

Le sujet comporte 2 pages. Durée de l'épreuve : 2h. Tous documents autorisés, calculatrices autorisées. Le barème est indicatif et sans engagement. La qualité de la rédaction entre pour une part importante dans la notation.

Rappels

La densité d'une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, notée $\mathcal{E}(\theta)$ est :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \quad (1)$$

Celle d'une loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$, est :

$$g(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \quad (2)$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \quad (3)$$

Si Y est une variable aléatoire de loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ sa moyenne et sa variance sont respectivement :

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{\alpha}{\beta} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (4)$$

On rappelle que la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$ est une loi $\Gamma(n, \theta)$. Enfin, la loi bêta de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, notée $B(\alpha, \beta)$, a pour densité :

$$h(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \quad (5)$$

Si Z suit une loi $B(\alpha, \beta)$ sa moyenne et sa variance sont respectivement :

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \text{ et } \mathbb{V}(Z) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (6)$$

I. 7 points

On considère un n -échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ d'une v.a. de loi de Bernoulli de paramètre inconnu $\theta \in]0, 1[$.

On note $S = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{X} = S/n$ la moyenne empirique de l'échantillon.

1°. Expliquer succinctement pourquoi le modèle est régulier.

2°. Calculer la log-vraisemblance $l(x, \theta)$ de l'échantillon et en déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ .

3°. Montrer que cet estimateur est fortement consistant et converge en moyenne quadratique.

4°. Démontrer que $\hat{\theta}$ est asymptotiquement normal et montrer que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (7)$$

en précisant σ^2 en fonction de θ .

5°. Déterminer une statistique exhaustive et complète pour θ puis en déduire un estimateur VUMSB. Est-il efficace?

6°. On suppose maintenant que θ suit une loi *a priori* dont la densité est donnée par

$$\Pi(\theta) = \frac{K}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \quad (8)$$

où K est une constante de normalisation. Calculer la vraisemblance *a posteriori* du modèle et reconnaître la loi de θ sachant les observations. À partir de la moyenne *a posteriori* $\mathbb{E}[\Pi|X]$, déterminer un estimateur bayésien de θ .

II. 14 points

On considère un n -échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ d'une v.a. de loi exponentielle de paramètre inconnu $\theta > 0$.

On note $S = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{X} = S/n$ la moyenne empirique de l'échantillon.

1°. Déterminer l'estimateur des moments $\hat{\theta}$ de θ .

2°. Calculer la log-vraisemblance $l(x, \theta)$ de l'échantillon et en déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ , en fonction de $\bar{X}$.

3°. Montrer que cet estimateur est fortement consistant.

4°. À l'aide des rappels, démontrer que

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{S} \right] = \frac{\theta}{n-1} \quad (9)$$

et en déduire $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}]$. Déduire que l'estimateur $T_n = (n-1)/S$ est non biaisé.

5°. En calculant $\mathbb{E}[1/S^2]$ comme précédemment, démontrer que

$$\mathbb{V}(T_n) = \frac{\theta^2}{n-2} \quad (10)$$

En déduire que T_n converge en moyenne quadratique.

6°. Démontrer que $\hat{\theta}_{MV}$ est asymptotiquement normal et que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta^2) \quad (11)$$

7°. Déterminer une statistique exhaustive et complète pour θ puis en en déduire que T_n est VUMSB pour θ .

8°. Expliquez pourquoi le modèle est régulier (on ne justifiera que les propriétés évidentes sans calcul) et calculer l'information de Fisher $\mathbb{I}_X(\theta)$ associée à θ pour l'échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$.

9°. T_n est-il un estimateur efficace? Asymptotiquement efficace?

10°. On suppose maintenant que θ suit une loi *a priori* $\Gamma(\alpha, \beta)$. Calculer la vraisemblance *a posteriori* du modèle et reconnaître la loi de θ sachant les observations. À partir de la moyenne *a posteriori* $\mathbb{E}[\Pi|X]$ déterminer un estimateur bayésien de θ . Quelle est sa limite lorsque n tend vers l'infini?

