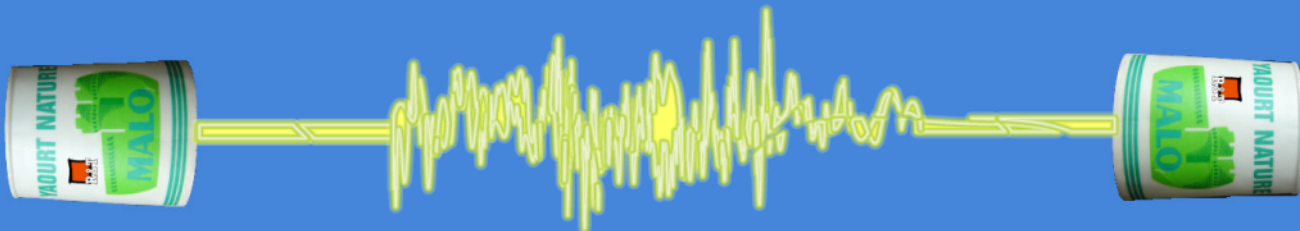


Cours de Mathématiques

Reseau & Telecommunications



ours de athématiques.

Claude PETIT
Département Réseaux & Télécommunications
IUT de Saint Malo

27 mai 2010

Table des matières

I	Semestre 1	11
1	Les nombres complexes	13
1.1	Structure de \mathbb{C}	13
1.1.1	Forme algébrique d'un complexe	13
1.1.2	Interprétation géométrique	14
1.1.3	Conjugaison	14
1.2	Forme trigonométrique et exponentielle	15
1.2.1	Module d'un nombre complexe	15
1.2.2	Argument d'un complexe	16
1.2.3	Forme exponentielle d'un complexe	17
1.3	Equation dans \mathbb{C}	18
1.3.1	Racine nième d'un complexe	18
1.3.2	Equations du second degré dans \mathbb{C}	21
1.3.3	Quelques résultats sur les équations algébriques	22
1.4	Complexes et géométrie	23
1.4.1	Introduction	23
1.4.2	Transformations usuelles	23
1.4.3	Inversions complexes	24
1.5	Applications des complexes à l'électronique	25
1.5.1	Forme complexe d'un signal sinusoïdal	25
1.5.2	Impédance complexe	25
1.5.3	Fonctions de transfert	26
1.5.4	Fonctions de variables complexes	28
2	Rappels et compléments sur les limites	31
2.1	Définitions	31
2.1.1	Limite en un point	31
2.1.2	Quelques limites usuelles	34
2.1.3	Opérations sur les limites	35
2.2	Techniques de calcul	35
2.2.1	Limites de polynômes et fractions en 0 et ∞	35
2.2.2	Limite d'une fraction en un pôle	35
2.2.3	Fonctions avec radicaux	36
2.2.4	Théorèmes de comparaison	36
2.2.5	La règle de l'Hospital	38
2.3	Comparaison de fonctions au voisinage d'un point	38
2.4	Branches infinies de fonctions	40
2.4.1	Asymptotes	40
2.4.2	Branches paraboliques et directions asymptotiques	40
3	Polynômes et fractions rationnelles	43
3.1	Polynôme à une indéterminée	43
3.1.1	Structure de $\mathbb{K}[X]$	43
3.1.2	Opérations dans $\mathbb{K}[X]$	44
3.1.3	Division dans $\mathbb{K}[X]$	45
3.1.4	Factorisation et racines	46
3.2	Fractions rationnelles	47
3.2.1	Structure de $\mathbb{K}(X)$	47
3.2.2	Décomposition en éléments simples	48

3.3	Applications aux télécommunications.	52
3.3.1	Codes correcteurs d'erreurs.	52
3.3.2	Registres linéaires et cryptographie.	52
4	Etude des fonctions numériques	53
4.1	Continuité	53
4.1.1	rappels des définitions	53
4.1.2	Opérations sur les fonctions continues	54
4.1.3	Propriétés	55
4.1.4	Fonctions réciproques	55
4.1.5	Fonctions trigonométriques et réciproques	57
4.2	Dérivabilité	58
4.2.1	Rappels et compléments	58
4.2.2	Théorème de Rolle et des accroissements finis - Applications	60
4.2.3	Dérivée seconde et applications	61
4.3	Fonctions usuelles	64
4.3.1	Exponentielle et puissances	64
4.3.2	Fonctions hyperboliques	65
4.3.3	Remarques sur l'étude d'une fonction	67
5	Calcul intégral	69
5.1	Intégrale de Riemann	69
5.1.1	Rappels et compléments	69
5.1.2	Construction de l'intégrale de Riemann (en option)	69
5.1.3	Propriétés principales	71
5.1.4	Propriétés de la fonction primitive	72
5.2	Méthodes de calcul	73
5.2.1	Intégration par parties	73
5.2.2	Changement de variables	73
5.2.3	Intégration d'une fraction rationnelle	74
5.3	Applications du calcul intégral	75
5.3.1	Calculs de volumes, d'aires et de longueurs	75
5.3.2	Calculs de masse et moments d'inertie	77
5.3.3	Valeur moyenne et valeur efficace, puissance et énergie	79
5.4	Calcul approché d'intégrales	80
5.4.1	Sommes de Riemann	80
5.4.2	Méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson	80
6	Développements limités	83
6.1	Formules de Taylor	83
6.1.1	Définition	83
6.1.2	Formules de Taylor	84
6.1.3	Exemples usuels	85
6.2	Opérations sur les développements limités	85
6.2.1	Somme, produit, quotient	85
6.2.2	Intégration et dérivation	85
6.3	Applications des développements limités	86
6.3.1	Calculs de limites	86
6.3.2	Tangentes et branches infinies	86
7	Intégrales généralisées	89
7.1	Définition	89
7.2	Critères de convergence	90
7.3	Applications	92
8	Equations différentielles	93
8.1	Introduction	93
8.2	Equation d'ordre 1	93
8.2.1	Equation à variables séparables	93
8.2.2	Equation linéaire	94
8.2.3	Exemples d'applications	95
8.3	Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants	96

