

1°. Le modèle est homogène (support = $\{0,1\}^n$ ne dépend pas de θ)
paramétrique, dérivé par la
mesure de comptage et la
vraisemblance (calculée plus loin)
est de classe C^∞ sur $]0,1[$, intégrable.
On admet le reste!

2°. $\ell(x, \theta) = \ln \left(\prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} \right)$
 $x_i = 0, 1$
 $\ell(x, \theta) = \ln(\theta^s (1-\theta)^{n-s})$
 $= s \ln \theta + (n-s) \ln(1-\theta) \quad s = \sum_{i=1}^n x_i$

• $\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(x, \theta) = \frac{s}{\theta} + \frac{n-s}{1-\theta}$ qui s'annule
et change de signe en $\theta = \bar{s} = \frac{1}{n} \sum x_i$
 $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ est l'E.M.V.

3°. Les x_i sont i.i.d, intégrables, donc
la loi forte des grands nombres s'
applique et $\bar{X} \xrightarrow{ps} E[X] = \theta$

$\hat{\theta}_n$ fortement consistant.

• $\bar{X}$ est sans biais et $V(\bar{X}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \xrightarrow{ps} 0$
 $\Rightarrow \bar{X}$ converge en moy quadratique

• Les x_i sont i.i.d et L^2 donc le
théorème de la limite centrale

s'applique: $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta))$

4°. $\theta \in]0,1[$ de θ est $\hat{\theta}_n = \bar{X} = S_n/n$
D'après le théorème de reparamétrisation
celui de $d = \theta^2$ est $(S_n/n)^2$
(changement de variable via x^2)

5°. $V(\bar{X}) = E[\bar{X}^2] - E[\bar{X}]^2 \Rightarrow$
 $E[\bar{X}^2] = E[\hat{d}_n] = V(\bar{X}) + E[\bar{X}]^2$
si $\hat{d}_n$ était sans biais, on aurait
 $V(\bar{X}) = 0$, ce qui est absurde

$b(\hat{d}_n) = \theta^2 + \frac{\theta(1-\theta)}{n} - \theta^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$
mais ce biais tend vers 0 quand
 n tend vers $+\infty$.

6°. On a vu que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{ps} \theta$. D'après le
th. de l'application continue,
 $\sqrt{\frac{1}{n}} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{ps} \theta^2$ donc $\hat{d}_n$ fort consistant
• on applique la méthode delta
à $\hat{\theta}_n$ en utilisant $\psi(x) = x^2$
qui est de classe C^2

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta))$

$\sqrt{n}(\hat{d}_n - \theta^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

avec $\sigma^2 = \psi'(\theta)^2 \theta(1-\theta) = 4\theta^3(1-\theta)$
puis de $d = \theta^2$, on tire:
 $\sigma^2(d) = 4d\sqrt{n}(1-\sqrt{d})$.

7°. Le modèle est régulier, on peut
donc calculer $\Pi_X(\theta)$ et/ou $\Pi_X(d)$

$L(X, \theta) = \theta^S (1-\theta)^{n-S}$

$\ell(X, \theta) = S \ln \theta + (n-S) \ln(1-\theta)$

$\ell(X, d) = \frac{S}{2} \ln d + (n-S) \ln(1-\sqrt{d})$

$\frac{\partial \ell}{\partial d}(X, d) = \frac{S}{2d} - \frac{(n-S)}{2\sqrt{d}(1-\sqrt{d})} = U$ score

$E[U] = \frac{1}{2d} E[S] - \frac{1}{2} E[\frac{n-S}{\sqrt{d}(1-\sqrt{d})}]$

$= \frac{n\theta}{2\theta^2} - \frac{n(1-\theta)}{2\theta(1-\theta)} = 0$

$\Pi_n(\theta) = V(U) = V\left(\frac{S - n\theta}{2\theta^2(1-\theta)}\right)$

$= \frac{1}{4\theta^4(1-\theta)^2} V(S) = \frac{n\theta(1-\theta)}{4\theta^4(1-\theta)^2}$

$= \frac{n}{4} \frac{1}{\theta^3(1-\theta)} = \Pi_n(\theta) = \Sigma_n(\theta)^{-1}$

la borne de Cramer Rao est donc
atteinte; $\hat{d}_n$ est asymp sans biais.
 $\Rightarrow$ asymptotiquement efficace

8°. $X_{\bullet,i} = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$

$L(X_{\bullet,i}, d) = \theta^{S_{\bullet,i}} (1-\theta)^{n-1-S_{\bullet,i}}$

$S_{\bullet,i} = S - X_i$

$d \in \mathcal{N}$ dans le modèle image $X_{\bullet,i}$
et $\frac{S - X_i}{n-1}$ et par reparamétrisation

