Université
de Rennes

ENSAI
École nationale
de la statistique
et de l'analyse
de l'information

Chapitre 1. Modèle statistique et échantillonnage

Claude Petit, université de Rennes - claude.petit@univ-rennes.fr

Sept. 2025

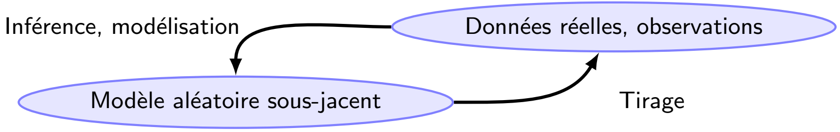
Overview

1. Modèle statistique

Définitions

- Expérience aléatoire $\iff$ espace probabilisé $\iff$ $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.
  - $\mathbb{X}$ ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire.
  - $\mathfrak{F}$ tribu sur $\mathbb{X}$ (évènements de l'expérience).
  - $\mathbb{P}$ mesure de probabilité sur $\mathfrak{F}$.
- Modèle statistique: famille d'expériences aléatoires, $\widehat{\text{m}}$ $\mathbb{X}$ et $\widehat{\text{m}}$ $\mathfrak{F}$: $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$.
- Observation x: réalisation d'une variable aléatoire $X \sim \mathbb{P}$.
- Objectif de l'inférence statistique: déterminer $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ sachant x.

Savoir distinguer $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$!



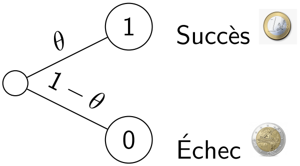
Exemple 1: épreuve de Bernoulli

- X v.a. de loi de Bernoulli $b(\theta)$, $\theta \in [0,1]$ inconnu.

- $x \in \{0,1\}$ résultat d'un lancer à pile ou face, x réalisation de X.

- Choix raisonnable pour $\mathcal{P}$: ensemble des lois de Bernoulli de paramètre θ, θ variant de 0 à 1.

  - $\mathbb{X} = \{0,1\} = \{\pi, \phi\} = \{\text{succès}, \text{échec}\}$.
  - $\mathfrak{F}$ ensemble des parties de $\mathbb{X}$: $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
  - $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta; \theta \in [0,1]\}$ avec $\mathbb{P}_\theta[X=1] = \theta$ et $\mathbb{P}_\theta[X=0] = 1-\theta$.



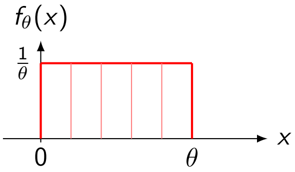
Exemple 2: loi uniforme

- X v.a. de loi uniforme sur $[0, \theta]$, θ inconnu.

- X résultat d'un tirage aléatoire équitable entre 0 et θ.
  - $\mathbb{X} = [0, \theta]$.
  - $\mathfrak{F}$ ensemble des boréliens de $\mathbb{X}$.
  - $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta;\ \theta > 0\}$. $\mathbb{P}_\theta$ défini par sa densité:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x) \tag{1}$$

$\mathbb{P}_\theta$ caractérisé par le paramètre réel θ. Toute valeur de θ définit une mesure.



Modèle d'échantillonnage

- Observons n réalisations $x_1, ..., x_n$ d'une v.a. X, de manière indépendante.

- $X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d. sous-jacentes à ces observations. X_i à valeurs dans $(\mathbb{X}, \mathfrak{F})$, $\mathbb{P}$ la loi commune des X_i. $(X_1, ..., X_n)$ n-échantillon de X.

Definition

On appelle modèle d'échantillonnage associé au n-échantillon, le triplet

$$\left(\mathbb{X}^n, \mathfrak{F}^{\otimes n}, \left\{\mathbb{P}^{\otimes n}, \mathbb{P} \in \mathcal{P}\right\}\right) \tag{2}$$

où $\mathcal{P}$ est une famille de probabilité définie sur $(\mathbb{X}, \mathfrak{F})$.

Par $\perp\!\!\!\perp$ et identique distribution des X_i, $\mathbb{P}^{\otimes n}$ loi du vecteur $(X_1, ..., X_n)$:

$$\mathbb{P}^{\otimes n}(dx_1, ..., dx_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(dx_i) \tag{3}$$

Exemple 3: répétition de n épreuves de Bernoulli $\perp\!\!\!\perp$

• Le modèle d'échantillonnage associé est
$(\{0,1\}^n, \mathfrak{F}^{\otimes n}, \{b(\theta)^{\otimes n}, \theta \in [0,1]\})$, avec $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$.