8.3.1	Forme des solutions	96
8.3.2	Exemples d'applications	98
II	Semestre 2	101
9	Séries numériques	103
9.1	Définition et convergence	103
9.1.1	Somme partielle d'une série numérique	103
9.1.2	Convergence d'une série	104
9.1.3	Opérations sur les séries	104
9.2	Critères de convergence	105
9.2.1	Séries à termes positifs	105
9.2.2	Séries alternées	107
9.2.3	Séries dont le terme général est de signe quelconque	107
10	Séries de Fourier	109
10.1	Série de Fourier d'une fonction périodique	109
10.1.1	Polynôme et série trigonométrique	109
10.1.2	Coefficient de Fourier d'une fonction périodique	110
10.2	Convergence des séries de Fourier	111
10.2.1	Convergence ponctuelle	111
10.2.2	Convergence en moyenne de Césaro	112
10.2.3	Convergence en moyenne quadratique	112
11	Transformation de Fourier	115
11.1	Transformée de Fourier d'une fonction	115
11.1.1	Introduction	115
11.1.2	Définitions et notations	115
11.1.3	Propriétés de la transformation	117
11.2	Transformation inverse de Fourier	119
11.2.1	Dérivation et décroissance en l'infini	119
11.2.2	L'espace \mathcal{S} de Schwartz	119
11.2.3	Formule d'inversion de Fourier	120
11.2.4	Transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable	121
11.3	Produit de convolution	121
11.3.1	Définition	121
11.3.2	Propriétés	122
11.3.3	Convolution et série de Fourier	123
11.4	Applications	123
11.4.1	Système physique et fonction de transfert	123
11.4.2	Equations différentielles et transformation de Fourier	124
12	Théorie du signal	127
12.1	Distribution	127
12.1.1	Introduction	127
12.1.2	Définition d'une distribution	128
12.1.3	Opérations sur les distributions	129
12.1.4	Transformation de Fourier d'une distribution	130
12.1.5	La formule de Poisson	131
12.2	Echantillonnage et reconstitution d'un signal	132
12.2.1	Formule de Shannon	133
13	Calcul matriciel	135
13.1	Matrice: définition et notation	135
13.2	Opérations sur les matrices	135
13.2.1	addition, multiplication par un scalaire	135
13.2.2	Multiplication et puissance	136
13.2.3	Inverse d'une matrice	136
13.2.4	Transposition	137

14 Déterminants	139
14.1 Définition	139
14.1.1 Introduction	139
14.1.2 Déterminant d'une matrice	139
14.2 Méthodes de calcul	140
14.2.1 Méthode des cofacteurs	140
14.2.2 Règle de Sarrus	141
14.2.3 Opérations sur les lignes et les colonnes	141
14.3 Applications	141
14.3.1 Calcul de l'inverse	141
14.3.2 Indépendance linéaire	141
14.3.3 Volumes	142
15 Transformation de Laplace	143
15.1 Transformée de Laplace d'une fonction	143
15.1.1 Introduction et définition	143
15.1.2 Propriétés des exponentielles complexes	144
15.1.3 Propriétés de la transformation	145
15.1.4 Produit de convolution	148
15.1.5 Les théorèmes limites	149
15.1.6 Transformation inverse	150
15.2 Applications	150
15.2.1 Résolution d'équations différentielles	150
15.2.2 Fonctions de transfert	151
15.2.3 Stabilité d'un système	153
III Semestres 3 & 4	155
16 Espaces vectoriels	157
16.1 Espace vectoriel	157
16.1.1 Définition	157
16.1.2 Base et dimension d'un espace vectoriel	159
16.1.3 Application linéaire	160
16.2 Matrice d'une application linéaire	161
16.2.1 Généralités	161
16.2.2 Sous espaces vectoriels et dimension	163
16.2.3 Changement de base	164
16.3 Application à la mécanique du solide	165
17 Systèmes linéaires - Résumé de cours	167
17.1 Aspect matriciel	167
17.2 Résolution	167
17.2.1 Système de Cramer	167
17.2.2 Remarques	168
17.2.3 Systèmes pour lesquels $\det(A) = 0$	168
18 Diagonalisation	169
18.1 Introduction	169
18.2 Valeurs et vecteurs propres	169
18.3 Diagonalisation	171
18.4 Applications	172
18.4.1 Calcul de puissance	172
18.4.2 Systèmes différentiels	172
19 Suites numériques	175
19.1 Définitions, propriétés	175
19.1.1 Rappels	175
19.1.2 Propriétés	176
19.2 Convergence et limite	176
19.2.1 Définition	176
19.3 Suites récurrentes	176

19.3.1	Suites arithmético géométriques	176
19.3.2	Suites homographiques	177
19.3.3	Récurrance générale du type $u_{n+1} = f(u_n)$	177
19.3.4	Récurrances linéaires doubles	178
20	Notions sur les séries entières et transformées en z	179
20.1	Rayon de convergence d'une série entière	179
20.1.1	Définition	179
20.2	Fonction définie par une série entière	181
20.2.1	Propriétés de la somme	181
20.2.2	Fonction développable en série entière	182
20.3	Opérations sur les séries entières	182
20.4	Transformées en z	183
20.4.1	Définition	183
20.4.2	Echantillonnage et transformée en z	184
20.4.3	Propriétés usuelles	186
20.4.4	Transformée en z inverse	188
20.4.5	Applications	189
21	Dénombrement	191
21.1	Opérations sur les ensembles	191
21.1.1	réunion, intersection, produit cartésien	191
21.1.2	Cardinal d'un ensemble	192
21.2	Listes, arrangements, combinaisons	193
21.2.1	Définition	193
21.2.2	Propriétés	194
21.2.3	Exemples d'applications	197
22	Probabilité sur un ensemble fini	201
22.1	Expérience aléatoire	201
22.1.1	Introduction	201
22.1.2	Quelques exemples d'expériences aléatoires.	201
22.1.3	Lien avec la théorie des ensembles	202
22.2	Probabilité sur un ensemble	203
22.2.1	Mesure de probabilité	203
22.2.2	Probabilité conditionnelle	204
22.2.3	Indépendance stochastique	206
23	Variables aléatoires discrètes	209
23.1	Loi d'une variable discrète	209
23.1.1	Introduction et définition	209
23.1.2	Caractéristique d'une loi	211
23.2	Loi binomiale et loi de Poisson	214
23.2.1	Loi binomiale	214
23.2.2	La loi de Poisson	215
23.2.3	Approximation entre lois discrètes	216
23.3	Lois conjointes	217
23.3.1	Vecteur aléatoire, loi conjointe et loi marginale	217
23.3.2	Covariance	218
24	Variables aléatoires continues	219
24.1	Densité d'une loi continue	219
24.1.1	Introduction	219
24.1.2	Définition	219
24.1.3	Sommes de deux variables continues	221
24.2	Caractéristiques d'une loi continue	221
24.2.1	Espérance et variance	221
24.2.2	Fonction de répartition	222
24.3	Loi normale et applications	223
24.3.1	Densité d'une loi normale	223
24.3.2	Caractéristique d'une loi normale	224
24.3.3	Opérations sur les variables gaussiennes	226