$\hat{d}_n(i) = \left(\frac{S - X_i}{n-1}\right)^2$ est l'EMV de d

9°. $E[T_n] = n E[\hat{d}_n] - \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{d}_n(i)$

$= n \theta \frac{(1-\theta)}{n} - \frac{n-1}{n} n E[\hat{d}_n(1)]$

$= \theta(1-\theta) - (n-1) E\left[\left(\frac{S - X_1}{n-1}\right)^2\right]$

$= \theta(1-\theta) - \frac{1}{n-1} E[S_{\bullet,1}^2]$

et $E[S_{\bullet,1}^2] = V(S_{\bullet,1}) + E[S_{\bullet,1}]^2$

$\Rightarrow E[T_n] = \theta(1-\theta) - \theta(1-\theta) + n = n$

$$II. f(x) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbb{1}_{[\theta, \infty[}(x)$$

1°. Le modèle n'est pas homogène donc pas régulier.

$$2°. F(t) = \int_{\theta}^t f(x) dx \quad \text{si } t \geq \theta \\ \text{et } 0 \text{ sinon}$$

$$F(t) = \frac{3\theta^3}{3} \left(-\frac{1}{x^3} \right)_{\theta}^t = 1 - \left(\frac{\theta}{t} \right)^3 \quad \text{si } t \geq \theta$$

$$E[X] = \int_{\theta}^{\infty} x \frac{3\theta^3}{x^4} dx = 3\theta^3 \int_{\theta}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$$

$$= -\frac{3}{2} \theta^3 \left(\frac{1}{x^2} \right)_{\theta}^{\infty} = \frac{3\theta}{2}$$

$$E[X^2] = \int_{\theta}^{\infty} x^2 \frac{3\theta^3}{x^4} dx = 3\theta^3 \int_{\theta}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$= -3\theta^3 \left(\frac{1}{x} \right)_{\theta}^{\infty} = 3\theta^2$$

$$\Rightarrow V(X) = 3\theta^2 - \frac{9\theta^2}{4} = \frac{3\theta^2}{4}$$

$$3°. F_n(t) = P[M_n \leq t]$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \geq t]\right)$$

$$= 1 - (1 - P[X_1 \leq t])^n \quad \text{par II et id. des } X_i$$

$$= 1 - (1 - 1 + (\theta/t)^3)^n$$

$$= 1 - (\theta/t)^{3n} \quad (\text{et } 0 \text{ si } t \leq \theta)$$

$$f_n(t) = \theta^{3n} \frac{3n}{t^{3n-1}} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty[}(t)$$

$$E[M_n] = \frac{3n\theta}{3n-1} \quad V(M_n) = \frac{3n\theta^2}{(3n-1)^2(3n-2)}$$

4°. En posant $c_n = \frac{3n-1}{3n}$ on a

$$\hat{M}_n = (1 - \frac{1}{3n}) M_n \text{ estimateur sans biais de } \theta$$

$$\text{car } E[c_n M_n] = \theta$$

$$\text{Enfin, } V(\hat{M}_n) = \frac{\theta^2}{3} \frac{1}{n(3n-2)} \sim \frac{\theta^2}{9n^2}$$

$$V(\hat{M}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \hat{M}_n \xrightarrow[L^2]{n} \theta$$

5°. $\hat{M}_n$ n'étant pas une moyenne empirique, on ne peut pas lui appliquer le théorème de la limite centrale.

$$6°. \bar{X} = \frac{S_n}{n} \Rightarrow E[\bar{X}] = E[X_1] = \frac{3\theta}{2}$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{2}{3} \bar{X} \text{ estimateur sans biais de } \theta$$

7°. D'après la loi forte des grands nombres (les X_i sont iid et possèdent un moment d'ordre 1 car $E[X_1] = \frac{3\theta}{2} < \infty$)

$$\bar{X}_n \xrightarrow[p.s.]{n} E[X_1]$$

$\Rightarrow T_n = \frac{2}{3} \bar{X}_n \xrightarrow[p.s.]{n} \theta$ d'après le théorème de l'application continue

($\varphi(x) = \frac{2}{3}x$ est continue).

Donc T_n est fortement consistant.

• Le théorème de la limite centrale est licite ($\text{var}(X_1) < \infty$) et donne

$$\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{3\theta}{2} \right) \xrightarrow[n]{n} \mathcal{N}\left(0, \frac{3\theta^2}{4}\right)$$

en appliquant la méthode Δ à $\varphi(x) = \frac{2}{3}x$, on a $\varphi'(x)^2 = 4/9$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{n} (T_n - \theta) \xrightarrow[n]{n} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$\text{avec } \sigma^2 = 4/9 \times \frac{3}{4} \theta^2 = \frac{\theta^2}{3}$$

*