STATISTIQUE MATHÉMATIQUE - MS ENSAI FORMULAIRE SUR L'ESPÉRANCE CONDITIONNELLE - 2025

Conditionnement par un évènement

Si B est un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Si X est une va discrète sur $\mathbb{X}$ et $\mathbb{E}[X] < \infty$,

$$\mathbb{E}[X|B] = \sum_{x \in \mathbb{X}} x \mathbb{P}_B(X = x) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_x x \mathbb{P}([X = x] \cap B)$$

Si X va continue, d'espérance finie et densité f,

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_{X(B)} x f(x) dx = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}$$

Conditionnement par une va

Si X est une va sur $\mathbb{X}$ et $\mathbb{E}[X] < \infty$, et si Y est une va discrète,

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{[Y=y]}]}{\mathbb{P}[Y = y]}$$

On définit ainsi, presque partout, une fonction $\phi(y) = \mathbb{E}[X|Y = y]$. L'espérance conditionnelle de X sachant Y est la va $\phi(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$.

La formule de l'espérance totale donne

$$\mathbb{E}[X] = \sum_y \phi(y)\ \mathbb{P}[Y = y] = \mathbb{E}[\phi(Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]].$$

Si X et Y sont absolument continues, alors les densités conditionnelles sont toujours définies (presque sûrement) :

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)}$$

L'espérance conditionnelle est définie par

$$\phi(y) = \mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x, y) dx$$

si y est tel que $\mathbb{P}[Y = y] > 0$. Sinon, $\phi(y) = 0$. On pose alors $\mathbb{E}[X|Y] = \phi(Y)$.

Conditionnemment par rapport à une tribu

Si X est une va intégrable sur $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, et si $\mathcal{G} \subset \mathfrak{F}$ est une sous-tribu, il existe une va $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ $\mathcal{G}$-mesurable, telle que pour toute variable U $\mathcal{G}$-mesurable et bornée,

$$\mathbb{E}[XU] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]U]$$

Partant de cette définition plus générale, on retrouve les définitions précédentes en conditionnant:

• par rapport à un évènement B : $\mathbb{P}(B|\mathcal{G}) = \mathbb{P}[\mathbb{1}_B|\mathcal{G}]$.

• par rapport à une va Y en posant $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ (tribu engendrée par Y) : $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

$\mathbb{E}[X|Y]$ représente le résidu d'information sur X contenu dans Y. C'est la meilleure prévision possible de X avec les informations provenant de Y.

Lorsque $X \in L^2(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2\right] = \inf_{Z \in L^2(\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathbb{P}))} \mathbb{E}[(X - Z)^2]$$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ représente alors la projection orthogonale de X sur $L^2(\mathbb{X}, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Propriétés

- $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$
- Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}, \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$
- Si $X \leq Y, \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$

• Si $(X_n)_n$ est une suite croissante de va qui convergent p.s. vers X, alors on a la propriété de convergence monotone suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$$

• Si X est indépendante de la tribu $\mathcal{G}$,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$$

• Si X est $\mathcal{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$$

• Si ϕ est convexe et $\phi(X)$ intégrable,

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}] \geq \phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$$