24.4	Théorèmes limites	226
24.4.1	Deux inégalités importantes	226
24.4.2	Loi faible des grands nombres	227
24.4.3	Théorème de la limite centrale	227
25	Calcul différentiel	229
25.1	Fonctions de plusieurs variables	229
25.1.1	Introduction et exemples	229
25.1.2	Définition	230
25.1.3	Représentation graphique	230
25.1.4	Limite et continuité	231
25.1.5	Dérivée partielle d'une fonction vectorielle	233
25.1.6	Différentielle et matrice jacobienne d'une fonction vectorielle	236
25.1.7	Changement de variables et composition de fonctions vectorielles	237
25.2	Opérateurs et équations aux dérivées partielles	238
25.2.1	Opérateurs	238
26	Intégrales multiples	243
26.1	Intégrales doubles	243
26.1.1	Définitions	243
26.1.2	Méthodes de calcul	244
26.1.3	Changement de variables	245
26.2	Intégrales triples	246
26.2.1	Définition	246
26.2.2	Changement de variables	246
IV	Annexes	249
27	Structures algébriques	251
27.1	Elements de logique	251
27.2	Théorie des ensembles	251
27.2.1	Appartenance, inclusion	251
28	Théorie de l'information	253
28.1	Canal de communication	253
28.2	Entropie et information	253
29	Introduction aux codes linéaires	255
30	Introduction aux codes cycliques	257
31	Introduction aux codes convolutifs	259
32	Introduction à la cryptographie	261

Avant propos

Ce cours de Mathématiques se décompose en quatre semestres de six mois chacun. Il couvre le programme des deux premières années de Licence. Les cours du quatrième semestre sont optionnels et sont destinés aux étudiants envisageant des poursuites d'études longues.

Le cours a deux ambitions: D'une part donner aux étudiants les outils mathématiques nécessaires pour suivre les cours de télécommunications, de physique et d'électronique et d'autre part donner à ceux qui le souhaitent un niveau suffisant pour envisager des poursuites d'études en école d'ingénieur ou pour préparer des concours d'entrées dans différentes écoles.

Le polycopié présente les résumés du cours qui sera dispensé tout au long des deux années. Il ne le remplace pas: beaucoup d'exemples donnés en cours n'apparaissent pas dans ce document et à l'inverse beaucoup de démonstrations ou de paragraphes supplémentaires qui s'y trouvent ne seront pas traités en cours. Il est donc nécessaire de prendre le cours, ne serait-ce que parce que la prise de notes vous permet d'apprendre et de comprendre la leçon. On l'aura compris, polycopié et cours sont complémentaires. On trouvera aussi, dans les annexes, des leçons qui traitent de sujets connexes (cryptographie, codes correcteurs, files d'attente, théorie des graphes) ou encore des leçons qui introduisent des notions de troisième année de Licence ou de première année de Master (espaces de Hilbert, structures algébriques, ...).

Les parties non traitées ou les démonstrations ne sont pas exigibles en examen, mais elles pourront intéresser ceux d'entre vous qui veulent aller plus loin. Le niveau requis est celui de terminale STI. Toutes les notions sont reprises à la base avec de nombreux rappels.

Il est indispensable de connaître son cours avant d'aborder les TD. Pour le travailler, vous pourrez par exemple le relire et vérifier que vous connaissez (par cœur) les théorèmes, puis refaire les exemples. C'est seulement après cette phase que les séances de TD vous seront utiles. Il est également important de préparer les exercices d'un TD sur l'autre, l'idéal étant de retravailler la séance le soir même. En tout état de cause, une séance non préparée ne sert à rien et un travail régulier est la façon la plus efficace de progresser.

Le site web du cours de maths contient par ailleurs de nombreux exercices supplémentaires avec des indications de solutions. Reportez-vous également à la bibliographie qui contient des adresses de sites intéressants. Enfin, un CD est à votre disposition. Il contient des cours et des exercices de tous niveaux (révisions de première ou de terminale, cours de premier cycle, ...) pour vous permettre de travailler sur plusieurs supports. N'oubliez pas non plus la bibliothèque de l'IUT qui contient un nombre important de livres de cours et d'exercices corrigés.

Le cours de mathématique en R&T est également découpé en modules dont voici la liste. Un module représente environ 30 heures de cours sur un thème du programme:

Première année:

- M1. Fondamentaux d'algèbre: chapitres 0,1,3
- M2. Fondamentaux d'analyse: chapitres 2,4,6
- M3. Calcul intégral et différentiel: chapitres 5,7,8
- M4. Mathématiques appliquées aux réseaux et télécoms: chapitres 13,14,15
- M5. Analyse de Fourier: chapitres 9,10,11,12

Seconde année:

- M6. Théorie du signal discret: chapitres 19,20
- MC1. Algèbre linéaire: chapitres 16,17,18
- MC2. Probabilités: chapitres 21,22,23,24
- MC3. Statistiques: 27,28,29
- MC4. Mathématiques pour l'ingénieur: chapitres 25,26, Annexes.

MC5. Mathématiques pour les réseaux: Annexes - cryptographie, codes, files, langages, graphes.

Plusieurs ouvrages ont servi de base à la rédaction de ce cours:

- Le cours de mathématiques de M. Gourion pour Terminale C et E.
- Les quatre tomes du cours de Mathématiques de J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudies.
- La revue Tangente dont sont issues beaucoup d'anecdotes et de rappels historiques.
- La plupart des plaisanteries (pas toujours drôles) circulent sur de nombreux sites web.
- L'ouvrage « Calculus Concepts and Contexts » de James Stewart.
- L'ouvrage « Thomas'Calculus » de George Thomas.