Ce modèle traduit simplement le fait que dans une expérience répétée de façon indépendante, la loi de probabilité du n-échantillon est la loi produit et l'espace sous-jacent est le produit cartésien de l'espace associé à l'un des éléments de l'échantillon.

• Supposons que $n = 10$ et mettons qu'une réalisation du n-échantillon soit $(0,0,1,1,1,0,1,0,0,1)$. Nous souhaitons évaluer θ à partir de cet échantillon. Comment peut-on procéder ?

Exemple 3: répétition de n épreuves de Bernoulli $\perp\!\!\!\perp$

• Le modèle d'échantillonnage associé est
$(\{0,1\}^n, \mathfrak{F}^{\otimes n}, \{b(\theta)^{\otimes n}, \theta \in [0,1]\})$, avec $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}$.

Ce modèle traduit simplement le fait que dans une expérience répétée de façon indépendante, la loi de probabilité du n-échantillon est la loi produit et l'espace sous-jacent est le produit cartésien de l'espace associé à l'un des éléments de l'échantillon.

• Supposons que $n = 10$ et mettons qu'une réalisation du n-échantillon soit $(0,0,1,1,1,0,1,0,0,1)$. Nous souhaitons évaluer θ à partir de cet échantillon. Comment peut-on procéder ?

$\theta = \overline{x} = \sum x_i/10 = 1/2$.

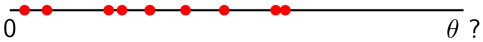
répétition de n épreuves $\perp\!\!\!\perp$ d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$

$(\mathbb{X}^n, \mathfrak{F}^{\otimes n}, \{\mathbb{P}^{\otimes n}, \mathbb{P} \in \mathcal{P}\})$ avec

- $\mathbb{X} = [0, \theta]$.
- $\mathfrak{F} = \mathcal{B}_{[0,\theta]}$.
- $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\theta$ loi uniforme sur $[0, \theta]$.

• Supposons que $n = 10$ et que nous disposions uniquement de l'échantillon $x = (0,1; 0,6; 0,2; 1,2; 3; 0,5; 1,5; 2; 1; 1,9)$.

• Comment estimer θ ?



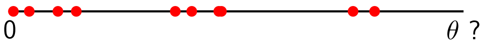
répétition de n épreuves $\perp\!\!\!\perp$ d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$

$(\mathbb{X}^n, \mathfrak{F}^{\otimes n}, \{\mathbb{P}^{\otimes n}, \mathbb{P} \in \mathcal{P}\})$ avec

- $\mathbb{X} = [0, \theta]$.
- $\mathfrak{F} = \mathcal{B}_{[0,\theta]}$.
- $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\theta$ loi uniforme sur $[0, \theta]$.

• Supposons que $n = 10$ et que nous disposions uniquement de l'échantillon $x = (0,1; 0,6; 0,2; 1,2; 3; 0,5; 1,5; 2; 1; 1,9)$.

• Comment estimer θ ?



$\theta = \max_i x_i = 3$.

Statistique sur un modèle

Definition

Une statistique S sur un modèle $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{Y}, \mathcal{G})$, est une application mesurable

$$S : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} \tag{4}$$

$$x \mapsto y = S(x) \tag{5}$$

- Pour une réalisation x de X, $y = S(x)$ réalisation de la v.a. $S(X)$.

Statistique = fonction mesurable des observations de l'expérience. C'est simplement une variable aléatoire !

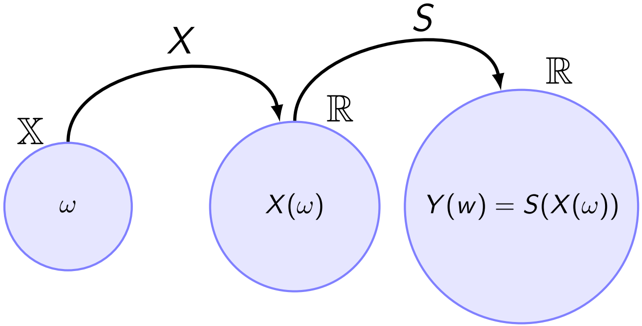


Figure 1: La statistique $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable qui transforme X en $Y = S(X)$.

