0,0432} \approx 0,486,$$

$$\mathbb{P}(B | x_1, x_2, x_3) = \frac{0,0096}{0,0432} \approx 0,222,$$

$$\mathbb{P}(C | x_1, x_2, x_3) = \frac{0,0126}{0,0432} \approx 0,292.$$

La classe la plus probable reste donc A.

6. Diagnostic de l'état d'une machine.

Dans un atelier de production, on souhaite diagnostiquer l'état d'une machine à partir de deux mesures continues :

- x_1 : niveau vibratoire RMS en mm/s,
- x_2 : échauffement au-dessus de la température ambiante, en °C.

L'étiquette y peut prendre trois valeurs :

$$y \in \{N, D, R\},$$

où :

- N : fonctionnement nominal,
- D : désalignement mécanique,
- R : roulement dégradé.

On suppose les probabilités *a priori* suivantes :

$$\mathbb{P}(N) = 0,70, \quad \mathbb{P}(D) = 0,20, \quad \mathbb{P}(R) = 0,10.$$

On utilise un modèle de Bayes naïf, gaussien. Conditionnellement à la classe y , les variables x_1 et x_2 sont supposées indépendantes, et suivent des lois normales. Les paramètres sont les suivants :

$$x_1 | N \sim \mathcal{N}(1,2, 0,3^2), \quad x_2 | N \sim \mathcal{N}(8, 3^2),$$

$$x_1 | D \sim \mathcal{N}(2,2, 0,4^2), \quad x_2 | D \sim \mathcal{N}(12, 4^2),$$

$$x_1 | R \sim \mathcal{N}(3,0, 0,5^2), \quad x_2 | R \sim \mathcal{N}(22, 5^2).$$

Lors d'un contrôle, on observe :

$$x_1 = 2,6, \quad x_2 = 18.$$

1°. Préciser la forme du classifieur bayésien naïf.

2°. Classifier l'état de la machine.

Correction. La densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Avec l'hypothèse naïve d'indépendance conditionnelle, on calcule pour chaque classe :

$$\text{score}(y) = \mathbb{P}(y) f_{1,y}(x_1) f_{2,y}(x_2).$$

Pour éviter de manipuler des produits de petits nombres, on peut comparer les log-scores :

$$\ell(y) = \log \mathbb{P}(y) + \log f_{1,y}(x_1) + \log f_{2,y}(x_2).$$

Pour la classe N, on obtient :

$$\begin{aligned} \ell(N) &= \log(0,70) - \log(0,3) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{(2,6 - 1,2)^2}{2 \times 0,3^2} \\ &\quad - \log(3) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{(18 - 8)^2}{2 \times 3^2}. \end{aligned}$$

Numériquement :

$$\ell(N) \approx -18,53.$$

Pour la classe D :

$$\ell(D) = \log(0,20) - \log(0,4) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{(2,6 - 2,2)^2}{2 \times 0,4^2} - \log(4) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{(18 - 12)^2}{2 \times 4^2}.$$

Numériquement :

$$\ell(D) \approx -5,54.$$

Pour la classe R :

$$\ell(R) = \log(0,10) - \log(0,5) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{(2,6 - 3,0)^2}{2 \times 0,5^2} - \log(5) - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{(18 - 22)^2}{2 \times 5^2}.$$

Numériquement :

$$\ell(R) \approx -5,70.$$

On compare

$$\ell(N) \approx -18,53, \quad \ell(D) \approx -5,54, \quad \ell(R) \approx -5,70.$$

Le plus grand log-score est celui de la classe D. La machine est donc classée comme D.

On peut aussi calculer les probabilités a posteriori normalisées.

Les scores non normalisés valent approximativement :

$$\exp(\ell(N)) \approx 8,9 \times 10^{-9},$$

$$\exp(\ell(D)) \approx 3,92 \times 10^{-3},$$

$$\exp(\ell(R)) \approx 3,36 \times 10^{-3}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(D | x_1, x_2) \approx \frac{3,92}{3,92 + 3,36} \approx 0,54,$$

et :

$$\mathbb{P}(R | x_1, x_2) \approx \frac{3,36}{3,92 + 3,36} \approx 0,46.$$

Le diagnostic retenu est donc le désalignement mécanique, mais le score du roulement dégradé est assez proche. Dans un contexte industriel, cela suggère qu'il serait raisonnable de demander une inspection complémentaire plutôt que de se contenter d'une décision automatique.