Enfin, de nombreux exercices de travaux dirigés proviennent des annales de l'Université de Rennes 1 et de l'IRMAR.

Je remercie tous mes étudiants pour les (nombreuses) corrections qu'ils ont apportées à ce document et en particulier Guillaume Grayo et Raphaël Gicquiaux (promotion 2008) qui ont traqué avec beaucoup de ténacité toutes les fautes de frappe, d'orthographe et de calcul.

Partie I

Semestre 1

Chapitre 1

Les nombres complexes

Introduction

Historiquement, les nombres complexes sont liés au problème de la résolution des équations algébriques et leur étude provoquera le développement de la théorie des groupes et des corps.

Ces nombres ont été inventés au XVI^{ème} siècle par les mathématiciens italiens afin de résoudre des équations sans solutions réelles. D'abord nombres impossibles, puis nombres imaginaires (Descartes en 1637), ils seront enfin appelés nombres complexes par Gauss en 1831.

Le symbole $\sqrt{-1}$ est utilisé en 1572 par Bombelli (1526-1573) qui est le premier à étudier les règles de calcul sur les complexes; il montre, grâce aux formules de Cardan (1501-1576), que $x = 4$ peut aussi s'écrire $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ comme solution de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$. Cardan et son élève Ferrari (1522-1565) s'en servent également pour résoudre des équations.

Ce symbole sera utilisé tout au long des XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècle par Leibniz, Euler (à qui l'on doit le symbole i en 1777) ou De Moivre (1667-1754). C'est Gauss (1777-1855) qui posera les bases rigoureuses du calcul dans l'ensemble des complexes et William Hamilton (1805-1866) qui étendra cette construction à celle des quaternions.

La recherche des solutions d'équations amène Albert de Girard en 1629 à conjecturer le théorème fondamental de l'algèbre (toute équation de degré n a exactement n racines dans \mathbb{C}). D'Alembert en donne démonstration incomplète (le théorème porte d'ailleurs son nom), mais c'est Gauss qui en donnera la première preuve rigoureuse.

De nos jours les complexes interviennent dans tous les domaines des mathématiques et de la physique. En électronique et télécommunications, notamment, il s'agit d'un outil essentiel.

1.1 Structure de \mathbb{C}

1.1.1 Forme algébrique d'un complexe

DÉFINITION 1

\mathbb{C} est l'ensemble des nombres de la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$ vérifiant $i^2 = -1$
 a est la partie réelle de z et se note $\Re(z)$
 b est la partie imaginaire de z et se note $\Im(z)$
 $a + ib$ s'appelle la forme algébrique de z .

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif contenant \mathbb{R} (reportez-vous aux annexes présentant les structures algébriques pour toutes les notions de groupes ou de corps. Elles ne sont pas au programme).

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles. On appelle alors i l'une de ces solutions et l'on construit \mathbb{C} sur le modèle de \mathbb{R} en y adjoignant l'élément i . Ainsi, toutes les propriétés algébriques de \mathbb{R} sont valables dans \mathbb{C} : stabilité par $+$ et \times , existence d'un opposé et d'un inverse (pour tout complexe non nul), associativité et commutativité des opérations, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Seule la relation d'ordre n'est plus valable: on ne peut pas comparer deux complexes et il n'existe pas de relation d'ordre total dans \mathbb{C} ; dire qu'un complexe est plus grand qu'un autre n'a pas de sens.

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

On définit également les opérations usuelles de la façon suivante:

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \text{ si } z \neq 0$$

Enfin, $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ qui est défini si $z' \neq 0$

Pour résumer, les calculs dans \mathbb{C} se font exactement comme les calculs dans \mathbb{R} , en remplaçant i^2 par -1 .

Ex: Soient $z = 1 + 2i$ et $z' = 1 - i$

$$z + z' = 2 + i, \quad z z' = (1 + 2i)(1 - i) = 1 - i + 2i + 2 = 3 + i \text{ et } \frac{z}{z'} = \frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{(1 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

Un complexe dont la partie imaginaire est nulle est un réel. Ainsi, on peut assimiler \mathbb{R} à l'ensemble des complexes de partie imaginaire nulle. L'application qui à un réel a associe le complexe $z = a + 0 \times i$ est une bijection qui permet de considérer \mathbb{R} comme un sous-ensemble de \mathbb{C} . L'ensemble des complexes dont la partie réelle est nulle se note $i\mathbb{R}$ et s'appelle ensemble des imaginaires purs.

1.1.2 Interprétation géométrique

Soit \mathcal{P} l'ensemble des point du plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . A tout complexe $z = a + ib$ associons le point $M(a, b)$ du plan. L'application ϕ définie ci dessous est alors bijective:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{P} &\rightarrow \mathbb{C} \\ M &\mapsto \phi(M) = z \end{aligned}$$

On dit que M est **l'image** de z ou que z est **l'afixe** du point M .

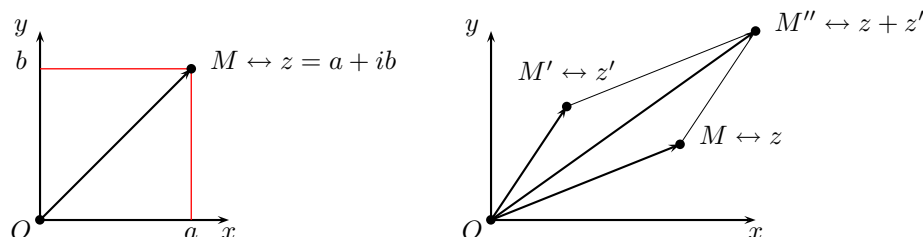


Figure 1.1: Forme algébrique d'un complexe.

De même, si l'on note \mathcal{V} l'ensemble des vecteurs du plan, à tout vecteur on peut associer un nombre complexe: le vecteur $\overrightarrow{OM}(a, b)$ est l'image de z et z est l'afixe de ce vecteur;

on notera $z \leftrightarrow \overrightarrow{OM}$

Ainsi, si $z \leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $z' \leftrightarrow \overrightarrow{OM'}$ alors $z + z' \leftrightarrow \overrightarrow{OM''}$ avec $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ de sorte que l'application qui à un vecteur associe le complexe correspondant est une application bijective qui respecte l'addition et la multiplication par un réel.