Exemple: loi binomiale

- $X = (X_1, ..., X_n)$ échantillon de Bernoulli de paramètre θ.

$$S(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{6}$$

Statistique = somme de toutes les observations du n-échantillon.

- Statistique = fonction mesurable des données $\Rightarrow$ définit une v.a. à partir des données initiales.

- Loi image $\mathbb{P}_S$ de $\mathbb{P}$ par S $\Rightarrow$ modèle image.

- Dans l'exemple, $S = S(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Loi image: loi binomiale $\mathbb{P}_S \sim \mathcal{B}(n, \theta)$. Modèle image: $(\mathbb{Y}, \mathcal{G}, \{\mathbb{P}_S : \mathbb{P} \in \mathcal{P}\})$. Considérer S plutôt que X:

$$\mathbb{P}[S \in B] = \mathbb{P}[S(X) \in B] = \mathbb{P}_S(B) = \mathbb{P}[X \in S^{-1}(B)], \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

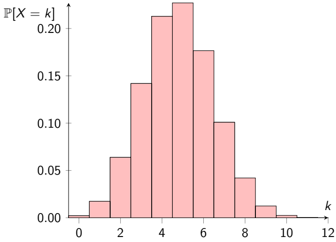
Definition

S suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$ ssi pour tout $k = 0, ..., n$,

$$\mathbb{P}[S = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{7}$$

et $\mathbb{P}[S = k] = 0$ ailleurs.

On note $S \sim \mathcal{B}(n, p)$. On a $\mathbb{E}[S] = np$ et $\mathbb{V}(S) = np(1-p)$.



Exemple: maximum d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$.

• $X = (X_1, ..., X_n)$ échantillon uniforme sur $[0, \theta]$.

$$S(X_1, X_2, ..., X_n) = \max_{i=1}^{n} X_i \tag{8}$$

• L'information concernant la loi inconnue de X au travers de la statistique $S(X)$ est contenue dans la tribu $\mathfrak{F}(S) \subset \mathfrak{F}(X)$.

• $\mathfrak{F}(S) = \mathfrak{F}(X) \iff S$ bijective.

• Habituellement, $\mathfrak{F}(S)$ plus petite que $\mathfrak{F}(X)$ car on attend d'une statistique qu'elle réduise la tribu et condense l'information.

• Tribu $=$ information.

2. Quelques types de modèles statistiques

Rappel: mesure dominée et théorème de Radon-Nikodym

- μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\mathbb{X}, \mathfrak{F})$.

- On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et l'on note $\nu \ll \mu$, si

$$\forall B \in \mathfrak{F}, \mu(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0 \tag{9}$$

- Le théorème de Radon-Nikodym assure que ν possède une densité f par rapport à μ définie par

$$\nu(B) = \int_B f(x) d\mu(x) \tag{10}$$

On note $f = d\nu/d\mu$. f est positive, mesurable et s'appelle densité ou dérivée au sens de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ.

Modèle dominé

Definition

Un modèle statistique $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ est dominé si, et seulement si, tout $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ est dominé par une même mesure μ. μ est la mesure dominante du modèle.

Si un modèle est dominé par une mesure σ-finie μ, alors le modèle image est dominé par la mesure μ_S: $\forall$ B mesurable,

$$\mu_S(B) = 0 \iff \mu(S^{-1}(B)) = 0 \Rightarrow \left(\mathbb{P}(S^{-1}(B)) = 0 \iff \mathbb{P}_S(B) = 0\right)$$

Modèle paramétrique

Definition

Modèle statistique $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ paramétré si les éléments de $\mathcal{P}$ peuvent être décrit par un paramètre: c.-à-d. il existe Λ surjection:

$$\Lambda : \Theta \longrightarrow \mathcal{P} \tag{11}$$

$$\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta \tag{12}$$

$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$. Si Λ bijection, on dit que le modèle est identifiable.

Modèle paramétrique si $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ pour $p \in \mathbb{N}$. Sinon, non-paramétrique.

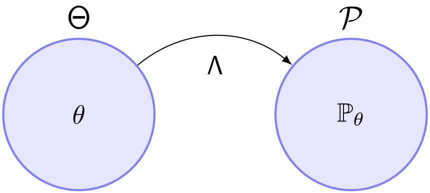


Figure 2: Modèle paramétrique.

