Chapitre 4. Estimation par intervalle de confiance

Claude Petit, université de Rennes - claude.petit@univ-rennes.fr

Sept. 2025

Overview

1. Intervalle et région de confiance: définitions

Définitions

Definition

Soient T_1, T_2 deux statistiques à valeurs réelles telles que $T_1 \leq T_2$ $\mathbb{P}_\theta$-p.s. pour tout $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ et

$$\mathbb{P}_\theta[T_1 \leq \theta \leq T_2] = 1 - \alpha \quad (1)$$

$IC_{1-\alpha}(\theta) = [T_1, T_2]$ est un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ de θ.

Definition

Un sous-ensemble aléatoire $C(X)$ de $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ avec $p \geq 2$, vérifiant pour tout θ:

$$\mathbb{P}_\theta[\theta \in C(X)] = 1 - \alpha \quad (2)$$

est appelé région de confiance de θ au niveau $1 - \alpha$.

2 critères de qualité d'un IC : longueur et niveau de confiance.
S'opposent : compromis entre les 2 (intervalle de longueur la plus petite possible, pour un niveau de risque α donné).

Quantile.

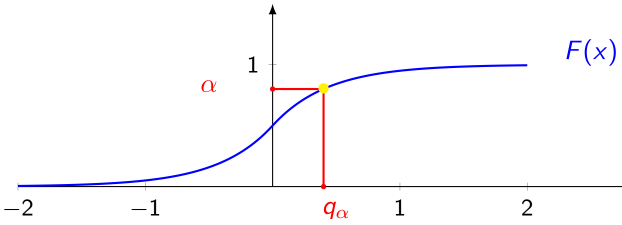

Figure 1: Quantile et fonction de répartition

Étant donné la fonction de répartition F d'une v.a. X sur $\mathbb{R}$, le quantile d'ordre $\alpha \in]0,1[$ de X est

$$q_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\} \tag{3}$$

Si F est continue, $F(q_\alpha) = \alpha$ et si F est strictement croissante, q_α est unique.

2. Méthodes pour déterminer une région de confiance

Fonction pivotale : définition

Definition

• Un pivot $Z = Z(X, \theta)$ est une fonction de la variable d'observation X et du paramètre θ telle que la loi de Z soit libre en θ.

• On dit que θ est un paramètre de position pour T si la loi de $T - \theta$ ne dépend pas de θ, c'est à dire si $T - \theta$ est un pivot.

• On dit que θ est un paramètre d'échelle pour T si la loi de T/θ ne dépend pas de θ, c'est à dire si T/θ est un pivot.

Le pivot se construit généralement à partir d'un estimateur de θ. Une fois déterminé, on cherche, grâce aux quantiles de la loi, un évènement B (qui ne dépend pas non plus de θ) tel que $\mathbb{P}_\theta[Z \in B] = 1 - \alpha$.

La région de confiance est $IC = [\theta \in \Theta : Z \in B]$.

IC : Exemple

$X_1, \ldots, X_n$ n-échantillon de loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$ et $q = q_{1-\alpha/2}$ quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Comme $\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)$ est une v.a. pivotale de loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$\mathbb{P}_\theta \left[\sqrt{n} \left|\overline{X} - \theta\right| \leq q\right] = \Pi(q) - \Pi(-q) = 1 - \alpha \tag{4}$$

où Π est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$:

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \tag{5}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_\theta \left(\theta \in \left[\overline{X} - \frac{q}{\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{q}{\sqrt{n}}\right] \leq q\right) = 1 - \alpha \tag{6}$$

L'intervalle de confiance est

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right] \tag{7}$$

IC : illustration

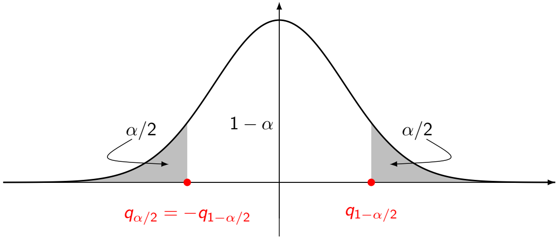

Figure 2: Intervalle de confiance bilatéral de risque α.

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X} - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right] \quad (8)$$

IC : exemple gaussien m inconnu et σ connu

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Un estimateur de θ est donné par $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2/n)$. Pivot :

$$Z = \frac{\overline{X} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{9}$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. Choix des quantiles : q_1, q_2 / $\mathbb{P}_\theta[q_1 \leq Z \leq q_2] = 1 - \alpha$.

Symétrie de $\mathcal{N}(0,1) \Rightarrow$ unique quantile q d'ordre $1 - \alpha/2$ contenant le mode de la densité de la gaussienne pour avoir $\mathbb{P}_\theta[|Z| \leq q] = 1 - \alpha$.