(Ox) s'appelle l'axe réel et (Oy) l'axe imaginaire pur.

1.1.3 Conjugaison

DÉFINITION 2

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe
On appelle conjugué de z le complexe $\bar{z} = a - ib$

Ainsi, si z a pour affixe $M(a, b)$ alors \bar{z} aura pour affixe $M'(a, -b)$: M' est l'image de M par la symétrie d'axe (Ox) . Les propriétés suivantes sont immédiates:

PROPRIÉTÉ 1

$$\left\| \begin{array}{lll} \bullet \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' & \bullet z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} & \bullet \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lambda z} = \lambda \bar{z} \\ \bullet \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' & \bullet z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} & \bullet \bar{\bar{z}} = z \end{array} \right.$$

Pour résumer tout cela, on dit (on ne le démontrera pas) que la conjugaison est le seul automorphisme de corps involutif de \mathbb{C} .

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})} \quad \boxed{\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})}$$

Ex: le conjugué de $z = 1 + i$ est $\bar{z} = 1 - i$

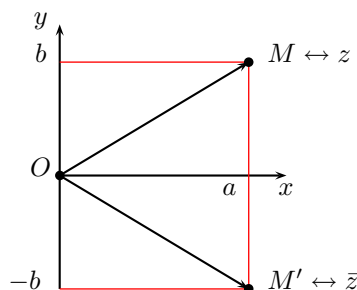


Figure 1.2: Conjugué d'un complexe

1.2 Forme trigonométrique et exponentielle

1.2.1 Module d'un nombre complexe.

Soit $z = a + ib$

Alors: $\bar{z} = a - ib \Rightarrow z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$

DÉFINITION 3

On appelle module d'un nombre complexe le réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$

Si z est non nul, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ et si $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

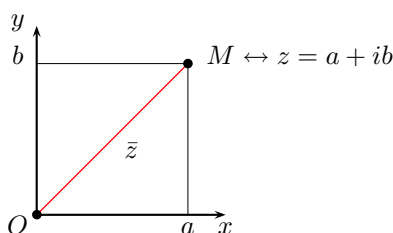


Figure 1.3: Module d'un complexe z .

PROPRIÉTÉ 2

$$\left\| \begin{array}{lll} \bullet |z| = |\bar{z}| & \bullet \operatorname{Re}(z) \leq |z| & \bullet |zz'| = |z| \times |z'| \\ \bullet \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} & \bullet \operatorname{Im}(z) \leq |z| & \bullet ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \end{array} \right.$$

La seconde égalité n'est vraie que si $z \neq 0$ et la dernière double inégalité s'appelle l'inégalité triangulaire (nous la noterons souvent Δ).

DÉMO

Les propriétés ci dessus découlent de façon évidente du fait que $|z| = OM$.

L'inégalité triangulaire est néanmoins intéressante à redémontrer:

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + \bar{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = (|z| + |z'|)^2 \\ \Rightarrow |z + z'| &\leq |z| + |z'| \quad \square \end{aligned}$$

Soient $M \leftrightarrow z$ et $M' \leftrightarrow z'$. Alors $\boxed{MM' = |z - z'|}$

Ex: $|i| = 1$, $|3 + i| = \sqrt{10}$, $|\frac{1}{2-i}| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Ex: Soient $u = 4$, $v = 2 + 3i$ et $w = -4 - i$. Soient $A \leftrightarrow u$, $B \leftrightarrow v$ et $C \leftrightarrow w$
 $AB = |u - v| = \sqrt{13}$, $AC = |u - w| = \sqrt{65}$ et $BC = |w - v| = \sqrt{52}$.

En appliquant le théorème de Pythagore, on voit alors que le triangle ABC est rectangle.

1.2.2 Argument d'un complexe

L'ensemble \mathbb{U} des complexes de module 1

DÉFINITION 4

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} = \{a + ib \in \mathbb{C} / a^2 + b^2 = 1\}$

L'image de \mathbb{U} dans le plan complexe est donc le cercle trigonométrique.

En effet, si $M(a, b)$ est l'image de $z = a + ib$, $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow OM = 1$

Si z et z' sont dans \mathbb{U} , alors $z \times z'$ et $\frac{z}{z'}$ le sont aussi. On dit que \mathbb{U} forme un groupe pour la multiplication.

Nous savons que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $(\cos \theta, \sin \theta)$ où θ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs (\vec{OI}, \vec{OM})

$\forall z \in \mathbb{U}$, on peut donc poser $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$, de telle sorte que $z = \cos \theta + i \sin \theta$

Une mesure d'angle de vecteurs est définie à 2π près mais nous prendrons systématiquement la mesure principale des angles.

DÉFINITION 5

Tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $z = \cos \theta + i \sin \theta$
 où θ est la mesure principale de (\vec{i}, \vec{OM}) et s'appelle argument de z .
 On note $\theta = \arg(z)$

Seul le complexe 0 ne possède pas d'argument. Il est caractérisé par son module nul.

Forme trigonométrique d'un complexe

Soit z un complexe quelconque de module $|z| = r$.

Si z est non nul, alors le complexe $u = \frac{z}{|z|}$ appartient à \mathbb{U}

On peut donc écrire $u = \cos \theta + i \sin \theta$ pour $\theta \in]-\pi, \pi]$

DÉFINITION 6

Tout nombre complexe z s'écrit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
 Où r est le module de z et θ son argument.
 On dit alors que z est sous forme trigonométrique et on note $z = [r, \theta]$

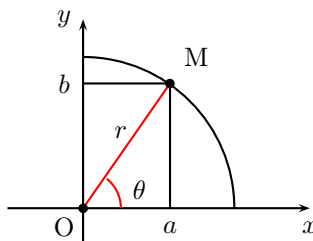


Figure 1.4: Argument de z .

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et vice versa:

Si $z = a + ib$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ vérifie $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

Réciproquement, si $z = [r, \theta]$, alors $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$

Propriétés

PROPRIÉTÉ 3

$$\left\| [r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right.$$

En clair, deux complexes coïncident s'ils ont même module et si les arguments coïncident modulo 2π .