Modèles paramétriques: exemples

• Épreuve de Bernoulli: $X \sim b(\theta)$ paramètre: $\theta \in [0,1]$. Modèle paramétrique, identifiable, dominé par mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Si paramètre $= \cos^2\theta$, modèle non identifiable car $\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}_{\theta+\pi}$.

• Modèle d'échantillonnage gaussien: X n-échantillon de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Modèle statistique correspondant:

$$\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes n}, \left\{\mathcal{N}(m,\sigma^2)^{\otimes n} : m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\right\}\right) \tag{13}$$

est paramétrique, dominé et identifiable. Paramétré par (m,σ^2), dominé par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et identifiable car...

• Modèles non paramétriques: ensemble des lois de probabilités sur $\mathbb{R}$ (paramètre $\notin$ à un espace vectoriel de dimension finie).

• Modèles semi-paramétriques: dépendant d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}^p$, mais aussi d'un second paramètre $\in$ à espace de dim. infinie. $=$ terme de nuisance.

Vraisemblance

Definition

Soit $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \{\mathbb{P}_\theta; \theta \in \Theta\})$ dominé par μ σ-finie.
La vraisemblance du modèle est la fonction $\theta \mapsto L(x, \theta)$ définie par

$$L(x, \theta) = d\mathbb{P}_\theta(x)/d\mu(x) \tag{14}$$

La vraisemblance est exactement la densité de la loi $\mathbb{P}_\theta$, vue comme fonction de θ: $\mathbb{P}_\theta(dx) = L(x, \theta)d\mu(x)$.

Soient $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_\theta \ll \lambda$ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; supposons que $\mathbb{P}_\theta$ possède une densité continue $f_\theta(x)$ par rapport à λ et plaçons-nous dans un modèle d'échantillonnage. C'est un modèle paramétrique dominé par λ sur $\mathbb{R}^n$ et la vraisemblance de $\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}$ relativement à $\lambda^{\otimes n}$ est

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \tag{15}$$

Exemple: vraisemblance d'un échantillon uniforme -1-

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ n-échantillon uniforme sur $[0, \theta]$.

$$
\begin{aligned}
L(x, \theta) &= L(x_1, \dots, x_n, \theta) && (16)\\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) \right) && (17)\\
&= \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i) && (18)\\
&= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0 \leq \min x_i \leq \max x_i \leq \theta]} && (19)
\end{aligned}
$$

avec $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ici, vraisemblance = produit des densités.

L'indicatrice de $[0, \theta]^n \subset \mathbb{R}^n$ vaut 1 si, et seulement si, toutes les coordonnées x_i du vecteur x appartiennent à $[0, \theta]$.

Exemple: vraisemblance d'un échantillon uniforme -2-

⚠ Bien distinguer la densité d'une v.a. (fonction de x qui dépend de θ) de la vraisemblance d'un échantillon ou d'une v.a. (fonction de θ qui dépend de x).

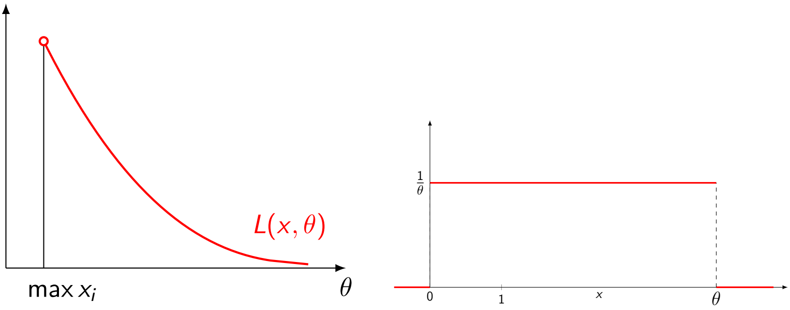


Figure 3: Vraisemblance échantillon uniforme (gauche), densité loi uniforme (droite).

Exemple: vraisemblance d'un échantillon de loi discrète

- Si $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, où $\mathbb{P}_\theta \ll \delta$ mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}_\theta[X \in B] = \sum_{x \in B} \mathbb{P}_\theta[X = x] = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_\theta[X = x]\delta_x(B), \ \forall B \in \mathbb{N} \qquad (20)$$

Le modèle d'échantillonnage correspondant est dominé par la mesure discrète sur $\mathbb{N}^n$ et la vraisemblance de $\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}$ par rapport à cette mesure est donnée par le produit des probabilités

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta[X_i = x_i] \qquad (21)$$

Exemple: échantillon de Bernoulli de paramètre θ.