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \; ; \; \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}\right]$$

IC : exemple gaussien m et σ inconnus avec $\theta = m$

Posons $\theta = m$, $Z = (\overline{X} - \theta)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim \mathcal{N}(0,1)$ et

$$Y = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \tag{10}$$

où S^2 variance empirique non biaisée. $Y \sim \chi^2_{n-1}$ et d'après le théorème de Cochran, $S^2 \perp\!\!\!\perp \overline{X}$. On a de $+$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/(n-1)}} = \frac{\overline{X} - m}{\sqrt{S^2/n}} \tag{11}$$

qui suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté, ne dépend que de m (mais sa loi n'en dépend pas, elle est libre de m) $\Rightarrow$ pivot. Par symétrie de la loi de Student, le quantile t d'ordre $1 - \alpha/2$ de cette loi est tel que $-t$ quantile d'ordre $\alpha/2$.

$$IC_{1-\alpha}(m) = \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}\ ;\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}\right]$$

IC : exemple gaussien m et σ inconnus avec $\theta = (m, \sigma^2)$

Posons $\theta = (m, \sigma^2)$.

On cherche une région de confiance incluse dans $\mathbb{R}^2$. Soit

$$Z = \left(\frac{\overline{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}, \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \right) \sim \mathcal{N}(0,1) \otimes \chi^2_{n-1} \tag{12}$$

Soit z quantile d'ordre $1 - \beta/2$ d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et c_1, c_2 quantiles d'ordre $\beta'/2$ et $1 - \beta'/2$ d'une loi χ^2_{n-1}. Par $\perp\!\!\!\perp$ des 2 composantes de Z,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta \left(Z \in [-z, z] \times [c_1, c_2] \right) &= \mathbb{P}_\theta \left(Z_1 \in [-z, z] \right) \times \mathbb{P}_\theta \left(Z_2 \in [c_1, c_2] \right) \\ &= (1-\beta)(1-\beta') = 1 - \alpha \end{aligned}$$

en posant $\alpha = (\beta + \beta') + \beta\beta'$. La région de confiance est :

$$RC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z \; ; \; \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z \right] \times \left[\frac{n-1}{c_1} S^2 \; ; \; \frac{n-1}{c_2} S^2 \right]$$

IC : région de confiance en dimension 2, illustration

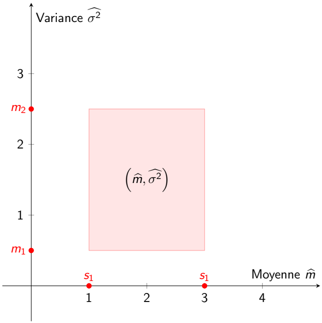

Figure 3: Région de confiance de (m, σ^2) pour un échantillon gaussien.

$$RC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z \; ; \; \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\right] \times \left[\frac{n-1}{c_1} S^2 \; ; \; \frac{n-1}{c_2} S^2\right]$$
$$= [m_1 ; m_2] \times [s_1 ; s_2]$$

IC : illustration d'un IC non symétrique

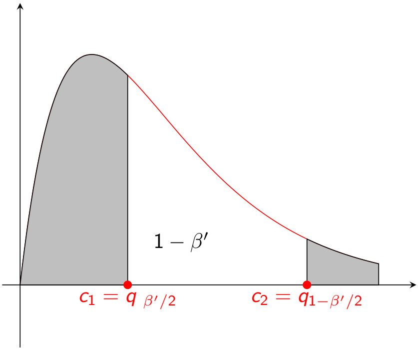

Figure 4: Intervalle de confiance bilatéral (loi du khi deux) pour le paramètre σ^2 au risque β'.

$$IC_{1-\beta'}(\sigma^2) = \left[\frac{n-1}{c_1}S^2\ ;\ \frac{n-1}{c_2}S^2\right]$$

Utilisation des inégalités de Tchebychev et de Hoeffding

Si v.a. est discrète ou loi inconnue $\Rightarrow$ intervalle de confiance par excès : $\mathbb{P}_\theta\left[\theta \in I\right] \geq 1 - \alpha$

Theorem (Inégalité de Tchebychev)

$$\mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2} \tag{13}$$

Theorem (Inégalité de Hoeffding)

$X_1, \ldots, X_n$ n v.a.i.i.d. avec $a \leq X_1 \leq b$ $\mathbb{P}$-p.s. et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \geq t\right] \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right) \tag{14}$$

soit encore

$$\mathbb{P}\left[|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq t\right] \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right) \tag{15}$$

IC par excèe : exemple

$X_1, ..., X_n$ n-échantillon de loi à support dans $[a, b]$, indépendant de θ, avec $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$. IC pour la moyenne $\theta = m$ des X_i ?

