

1°. Le modèle est homogène (son support $\{0, 1\}^n$ ne dépend pas de θ) paramétrique, dominé par la mesure de comptage et la vraisemblance (que l'on va calculer) est de classe C^∞ sur $]0, 1[$, intégrable. $L(x, \theta) > 0 \forall x \neq \theta$. On admet le reste! 0,5

$$2^\circ. \ell(x, \theta) = \ln \left(\prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} \right) \quad x_i = 0, 1$$

$$= \ln(\theta^s (1-\theta)^{n-s}) = s \ln \theta + (n-s) \ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(x, \theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{s}{\theta} + \frac{(n-s)}{1-\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta = \bar{s}$$

et il s'agit bien d'un maximum. Ainsi, $\hat{\theta} = \bar{s}$ est l'estimateur du max de vraisemblance. 1,5

3°. Les X_i sont iid et intégrables, donc la loi forte des grands nombres (LFGN par la suite) s'applique et $\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E[X] = \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ fortement consistant 0,5

$\bar{X}$ est sans biais et $V(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ donc $\bar{X}$ est convergent en moyenne quad. 0,5

4°. Les X_i sont de carré intégrables car $V(X_i) = \theta(1-\theta) < \infty$. Le théorème de la limite centrale (TCL par la suite) s'applique et l'on a:

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta)) \quad 1$$

5°. Le modèle est exponentiel car

$$L(x, \theta) = \exp(s \ln \theta + (n-s) \ln(1-\theta))$$

$$= \exp(s \ln \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right) - (-n \ln(1-\theta)))$$

$$= h(x) \exp(\eta(\theta) \cdot T(x) - \beta(\theta))$$

$$\text{avec } h(x) = 1, \eta(\theta) = \ln \frac{\theta}{1-\theta}, T(x) = s$$

Le critère de Neyman-Fisher assure alors que $S = \sum X_i$ est une statistique exhaustive pour θ . 1

$$\text{Comme } \eta(\theta) = \ln \frac{\theta}{1-\theta}; \theta \in]0, 1[$$

décrit $\mathbb{R}$, il contient un ouvert et d'après le critère de complétude de S est complète.

Donc $\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{S}{n}$ est exhaustive et complète.

Nous appliquons le critère de Lehmann-Scheffé: $\bar{X}$ est sans biais S est complète donc

$$\bar{X} = E[\bar{X} | S] \text{ est VONSB}$$

Comme le modèle est régulier, on peut calculer l'information de Fisher associée à X :

$$\Pi_{X_1}(\theta) = V\left(\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(X_1, \theta)\right) = V\left(\frac{X}{\theta} + \frac{1-X}{1-\theta}\right)$$

$$= V\left(\frac{X+\theta}{\theta(1-\theta)}\right) = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} V(X) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$$\Rightarrow \Pi_X(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)} \quad 1$$

Par ailleurs, $V(\bar{X}) = \frac{V(X_1)}{n} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ on a donc bien

$$V(\bar{X}) = \Pi_X(\theta)^{-1}$$

c'est à dire que $\bar{X}$ atteint la borne de Cramer-Rao: il est efficace.

$$6^\circ. L(x, \theta) = \theta^s (1-\theta)^{n-s} \theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2} = \theta^{s-1/2} (1-\theta)^{n-s-1/2}$$

on reconnaît la densité d'une loi bêta (à une constante multiplicative près) de paramètres $\alpha = s+1/2$ et $\beta = n-s+1/2$ 1

$\bar{X}$ estimateur de la moyenne a posteriori est donc:

$$E[\Pi | X] = \frac{s+1/2}{n+1}$$

II.

$$1^\circ. E[X_1] = \frac{1}{\theta}. \text{ On pose donc } \bar{X} = 1/\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \bar{X}^{-1} \quad 0,5$$

$$2^\circ. \ell(x, \theta) = \ln(\theta^n e^{-s\theta}) \text{ avec } \theta > 0$$

$$= n \ln \theta - s\theta$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - s \text{ qui s'annule et change de signe en } \hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{s} = \frac{1}{\bar{X}} \quad 1$$