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x_i)\right) = \theta^s(1-\theta)^{n-s}\mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x)$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\mathbb{1}_{\{0,1\}^n}(x) = 1$ si $x_i = 0$ ou $1 \ \forall \ i$.

Modèle homogène

- Support d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ de densité f par rapport à μ:

$$\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} \tag{22}$$

Support défini à un ensemble de mesure nulle près.

Definition

Modèle paramétrique homogène si support des lois $\mathbb{P}_\theta$ est le même.

$\Rightarrow$ support ne dépend pas de θ $\Rightarrow$ toutes les lois de $\mathcal{P}$ sont $\sim$:

$$\forall \theta, \theta', \ \mathbb{P}_\theta \ll \mathbb{P}_{\theta'} \tag{23}$$

Homogène $\Rightarrow$ dominé $\Rightarrow$ ensembles négligeables sont les mêmes $\forall$ $\mathbb{P}_\theta$.

Homogène $\iff$

$$\exists \ \nu \ \sigma - \text{finie}/ \ \forall \theta, \ \mathbb{P}_\theta \ll \nu \text{ et } d\mathbb{P}_\theta / d\nu > 0 \ \nu - \text{p.p.} \tag{24}$$

Modèle exponentiel: définition 1/7

Definition

Un modèle statistique $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \{\mathbb{P}_\theta; \theta \in \Theta\})$ est exponentiel $\iff$

- Il est paramétrique, dominé et homogène.
- Sa vraisemblance s'écrit

$$L(x,\theta) = h(x) \exp\left(<\lambda(\theta), T(x)> - \beta(\theta)\right) = h(x) e^{\lambda \bullet T - \beta} \tag{25}$$

- $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive (mesure de base).
- $T = (T_1, ..., T_k) : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ mesurable (statistique naturelle).
- $\lambda(\theta) = (\lambda_1(\theta), ..., \lambda_k(\theta)) : \Theta \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^k$ (paramètre du modèle).
- $\beta : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ (fonction de log-partition).

Le produit scalaire de T par λ s'écrit également

$$\lambda \bullet T = \langle \lambda(\theta), T(x) \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(\theta) T_i(x) \tag{26}$$

Modèle exponentiel: propriétés 2/7

- $\lambda(\theta) = \theta \Rightarrow$ paramètre canonique.
- $\Rightarrow$ T est dite statistique canonique du modèle ou statistique naturelle.
- Identifiable $\iff$ $\theta \longrightarrow \lambda(\theta)$ injective.
- $\Rightarrow$ on peut reparamétrer le modèle avec le nouveau paramètre $\lambda \in \Lambda = \{\lambda(\theta);\ \theta \in \Theta\}$.
- $\lambda(\theta)$ non injective $\Rightarrow$ famille surparamétrée en θ.
- De plein rang si les $T_1(x), ..., T_k(x)$ ne sont pas linéairement dépendants.
- Dans le polycopié: beaucoup plus de propriétés: transformée de Laplace de la mesure, convexité de l'espace canonique des paramètres, etc.

Modèle exponentiel: exemples 3/7

- Épreuve de Bernoulli.

Modèle dominé, paramétré par θ, homogène (support $\{0,1\}$) et la vraisemblance s'écrit

$$L(x,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} = \exp\left(x\ln\theta + (1-x)\ln(1-\theta)\right) \tag{27}$$

$$= \exp\left(x\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \ln(1-\theta)\right) \tag{28}$$

Le modèle est donc exponentiel avec pour paramètre

$$\lambda(\theta) = \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \tag{29}$$

et pour statistique naturelle $T(x) = x$ et $\beta(\theta) = -\ln(1-\theta)$.

Modèle exponentiel: exemples 4/7

- Échantillon de loi uniforme sur $[0, \theta]$.

Densité du n-échantillon par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]^n}(x_1, \dots, x_n) \tag{30}$$

où l'indicatrice vaut 1 ssi $0 \leq x_i \leq \theta \ \forall \ i = 1, \dots, n$.

Modèle non homogène donc non exponentiel.

Modèle exponentiel: exemples 5/7

- Loi multinomiale.