Inégalité de Tchebychev :

$$I_1 = \left[\overline{X} - \frac{b-a}{\sqrt{n\alpha}} \; ; \; \overline{X} + \frac{b-a}{\sqrt{n\alpha}}\right] \tag{16}$$

Inégalité de Hoeffding (améliore l'intervalle) :

$$\mathbb{P}_\theta\left[|\overline{X} - \theta| \geq t\right] \leq 2\exp\left(-\frac{2nt^2}{(b-a)^2}\right) \tag{17}$$

$$t = (b-a)\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}} \tag{18}$$

$$\Rightarrow I_2 = \left[\overline{X} - (b-a)\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}} \; ; \; \overline{X} + (b-a)\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}}\right] \tag{19}$$

Contribution de α est meilleure dans I_2 si $\alpha \sim 0$.

IC par inversion d'un test statistique

• Les tests sont le sujet du paragraphe suivant. Nous y verrons le lien entre test et région de confiance et une méthode pour déterminer des intervalles de confiance à partir des régions de rejet des tests.

• Pour la construction d'intervalles de confiance, il faut privilégier les pivots fonctions de statistiques exhaustives et complètes. En effet, le VUMSB est fonction d'une statistique exhaustive complète et la longueur de l'intervalle de confiance sera donc proportionnelle à la variance de l'estimateur considéré.

3. Régions de confiance asymptotiques

Definition

Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$.

Un pivot asymptotique $Z_n = Z(X_1, ..., X_n, \theta)$ est une suite de v.a. telle que Z_n converge en loi vers une v.a. qui ne dépend pas de θ.

Soit $\widehat{\theta}_n$ un estimateur $\sqrt{n}$-consistant et asymptotiquement normal de θ (ou plus généralement de $g(\theta)$) :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \tag{20}$$

Alors un pivot asymptotique est donné par

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1) \tag{21}$$

Méthode du pivot asymptotique -2-

Si σ est connu, on calcule le quantile q d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite et l'on a alors, par définition de la convergence en loi,

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\theta[Z_n \leq q] = 1-\alpha/2 \\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\theta[Z_n \leq -q] = \alpha/2 \end{cases} \tag{22}$$

L'intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour θ est alors donné par

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\left|\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq q\right] \tag{23}$$

Méthode de Wald

Si σ non connu ou dépend de θ : méthode de Wald. Substituer $\sigma(\theta)$ par un estimateur consistant $\widehat{\sigma}(\theta)$ de l'écart type + lemme de Slutsky.

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)}{\widehat{\sigma}} \rightsquigarrow \frac{1}{\sigma(\theta)}\mathcal{N}(0, \sigma(\theta)^2) = \mathcal{N}(0, 1) \tag{24}$$

Si q quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $\mathcal{N}(0, 1)$, alors IC asymptotique est

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\widehat{\theta} - q\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \ ; \ \widehat{\theta} + q\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right] \tag{25}$$

• Exemple : n-échantillon de bernoulli de paramètre θ à estimer. $\theta = p$ et un estimateur est donné par $\overline{X}$. Pivot asymptotique :

$$\sqrt{\frac{n}{\overline{X}(1 - \overline{X})}}(\overline{X} - \theta) \tag{26}$$

Méthode de Wald : fin de l'exemple

En effet, le théorème de la limite centrale montre que

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \tag{27}$$

Et comme $\mathbb{E}[\overline{X}] = \theta$, en remplaçant θ par cet estimateur et en utilisant le lemme de Slutsky, le pivot asymptotique converge en loi vers une gaussienne centrée réduite. L'intervalle de confiance asymptotique est alors

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\overline{X} - \frac{q}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}\ ;\ \overline{X} + \frac{q}{\sqrt{n}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}\right] \tag{28}$$

où q est la quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Stabilisation de la variance

$\Psi : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $\Psi'(\theta) = \nabla\Psi(\theta) = 1/\sigma(\theta)$. Si

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma(\theta)^2) \tag{29}$$

alors par la méthode Δ, on a

$$\sqrt{n}\left(\Psi(\widehat{\theta}_n) - \Psi(\theta)\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, J_\Psi(\theta)\sigma(\theta)^2 J'_\Psi(\theta)) = \mathcal{N}(0,1) \tag{30}$$

$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\Psi(\widehat{\theta}_n) - \Psi(\theta)\right)$ pivot asymptotique. Si Ψ bijective et croissante et q quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$, on en déduit un IC asymptotique :

