



Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.

Calculatrices interdites.

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points.

1°. Un code secret contient 6 caractères choisis parmi les 128 du code ascii et 2 chiffres entre 0 et 9. Combien existe-t-il de codes ?

2°. Un autre code secret contient 8 caractères choisis parmi les 128 du code ascii. Parmi eux se trouvent deux @ mais on ne sait pas où. Combien existe-t-il de codes ?

3°. Combien existe-t-il de mains non ordonnées de 5 cartes contenant exactement 3 as (dans un jeu de 32 cartes) ?

4°. Montrer que le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés est égal à $\frac{n(n-3)}{2}$
 Quel polygone possède autant de diagonales que de côtés ?

II. 3 points.

1°. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer :

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

2°. Calculer de même

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

3°. Développer $(a + b)^7$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

III. 5 points.

On considère deux urnes : U_1 contient 3 boules blanches et 1 noire et U_2 contient 1 boule blanche et 1 noire. On lance un dé à six faces normal. Si l'on fait 1 ou 6, on choisit une boule dans U_1 . Sinon, on la choisit dans U_2 . On considère les événements suivants :

- N On a tiré une boule noire.
- B On a tiré une boule blanche.
- U_1 On a choisit une boule dans l'urne U_1 .
- U_2 On a choisit une boule dans l'urne U_2 .

1°. Expliciter $\mathbb{P}(N/U_1)$, $\mathbb{P}(N/U_2)$, $\mathbb{P}(B/U_1)$ et $\mathbb{P}(B/U_2)$

2°. Calculer $\mathbb{P}(N)$ puis $\mathbb{P}(U_1/N)$

3°. Les événements N et U_1 sont-ils indépendants ? disjoints ?

IV. 7 points.

On considère une urne qui contient initialement deux boules noires et deux boules blanches. On tire au hasard une première boule ; si elle est blanche, on la garde et on en tire une seconde. Si par contre la première boule est noire, on la remet dans l'urne et on en tire une seconde.

On note B_i l'évènement "on a tiré une boule blanche au tirage numéro i " pour $i = 1, 2$.

On note N_i l'évènement "on a tiré une boule noire au tirage numéro i " pour $i = 1, 2$.

1°. Déterminer $\mathbb{P}(N_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(B_2/N_1)$, $\mathbb{P}(N_2/N_1)$, $\mathbb{P}(B_2/B_1)$ et $\mathbb{P}(N_2/B_1)$.

2°. Calculer $\mathbb{P}(N_2)$ et $\mathbb{P}(B_2)$.

3°. Calculer $\mathbb{P}(B_1/B_2)$ puis $\mathbb{P}(B_1 \cup B_2)$.

4°. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ? Et les événements N_2 et B_2 ?