$X = (X_1, ..., X_p)$ vecteur multinomial, de paramètres (n, θ) n fixe, θ inconnu,

$$\Theta = \left\{ \theta = (\theta_1, ..., \theta_p) \in [0,1]^p / \sum_{i=1}^{p} \theta_i = 1 \right\} \tag{31}$$

Modélise le tirage de n objets appartenant à p catégories différentes: θ_i proportion d'objets de catégorie i, X_i nombre d'objets de catégorie i parmi les n objets tirés.

Modèle exponentiel, dominé par la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^p$, homogène car le support de la loi est

$$\mathrm{supp}(X) = B_n = \left\{ x \in \mathbb{N}^p : \sum_{i=1}^{n} x_i = n \right\} = \{ x \in \mathbb{N}^p : s = n \} \tag{32}$$

Modèle exponentiel: exemples 6/7

- Loi multinomiale - suite et fin. Densité (discrète) :

$$
\begin{aligned}
h_\theta(x) &= \mathbb{P}_\theta\left[X_1 = x_1, ..., X_p = x_p\right] \\
&= \frac{n!}{x_1!...x_p!}\mathbb{1}_{B_n}(x)\prod_{i=1}^{n}\theta_i^{x_i} = \frac{n!}{x_1!...x_p!}\mathbb{1}_{B_n}(x)\exp\left(\sum_{i=1}^{p} x_i \ln\theta_i\right)
\end{aligned}
$$

- On pourrait choisir comme paramètre $(\ln\theta_1, ..., \ln\theta_p)$ et pour statistique $X_1, ..., X_p$, $\Rightarrow$ surparamétrage car $\sum X_i = n \Rightarrow (X_1, ..., X_p)$ liée. Elle est de rang $p-1$.

- On préfèrera choisir comme statistique $T(X) = (X_1, ..., X_{p-1})$ et paramètre $\lambda(\theta) = (\ln(\theta_1/\theta_p), ..., \ln(\theta_{p-1}/\theta_p))$ et $\beta(\theta) = -n\ln\theta_p$. Ici, $k = p-1$.

- Représentation minimale si les T_i forment une famille libre. Ordre $=$ cardinal de la famille $(T_i)_i$.

Modèle exponentiel: exemples 7/7

- Échantillon gaussien.

$X_1, ..., X_n$ v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. $\theta = (m, \sigma^2)$. Modèle exponentiel (en exercice). Idem si σ^2 est connu et $\theta = m$, ou si m connu et $\theta = \sigma^2$ (en exercice).

- Modèles binomial, de Poisson, gamma.

Un modèle binomial de paramètres (n, θ) est exponentiel et la statistique X est le paramètre naturel (dans le modèle d'échantillonnage correspondant, $S_n = \sum X_i$ est le paramètre naturel). Idem si modèle de Poisson de paramètre θ.

Modèle gamma de paramètres (α, β), de densité:

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \tag{33}$$

le paramètre naturel est donné par la statistique $(X, \ln X)$ (le prouver).

Modèle bayésien: définitions 1/5

Soit $\mathcal{O}$ une tribu sur l'ensemble Θ des paramètres.

Definition

Un modèle bayésien est un modèle statistique $(\mathbb{X}, \mathfrak{F}, \{\mathbb{P}_\theta; \theta \in \Theta\})$ muni d'une loi de probabilité Π sur l'espace $(\Theta, \mathcal{O})$

• Π s'appelle la loi *a priori*. Dans un tel modèle, une valeur θ du paramètre est la réalisation d'une variable aléatoire T de loi Π.

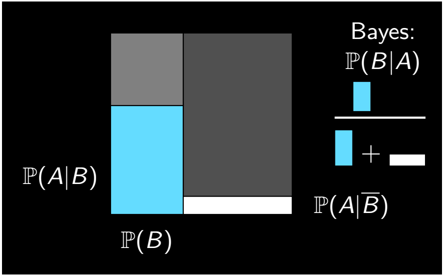
On dispose de 3 lois: la loi *a priori* Π, la vraisemblance $L(x|\theta)$ qui est également la loi conditionnelle de X sachant θ (loi conditionnelle des effets sachant les causes) et la loi *a posteriori* notée $L(\theta|x)$ (loi des causes sachant les effets).