7. Classification de commentaires.

Un magasin de vente en ligne souhaite mettre en place un système de traitement automatique des commentaires laissés par ses consommateurs. Chaque commentaire est résumé par trois notes allant de 0 à 3 étoiles :

Variable	Signification
S	qualité du service client
L	qualité de la livraison
C	conformité du produit à sa description

Le magasin souhaite prédire si un commentaire doit être traité en priorité par le service après-vente. La classe à prédire est donc :

Classe	Signification
Oui	commentaire prioritaire ou réclamation
Non	commentaire non prioritaire

On dispose des données suivantes :

Id	S	L	C	Prioritaire?
1	★★★	★★★	★★★	Non
2	★★★	★★☆	★★★	Non
3	★★☆	★★★	★★☆	Non
4	★★☆	★★☆	★★★	Non
5	★★★	★☆☆	★★☆	Non
6	★★☆	★★★	★★★	Non
7	★☆☆	★☆☆	★★☆	Oui
8	☆☆☆	★☆☆	★☆☆	Oui
9	★☆☆	☆☆☆	★☆☆	Oui
10	☆☆☆	☆☆☆	★★☆	Oui
11	★★☆	☆☆☆	★☆☆	Oui
12	★☆☆	★★☆	☆☆☆	Oui

On souhaite classer le commentaire suivant :

S	L	C
★☆☆	☆☆☆	★★☆

On utilisera un classifieur naïf de Bayes avec lissage de Laplace.

1°. Déterminer les probabilités a priori des classes Oui et Non.

2°. Calculer les probabilités conditionnelles nécessaires pour classer le commentaire :

3°. Utiliser la règle de Bayes naïve pour prédire si le commentaire est prioritaire.

4°. Vérifier le résultat à l'aide d'un petit script Python.

Corrigé

1°. Probabilités *a priori*. Il y a 12 commentaires au total. On compte :

- 6 commentaires de classe Oui ;
- 6 commentaires de classe Non.

$$\mathbb{P}(\text{Oui}) = \frac{6}{12} = 0,5$$

$$\mathbb{P}(\text{Non}) = \frac{6}{12} = 0,5.$$

2°. Correction de Laplace. Les notes possibles sont :

$$0, 1, 2, 3.$$

Il y a 4 valeurs possibles. Avec la correction de Laplace, on utilise la formule :

$$\mathbb{P}[X = x | Y] = \frac{\text{nombre d'apparitions de } x \text{ dans la classe } Y + 1}{\text{nombre total d'exemples dans la classe } Y + 4}.$$

Comme chaque classe contient 6 exemples, le dénominateur vaut $6 + 4 = 10$.


```

{"S": 3, "L": 1, "C": 2, "Y": "Non"},
{"S": 2, "L": 3, "C": 3, "Y": "Non"},
{"S": 1, "L": 1, "C": 2, "Y": "Oui"},
{"S": 0, "L": 1, "C": 1, "Y": "Oui"},
{"S": 1, "L": 0, "C": 1, "Y": "Oui"},
{"S": 0, "L": 0, "C": 2, "Y": "Oui"},
{"S": 2, "L": 0, "C": 1, "Y": "Oui"},
{"S": 1, "L": 2, "C": 0, "Y": "Oui"},
]
# Commentaire a classifier
x = {"S": 1, "L": 0, "C": 2}
features = ["S", "L", "C"]
values = [0, 1, 2, 3]
classes = ["Oui", "Non"]
# Comptage des classes
class_counts = Counter(row["Y"] for row in data)
n = len(data)
scores = {}
for y in classes:
    prior = class_counts[y] / n
    score = prior
    for feature in features:
        total_y = class_counts[y]
        count = sum(
            1 for row in data
            if row["Y"] == y and row[feature] == x[feature]
        )
        # Correction de Laplace
        prob = (count + 1) / (total_y + len(values))
        score *= prob
    scores[y] = score
print("Scores :", scores)
prediction = max(scores, key=scores.get)
print("Classe predite :", prediction)
# Normalisation des scores
total_score = sum(scores.values())
probas = {y: scores[y] / total_score for y in classes}
print("Probabilites normalisees :", probas)

```

La sortie attendue est :

```

Scores : {'Oui': 0.024, 'Non': 0.0015}
Classe predite : Oui
Probabilites normalisees :
{'Oui': 0.9411764705882353,
'Non': 0.058823529411764705}

```

Conclusion : le classifieur naïf de Bayes prédit que le commentaire :

S = 1, L = 0, C = 2

doit être classé comme Prioritaire = Oui. Ce résultat est cohérent avec l'intuition : une mauvaise note sur le service et une très mauvaise note sur la livraison signalent probablement une réclamation nécessitant un traitement rapide.