PROPRIÉTÉ 4

$$\left\| \begin{array}{ll} \bullet \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') & \bullet [r, \theta] \times [r', \theta'] = [r \times r', \theta + \theta'] \\ \bullet \arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') & \bullet \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = [r/r', \theta - \theta'] \\ \bullet \arg(z^n) = n \times \arg(z) & \bullet [r, \theta]^n = [r^n, n \times \theta] \\ \bullet \arg(\bar{z}) = -\arg(z) & \bullet \overline{[r, \theta]} = [r, -\theta] \end{array} \right. \bullet [r, \theta] = r \times [1, \theta]$$

Dans les formules ci-dessus, on suppose n entier et $z' \neq 0$ lorsqu'il est au dénominateur d'un quotient.

Ex: Déterminer la forme trigo de $z = 1 + i$.

$$|z| = \sqrt{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Ex: Idem avec $z = i$.

$$|i| = 1 \text{ et } \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

Ex: Soient $z = 1 - i$ et $z' = \sqrt{3} + i$; déterminer les modules et argument de zz' , z/z' et z^{10} :

$$z = [\sqrt{2}, -\pi/4] \text{ et } z' = [2, \pi/6]. \text{ Ainsi, } zz' = [2\sqrt{2}, -\pi/4 + \pi/6] = [2\sqrt{2}, -\pi/12], z/z' = [\sqrt{2}/2, -5\pi/12] \\ z^{10} = [32, -10\pi/4] = -32i$$

Ex: Calculer le module et l'argument de $j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $|j| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$; Soit $\theta = \arg(j)$. On a $\cos \theta = 1/2$ et $\sin \theta = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \theta = \pi/3$ et $j = [1, \pi/3]$

Conversion forme algébrique \leftrightarrow forme trigonométrique

Soit $z = a + ib = re^{i\theta}$ un complexe. On a $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

Le passage de la forme algébrique vers la forme trigo se fait à l'aide de la définition du module et de l'argument:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \theta = \frac{a}{r} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{r}}$$


Si l'on souhaite calculer directement θ sans passer par les sinus et cosinus, on a la formule suivante:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{si } a > 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{si } a < 0, b > 0 \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{si } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Il faut faire très attention à cette dernière formule: on n'a pas toujours $\theta = \arctan(b/a)$.

Le passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique est plus simple:

$$\boxed{a = r \cos \theta \text{ et } b = r \sin \theta}$$

 A retenir: $1 = [1; 0]$, $-1 = [1; \pi]$, $i = [1; \pi/2]$ et $1 + i = [\sqrt{2}; \pi/4]$

1.2.3 Forme exponentielle d'un complexe

On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta$.

On pose alors $e = e^1$ et l'on admet que $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

DÉFINITION 7

$$\left\| z = re^{i\theta} \text{ est la forme exponentielle du complexe } z = [r, \theta] \right.$$

PROPRIÉTÉ 5

$$\left\| \begin{array}{l} z = re^{i\theta} \text{ et } z' = r'e^{i\theta'} \Rightarrow \bullet zz' = (rr')e^{i(\theta+\theta')} \bullet \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \text{ si } z' \neq 0 \bullet \bar{z} = re^{-i\theta} \end{array} \right.$$

Ex: L'inverse de $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ est $\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}$

Ex: Si $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $z' = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$ alors $zz' = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$ et $z/z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5i\pi/12}$

PROPRIÉTÉ 6 (FORMULES DE MOIVRE ET D'EULER)

$$\left\| \begin{array}{l} (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \\ \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right.$$

DÉMO

Pour la formule de Moivre, il suffit d'écrire:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Les deux formules d'Euler s'obtiennent en ajoutant et en soustrayant les deux équations:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ et } e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

□

Exemples d'utilisation:

$$\bullet \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$$

En séparant partie réelle et imaginaire et en identifiant, on obtient immédiatement

$$\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

La plupart des formules trigonométriques se re-démontrent facilement en utilisant ainsi les complexes. Par exemple,

$$\bullet \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \Rightarrow \forall \theta \in \mathbb{R}, \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\bullet e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} \iff \cos(a+b) + i \sin(a+b) = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)$$

En développant et en identifiant parties réelles et parties imaginaires, on retrouve les formules d'addition

• Linéarisation d'expressions.

On cherche à exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de sinus et de cosinus une expression initiale contenant des produits et des puissances. Il suffit d'utiliser les formules d'Euler puis de développer l'expression:

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta \times \sin^2 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \times \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{32} (e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) \times (e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) \\ &= -\frac{1}{32} ((e^{5i\theta} + e^{-5i\theta}) + (e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) - 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) = -\frac{1}{16} (\cos 5\theta + \cos 3\theta - 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

1.3 Equation dans \mathbb{C}

1.3.1 Racine nième d'un complexe

Définition

DÉFINITION 8

Soit $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in \mathbb{C}$ est une racine nième de z si $u^n = z$

La forme adéquat pour calculer les racines nièmes d'un complexe est la forme exponentielle:

Soit $z = re^{i\theta}$. On cherche $u = \rho e^{i\alpha}$ tel que $u^n = z$

$$u^n = z \iff \rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

THÉORÈME 1

|| Soit $z = re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe n racines nièmes de z :
ce sont les complexes $u_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$u_k = [\sqrt[n]{r}; \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}] \quad k = 0, \dots, n-1$$

Ex: Racines carrées de -1

$-1 = e^{i\pi}$ et il existe deux racines carrées de -1 données par $u_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $u_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

Ex: Racines carrées de i

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ possède 2 racines carrées: $u_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $u_1 = e^{i\frac{\pi}{4} + i\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ex: Racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow u_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}, u_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Ex: Racines 5ièmes de -32

$-32 = 32e^{i\pi} \Rightarrow u_k = 2e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5})}, k = 0, \dots, 4$

Ex: Racines quatrièmes de $z = 2\sqrt{2}(1 + i)$

$z = [4, \pi/4] \Rightarrow u_k = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}], k = 0, 1, 2, 3$

On trouve:

$u_0 = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{16}], u_1 = [\sqrt{2}, \frac{9\pi}{16}], u_2 = [\sqrt{2}, -\frac{15\pi}{16}], u_3 = [\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{16}]$

Interprétation géométrique

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ et u_0, u_1, \dots, u_{n-1} ses n racines nièmes.

