MATHEMATIQUES CR N°5

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2007/2008 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 11 points.

Calculer les intégrales ci-dessous :

1°. $\displaystyle\int\int_D \frac{x^2}{1+y^2}\ dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1\}$

2°. $\displaystyle\int\int_D xy\ dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x+y \le 1\}$

3°. $\displaystyle\int\int\int_D\ dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ z \ge 0\ ;\ x+y+z \le 1\}$

4°. $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\ dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x^2+y^2 \le 1\}$

5°. $\displaystyle\int\int_D (1-x^2-y^2)\ dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x^2+y^2 \le 1\}$

II. 5 points.

Soit $I = \displaystyle\int\int_D \exp(\frac{y}{x+y})\ dxdy$

On pose $D = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1\ ;\ x+y \le 1\}$ et $\Delta = \{(u,v)/\ 0 \le u \le 1\ ;\ 0 \le v \le 1\ \}$

On note $\phi : \Delta \longrightarrow D$ la fonction définie par $\phi(u,v) = (x,y)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} u = x+y \\ v = \dfrac{y}{x+y} \end{array}\right.$$

1°. Démontrer que $\phi(\Delta) = D$

2°. Déterminer la matrice jacobienne et le déterminant jacobien de ϕ.

3°. Calculer I en effectuant le changement de variables proposé.

III. 4 points.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x^2+y^2 \le n^2\}$

Soit $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\}$

Soient $I_n = \displaystyle\int\int_{D_n} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$ et $I = \displaystyle\int\int_{\mathcal{P}} e^{-x^2-y^2}\ dxdy$

1°. Tracer rapidement $\mathcal{P}$ et D_n

2°. Calculer I_n, puis en déduire la valeur de I

3°. Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$$