3°. Les X_i sont iid et dans L^1 donc la LFGN s'applique: 0,5

$$\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} E[\bar{X}] = \frac{1}{\theta}$$

soit $u(x) = \frac{1}{x}$; u est continue sur $]0, \infty[$ donc le théorème de l'application continue assure que

$u(\bar{X}) \xrightarrow[p.s.]{n} u(\frac{1}{\theta})$ c'est à dire

$$\hat{\theta}_{NV} \xrightarrow[p.s.]{n} \theta$$

0,5

4°. S suit une loi $\Gamma(n, \theta)$. D'après le théorème de transfert:

$$E[\frac{1}{S}] = \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\theta x} dx \quad \text{Posons } y = \theta x$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{y^{n-2}}{\theta^{n-2}} e^{-y} \frac{dy}{\theta} = \theta \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(n)} = \frac{\theta}{n-1}$$

$$\Rightarrow E[\hat{\theta}_{NV}] = \frac{n\theta}{n-1} \Rightarrow E[T_n] = \theta$$

$$5°. E[\frac{1}{S^2}] = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\theta x} dx = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$\Rightarrow E[(\frac{n-1}{S})^2] = \frac{n-1}{n-2} \theta^2$$

$$\Rightarrow V(T_n) = V(\frac{n-1}{S}) = \frac{n-1}{n-2} \theta^2 - \theta^2 = \frac{\theta^2}{n-2}$$

$V(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc T_n est convergent

6°. D'après le TCL (v.a.i.i.d et L^2)

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \frac{1}{\theta}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \frac{1}{\theta^2})$$

posons à nouveau $u(x) = \frac{1}{x}$ qui est de classe C^2 sur $]0, \infty[$

$$\text{avec } u'(x)^2 = \frac{1}{x^4}$$

La méthode delta assure alors que

$$\sqrt{n}(u(\bar{X}) - u(\frac{1}{\theta})) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$\text{avec } \sigma^2 = u'(\frac{1}{\theta})^2 \frac{1}{\theta^2} = \frac{\theta^4}{\theta^2} = \theta^2$$

c.-à-d. que

$$\sqrt{n}(\frac{1}{\bar{X}} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

et l'on a de même $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2)$

7°. Le modèle est exponentiel et la vraisemblance s'écrit:

$$L(x, \theta) = \exp(-s\theta + n \ln \theta) \mathbb{1}_{(\min x_i) \in \mathbb{R}_+}$$

$S = \sum_{i=1}^n X_i$ est donc exhaustive

(critère de Neyman-Fisher) et complète car l'espace des paramètres $\theta \in]0, \infty[$.

Par ailleurs, $T_n = \frac{n-1}{S}$ est sans biais donc

$$T^* = E[T_n | S] = T_n \text{ est VUNSB}$$

0,5

8°. Le modèle est paramétrique, homogène, dominé et la vraisemblance est C^2 , différentiable ex sous le 1^{er} signe somme. Le score $\in L^2$ et l'ens¹ des paramètres est ouvert ($\Theta =]0, \infty[$) $\Rightarrow$ le modèle est régulier.

9°. $V(T_n) = \frac{\theta^2}{n-2}$ et on a facilement

$$\pi_X(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \text{ donc } T_n \text{ n'est pas efficace}$$

$$\text{car } \pi_X'(\theta) \neq V(T_n)$$

Il est asymptotiquement efficace

10°. Un calcul facile montre que la vraisemblance a posteriori est proportionnelle à une loi gamma de paramètres $\Gamma(n+\alpha, s+\beta)$

$E[\pi/X] = \frac{n+\alpha}{s+\beta}$ est l'estimateur bayésien de la moyenne a posteriori, quand $n \rightarrow \infty$, $\hat{\theta}_b \rightarrow \frac{1}{\bar{X}} = \hat{\theta}_{NV}$