$\forall k = 0, \dots, n-1$, on a $|u_k| = r^{\frac{1}{n}}$ qui est une constante indépendante de k .

Les n images de ces complexes se trouvent donc sur un cercle de centre O et rayon $r^{\frac{1}{n}}$.

$\frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \Rightarrow \arg(\frac{u_{k+1}}{u_k}) = \frac{2\pi}{n}$ qui ne dépend pas de k :

Les u_k sont régulièrement espacés sur le cercle.

PROPRIÉTÉ 7

|| Les n racines nièmes d'un complexe forment un polygone régulier à n côtés centré en O

Ex: Dans l'exemple ci-dessus, les racines 5ièmes de -32 sont les sommets d'un pentagone régulier.

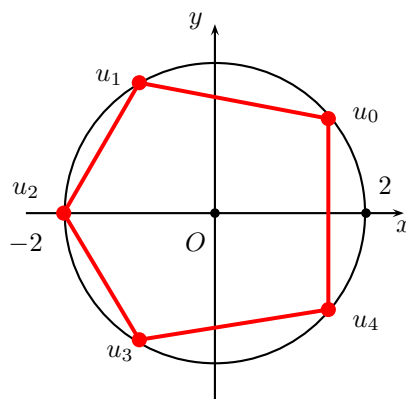


Figure 1.5: Racines cinquièmes de -32 .

Racines nièmes de l'unité

Comme tous les complexes, le réel 1 admet n racines nièmes que l'on appelle les racines nièmes de l'unité et qui forment un ensemble noté \mathbb{U}_n aux propriétés intéressantes.

D'après le paragraphe précédent, les racines nièmes de 1 sont les $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, \dots, n-1$.

On peut vérifier que ces nombres sont bien des solutions de l'équation $u^n = 1$ et qu'ils sont tous sur le cercle trigonométrique. En outre, $\forall k = 0, \dots, n-1$:

$u_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega^k$ avec $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ qui est appelée racine primitive de l'unité dans \mathbb{C} .

THÉORÈME 2

|| Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\omega = e^{2\pi i/n}$. Les racines nièmes de l'unité sont les nombres $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$

Ex: Racines 5ièmes de l'unité.

Ce sont les complexes $1, \omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}, \omega^2 = e^{\frac{4\pi i}{5}}, \omega^3 = e^{\frac{6\pi i}{5}}, \omega^4 = e^{\frac{8\pi i}{5}}$.

Ex: Racines cubiques de l'unité.

Ce sont les complexes $1, j = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

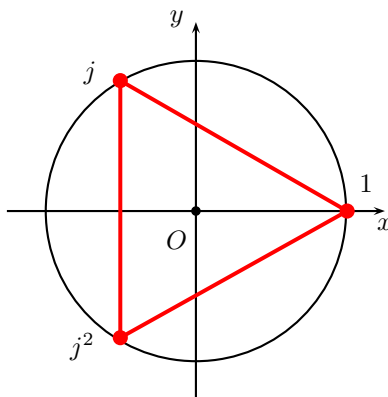


Figure 1.6: Racines cubiques de l'unité.

PROPRIÉTÉ 8

|| La somme des racines nièmes de l'unité est nulle si $n > 1$

DÉMO

$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$ si $\omega \neq 1$. Puisque ω est une racine nième, alors $\omega^n = 1$ et la somme est nulle.

□

Ex: $1 + j + j^2 = 0$. De plus, $j^3 = 1$ et $\bar{j} = j^2$

PROPRIÉTÉ 9

|| Soit $z \in \mathbb{C}$ et u une racine nième de z .

|| Les racines nièmes de z sont les complexes $u, u\omega, u\omega^2, \dots, u\omega^{n-1}$

|| Pour obtenir les n racines nièmes d'un complexe, il suffit d'en multiplier une par les n racines nièmes de l'unité.

DÉMO

$(u\omega)^n = u^n \omega^n = u^n = z$ et $\forall k, (u\omega^k)^n = z$

Comme z possède n racines, il ne peut s'agir que des n nombres ci dessus.

□

Ex: Racines 5ièmes de -32

L'une d'elles est -2; les autres sont $-2\omega = -2e^{\frac{2\pi i}{5}} = u_3, -2\omega^2 = -2e^{\frac{4\pi i}{5}} = u_4$ et $-2\omega^3 = -2e^{\frac{6\pi i}{5}} = u_0$

PROPRIÉTÉ 10

|| La somme des racines nièmes d'un complexe est nulle si $n > 1$

DÉMO

$u + u\omega + u\omega^2 + \dots + u\omega^{n-1} = u \times \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$ si $\omega \neq 1$. Puisque $\omega^n = 1$, la somme est nulle.

□

Structure de groupe de \mathbb{U}_n

THÉORÈME 3

Soient u et u' deux racines nièmes de l'unité.
 Alors $uu' \in \mathbb{U}_n$ et $\frac{1}{u} \in \mathbb{U}_n$
 On dit que \mathbb{U}_n est un groupe commutatif pour la multiplication

C'est un sous groupe des nombres complexes de module 1 (pour les notions de groupe ou de corps dont il est question de façon marginale dans cette leçon - et qui sont hors programme - se reporter, si cela vous intéresse, aux annexes).

Ex: Table de multiplication de \mathbb{U}_5

\times	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4
1	1	ω	ω^2	ω^3	ω^4
ω	ω	ω^2	ω^3	ω^4	1
ω^2	ω^2	ω^3	ω^4	1	ω
ω^3	ω^3	ω^4	1	ω	ω^2
ω^4	ω^4	1	ω	ω^2	ω^3

1.3.2 Equations du second degré dans \mathbb{C}

Equations à coefficients réels

On cherche $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ sinon l'équation est de degré 1.
 Nous commençons par rappeler la résolution dans \mathbb{R} .

THÉORÈME 4

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a 2 solutions réelles $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle double $-\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées: $\frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

DÉMO

Si $\Delta \geq 0$:

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

La forme précédente s'appelle forme canonique du trinôme.

Si $\Delta < 0$: $az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 < 0$ ce qui est impossible dans \mathbb{R} .

