MATHEMATIQUES CR N°5

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2006/2007

- Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points.

1°. Un code secret contient 6 caractères choisis parmi les 128 du code ascii et 2 chiffres entre 0 et 9. Combien existe-t-il de codes ?

Les 6 caractères se choisissent de 128^6 façons et les chiffres de 10^2 façons. D'après le principe multiplicatif, le nombre de codes possibles est $128^6 \times 10^2$. $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Un autre code secret contient 8 caractères choisis parmi les 128 du code ascii. Parmi eux se trouvent deux @ mais on ne sait pas où. Combien existe-t-il de codes ?

La position des deux @ se calcule de $C_8^2 = 28$ façons. Le choix des 6 autres caractères de 127^6 façons. Au total $127^6 \times 28$ codes sont possibles. $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Combien existe-t-il de mains non ordonnées de 5 cartes contenant exactement 3 as (dans un jeu de 32 cartes) ?

Les 3 as se choisissent de $C_4^3 = 4$ façons. Les autres cartes se choisissent parmi les 28 cartes qui qui ne sont pas des as, ie de C_{28}^2 façons. Au total, il y a donc $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1512$ mains possibles. $\boxed{\text{1 point}}$

4°. Montrer que le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés est égal à $\dfrac{n(n-3)}{2}$
Quel polygone possède autant de diagonales que de côtés ?

Un polygone possède n côtés et n sommets. Pour définir une diagonale, il suffit de choisir 2 points : il y a donc au total C_n^2 couples possibles, dont les n sommets. Le nombre de diagonales est donc
$C_n^2 - n = n(n-1)/2 - n = n(n-3)/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

Nous cherchsons n tel que
$n(n-3)/2 = n \iff n - 3 = 2 \iff n = 5$. Le seul polygone a avoir autant de côtés que de diagonales est donc le pentagone. $\boxed{\text{1point}}$

II. 3 points.

1°. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$

$\boxed{\text{1 point}}$

2°. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n$
$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = (1-1)^n = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + ...$
$... + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

en utilisant le triangle de Pascal $\boxed{\text{1 point}}$

III. 5 points.

1°. D'après l'énoncé, on directement :
$\mathbb{P}(N/U_1) = 1/4$, $\mathbb{P}(N/U_2) = 1/2$
$\mathbb{P}(B/U_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(B/U_2) = 1/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. D'après la formule des probas totales :
$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N/U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(N/U_2)\mathbb{P}(U_2)$
$= 1/4 \times 1/3 + 1/2 \times 2/3 = 5/12$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(U_1/N) = \frac{\mathbb{P}(N/U_1)\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{1/4 \times 1/3}{5/12} = \frac{1}{5}$$

$\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. Les évènements N et U_1 sont-ils indépendants ? disjoints ?

$\mathbb{P}(N/U_1) \neq \mathbb{P}(N)$ ils ne sont donc pas indépendants.
$\mathbb{P}(N \cap U_1) \neq 0$ ils ne sont donc pas disjoints. $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 7 points.

e ; si elle est blanche, on la garde et on en tire une seconde. Si par contre la première boule est noire, on la remet dans l'urne et on en tire une seconde.

On note B_i l'évènement "on a tiré une boule blanche au tirage numéro i" pour $i = 1, 2$.
On note N_i l'évènement "on a tiré une boule noire au tirage numéro i" pour $i = 1, 2$.

1°. En lisant l'énoncé, on a facilement :
$\mathbb{P}(N_1) = \mathbb{P}(B_1) = 1/2$
$\mathbb{P}(B_2/N_1) = \mathbb{P}(N_2/N_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(B_2/B_1) = 1/3$ et
$\mathbb{P}(N_2/B_1) = 2/3$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. Calculer $\mathbb{P}(N_2)$ et $\mathbb{P}(B_2)$.

On applique la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_2/N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(N_2/B_1)\mathbb{P}(B_1) = 7/12$
$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2/N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(B_2/B_1)\mathbb{P}(B_1) = 5/12$
$\boxed{\text{2 points}}$

3°. $\mathbb{P}(B_1/B_2) = \dfrac{\mathbb{P}(B_2/B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(B_2)} = \dfrac{1/6}{5/12} = \dfrac{2}{5}$ $\boxed{\text{1 point}}$
$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$
$= 1/2 + 5/12 - (1/3 \times 1/2)) = \dfrac{9}{12}$

$\boxed{\text{1 point}}$

4°. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
NON, car $\mathbb{P}(B_2/B_1) \neq \mathbb{P}(B_2)$ $\boxed{\text{0.5 point}}$
Et les évènements N_2 et B_2 ?
NON, car $\mathbb{P}(N_2 \cap B_2) = 0$ $\boxed{\text{0.5 point}}$