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\Psi^{-1}\left(\Psi(\widehat{\theta}) - \frac{q}{\sqrt{n}}\right); \Psi^{-1}\left(\Psi(\widehat{\theta}) + \frac{q}{\sqrt{n}}\right)\right] \tag{31}$$

Majoration de $\sigma(\theta)$

Soit $M > 0$ tel que $\sigma(\theta) < M$ pour tout θ. On a

$$1 - \alpha = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_\theta \left[\left| \widehat{\theta} - \theta \right| \leq q \frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{n}} \right] \leq \mathbb{P}_\theta \left[\left| \widehat{\theta} - \theta \right| \leq q \frac{M}{\sqrt{n}} \right] \tag{32}$$

$$= \mathbb{P}_\theta \left[\theta \in \left[\widehat{\theta} - q \frac{M}{\sqrt{n}} ; \widehat{\theta} + q \frac{M}{\sqrt{n}} \right] \right] \tag{33}$$

ce qui donne un intervalle de confiance par excès de θ à un niveau $\geq$ à $1 - \alpha$.

Considérons un test asymptotique de région critique R relativement à un paramètre θ, pour un risque α fixé. Alors on peut considérer la région d'acceptation R comme l'intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour θ, grâce à l'équivalence

$$X \in \overline{R}_\theta \iff \theta \in \mathrm{IC}(X) \tag{34}$$

4. Choix des quantiles

Une loi de probabilité de fonction de répartition F est unimodale s'il existe x_M tel que F convexe avant x_M et concave après. x_M est le mode de F.

Theorem

Soit f densité du pivot Z. Si f unimodale de mode ${}_M$ et si pour $a \leq b$,

$$\bullet\ \mathbb{P}[a \leq Z \leq b] = \int_a^b f(x)dx = 1 - \alpha \tag{35}$$

$$\bullet\ f(a) = f(b) > 0 \tag{36}$$

$$\bullet\ a < x_M < b \tag{37}$$

Alors $[a, b]$ est de longueur minimale vérifiant la 1^{re} condition.

Par exemple, $q_{1-\alpha/2}$ est le meilleur choix de quantile pour une loi symétrique.

$q_{\alpha/2}$ et $q_{1-\alpha/2}$ non optimaux pour une loi du chi deux, mais souvent utilisés par défaut.

5. Intervalle de crédibilité dans un cadre bayésien

Intervalle de crédibilité : définition

Dans un cadre bayésien où l'on suppose que $X \sim \mathbb{P}_\theta$ et $\theta \sim \Pi$, l'analogue d'un intervalle de confiance est appelé intervalle de crédibilité.

Definition

Un intervalle de crédibilité de niveau $1-\alpha$ pour θ est un sous-ensemble $IC_\Pi(X) \subset \Theta$ vérifiant

$$\mathbb{P}\left[H \in IC_\Pi(X) \,|\, X = x\right] = \mathbb{P}\left[\theta \in IC_\Pi(X) \,|\, X = x\right] = 1-\alpha \qquad (38)$$

Lorsque θ est un paramètre réel, alors $IC_\Pi(X) = [a, b]$ avec a, b vérifiant

$$\mathbb{P}[a \leq \theta \leq b \,|\, X = x] = \int_a^b L(\theta, x) d\theta = 1-\alpha \qquad (39)$$

Dans un intervalle de confiance, paramètre fixe et bornes aléatoires (tant que l'observation sur X n'a pas été réalisée), tandis que dans un intervalle de crédibilité, bornes fixes et paramètre aléatoire.

Intervalle de crédibilité : exemple gaussien

X n-échantillon gaussien $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ où σ^2 connu et θ a pour loi *a priori* gaussienne $\mathcal{N}(a, b^2)$. La loi *a posteriori* est $\mathcal{N}(m, \tau^2)$ avec (😱)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{n}{\sigma^2} \\ \dfrac{m}{\tau^2} = \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{n\overline{x}}{\sigma^2} \end{cases} \tag{40}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n + b^2} a + \dfrac{b^2}{\sigma^2/n + b^2} \overline{x} \\ \\ \tau^2 = \dfrac{\sigma^2 b^2/n}{\sigma^2/n + b^2} \end{cases} \tag{41}$$

Sachant $[X = x]$, $Z = (\theta - m)/\tau \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si risque $\alpha \in [0, 1]$ et q quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $\mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$IC_\Pi(X) = [m - q\tau \ ; \ m + q\tau] \tag{42}$$

est $(1 - \alpha)$-crédible car $\mathbb{P}_{Z|[X=x]}[-q \leq Z \leq q] = 1 - \alpha$.

Fin du chapitre 4

À retenir :

- .
- .
- .
- .
- .

En Machine Learning, le choix des ....