T une v.a. de loi Π. La formule de Bayes donne

$$f_{T/X}(\theta, x) = \frac{f_{X/T}(x,\theta) f_T(\theta)}{f_X(x)} \quad \Rightarrow \quad L(\theta|x) = \frac{L(x|\theta)\Pi(\theta)}{f(x)}$$

Theorem

La vraisemblance a posteriori $L(\theta|x)$ *est proportionnelle à* $L(x|\theta) \times \Pi(\theta)$



Modèle bayésien: exemple échantillon de Bernoulli 3/5

• $X = (X_1, ..., X_n)$ n-échantillon de Bernoulli de paramètre θ inconnu.

• Modélise lancer de n tirages à pile ou face; on souhaite déterminer θ. On pense que la pièce est truquée et des observations passées amènent à définir la loi *a priori* de θ comme une loi béta de paramètres (a, b). Vraisemblance de l'échantillon:

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} L(x_i, \theta) = \theta^s (1-\theta)^{n-s} \tag{34}$$

avec $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$. D'après la formule de Bayes, la vraisemblance *a posteriori* sera proportionnelle à

$$L(\theta|x) \propto \theta^s (1-\theta)^{n-s} \frac{1}{B(a,b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta) \tag{35}$$

À une constante multiplicative près, il s'agit de la densité d'une loi béta de paramètres $(s + a, n - s + b)$.

Modèle bayésien: exemple échantillon gaussien 4/5

$X = (X_1, ..., X_n)$ n-échantillon gaussien $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. θ inconnu, σ^2 connue.
Loi *a priori* gaussienne $\mathcal{N}(a, b^2)$ (a, b^2 hyperparamètres):

$$\Pi(\theta) = \left(2\pi b^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2b^2}(\theta - a)^2\right) \tag{36}$$

Vraisemblance de l'échantillon:

$$L(x|\theta) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2\right) \tag{37}$$

Loi jointe de (X, T):

$$f_{(X,T)}(x, \theta) = \left(2\pi b^2\right)^{-1/2}\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} e^{-\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{n}{\sigma^2}\right)+\theta\left(\frac{a}{b^2}+n\frac{\overline{x}}{\sigma^2}\right)-\left(\frac{a^2}{2b^2}+\frac{n\overline{x^2}}{2\sigma^2}\right)}$$

où $\overline{x} = (\sum x_i)/n$ et $\overline{x^2} = (\sum x_i^2)/n$.

Modèle bayésien: échantillon gaussien 5/5

Posons τ et m tels que:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\tau^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{n}{\sigma^2} \\ \dfrac{m}{\tau^2} = \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{n\overline{x}}{\sigma^2} \end{array}\right. \Rightarrow \; f_{(X,T)}(x,\theta) = \gamma \exp\left(-\Lambda/2\right)$$

$$\text{avec} \left\{\begin{array}{ll} \gamma & = \left(2\pi b^2\right)^{-1/2}\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \\ \Lambda & = \frac{1}{\tau^2}\left(\theta^2 - 2m\theta\right) + \frac{a^2}{b^2} + \frac{n\overline{x^2}}{\sigma^2} \end{array}\right.$$

😱

$$f_{(X,T)}(x,\theta) = \gamma \times \exp\left(\frac{m^2}{2\tau^2} - \frac{a}{2b^2} - \frac{n\overline{x^2}}{2\sigma^2}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\theta - m)^2\right)$$

$$= \text{constante} \times C(x) \times \mathcal{N}(m,\tau^2)$$

$C(x)$ ne dépend pas de θ. Densité de X de la forme $C(x) \times (2\pi\tau^2)^{-1/2}$
$\Rightarrow$ vraisemblance *a posteriori* $\sim \mathcal{N}(m,\tau^2)$.

$n \uparrow \Rightarrow$ observations de + en + importantes / à l'*a priori*.

Fin du chapitre 1

$$\overbrace{\mathbb{P}(A \mid B)}^{\text{\textit{a posteriori}}} = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(B \mid A)}^{\text{vraisemblance}} \cdot \overbrace{\mathbb{P}(A)}^{\text{\textit{a priori}}}}{\underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\text{marginale}}}$$

À retenir : ce qu'est

- un modèle aléatoire.
- une statistique.
- le théorème de Radon-Nikodym.
- la vraisemblance.
- un modèle d'échantillonnage, dominé, homogène, paramètrique, exponentiel, bayésien.