Par contre, $(i\sqrt{-\Delta})^2 = -\Delta$ et $az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$

D'où les deux solutions z_1 et z_2 qui valent $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

On a $z_1 = \bar{z}_2$

□

Ex: Résoudre $1 + z + z^2 = 0$

$\Delta = -3 \Rightarrow$ l'équation a 2 racines complexes conjuguées $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

A coefficients complexes

On cherche $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ et ses racines carrées sont δ_1 et δ_2 .

Les deux solutions de l'équation sont alors $\boxed{\frac{-b - \delta_1}{2a}}$ et $\boxed{\frac{-b - \delta_2}{2a}}$

(On peut remplacer δ_1 par δ_2 dans la formule.)

Ex: Résoudre $z^2 + (2 - i)z - 2i = 0$

$\Delta = 4i + 3$. Nous cherchons $\delta = \alpha + i\beta$ tel que $\delta^2 = 4i + 3$

$$\delta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta = 4i + 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ \beta = 2/\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha^4 - 3\alpha^2 - 4 = 0.$$

Il s'agit d'une équation bicarrée dont les solutions sont -2 et 2.

Si $\alpha = 2 \Rightarrow \beta = 1$ et si $\alpha = -2 \Rightarrow \beta = -1$. Les racines carrées du discriminant sont donc $2+i$ et $-2-i$.

Les solutions de l'équation sont donc $S = \{-2, i\}$

Pour éviter d'avoir à résoudre l'équation bi-carrée, on peut également construire une troisième équation à partir de $\delta^2 = \Delta$. En effet, on a alors $|\delta|^2 = |\Delta| \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{16+9} = 5$. On obtient alors

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 & (1) \\ \beta = 2/\alpha & (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

En ajoutant (1) et (2) on obtient $\alpha^2 = 4$ donc $\alpha = \pm 2$, puis en les soustrayant $\beta^2 = 1$ donc $\beta = \pm 1$ et l'équation (2) donne le signe de α et β .

Ex: Résoudre $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0$

$$\Delta = 4(1+i)^2 - 16i = -8i = 8e^{-i\pi/2}.$$

En ce cas, comme le discriminant se met très simplement sous forme exponentielle, il est facile d'en déterminer une racine carrée: $\delta = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 2(1-i)$

Alors les solutions de l'équation sont $S = \{-2, -2i\}$

1.3.3 Quelques résultats sur les équations algébriques

Nous reviendrons sur les notions de ce paragraphe lors de la leçon sur les polynômes.

Une équation algébrique est de la forme $P(z) = 0$ où P est un polynôme de degré n à coefs dans \mathbb{C} , ie

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

DÉFINITION 9

|| Un zéro du polynôme P est une racine de l'équation $P(z) = 0$
|| C'est donc un complexe α tel que $P(\alpha) = 0$

THÉORÈME 5 (DE D'ALEMBERT)

|| Dans \mathbb{C} , toute équation algébrique de degré n possède n solutions.

DÉMO

Ce théorème est admis.

□

Nous rappelons aussi les résultats suivants:

Si α est racine de P , alors $P(z)$ se factorise par $z - \alpha$, ie $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n - 1$. Si n est impair et P est à coefs réels, alors le polynôme admet au moins une racine réelle. Un polynôme de degré 2 est une parabole dans le plan. Il peut n'avoir aucune racine réelle (la parabole est au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses) ou bien deux si elle coupe l'axe des abscisses. Un polynôme de degré trois tend vers $\pm\infty$ en $\mp\infty$. Etant continu, il coupe nécessairement l'axe des abscisses en au moins un point (éventuellement trois). Nous reprendrons toutes ces notions là plus en détail dans la leçon sur les polynômes.

D'après le théorème de D'Alembert, tout polynôme peut s'écrire dans \mathbb{C} sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré:

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

les complexes z_1, \dots, z_n sont alors les zéros du polynôme (ils peuvent ne pas être distincts).

Ex: $P(z) = 2z^4 + (2 + 2i)z^3 + (-2 + 2i)z^2 - 2(1 + i)z - 2i$

Les racines de $P(z)$ (dans \mathbb{C}) sont 1, $-i$ et -1 et $P(z) = 2(z + i)(z - 1)(z + 1)(z + 1)$

1.4 Complexes et géométrie

1.4.1 Introduction

Il s'agit dans ce paragraphe d'étudier la représentation complexe de quelques transformations du plan.

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j})

A tout complexe $z = a + ib$ on associe le point $M(a, b)$ par l'application $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C} / \phi(M) = z$

Une transformation du plan est une bijection f de \mathcal{P} dans \mathcal{P} et l'on peut donc considérer le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \end{array}$$

L'application bijective $F = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est la représentation complexe de la transformation f .

1.4.2 Transformations usuelles

Translation

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur \vec{u} et soit u l'afixe de \vec{u} . $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + u$

Une translation du plan correspond donc à une addition dans \mathbb{C} .

Rotation

Soit $r(O, \theta)$ la rotation d'angle θ et centre O . $M' = r(M) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z$

Une rotation de centre O correspond donc dans \mathbb{C} à la multiplication par un complexe de module 1.

Si la rotation a pour centre $\Omega \leftrightarrow \omega$, alors $M' = r(M) \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

On a $M' = r(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M'}$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$

Homothétie

Soit h l'homothétie de centre O et rapport k . $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k \times \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow z' = kz$

Une homothétie de centre O correspond donc dans \mathbb{C} à la multiplication par un réel.

Soit $h(\Omega, k)$ l'homothétie de centre Ω et rapport k .

$$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$$

ω étant l'afixe de Ω .

Similitudes

Soit f une similitude directe de centre $\Omega \leftrightarrow \omega$, d'angle θ et de rapport $k > 0$. On rappelle qu'il s'agit de la composée d'une rotation de centre Ω et d'angle θ avec une homothétie de centre Ω et rapport k (une similitude peut également être une translation).

Si $M \leftrightarrow z$ et $M' \leftrightarrow z'$ alors $M' = f(M) \Leftrightarrow z' = az + b$

Avec $a = ke^{i\theta}$ et Ω a pour affixe $\frac{b}{1-a}$

Une similitude indirecte est la composée d'une réflexion avec une homothétie et se représente dans \mathbb{C} par la fonction $f(z) = a\bar{z} + b$

1.4.3 Inversions complexes

DÉFINITION 10

Une inversion \mathcal{I} de pôle O et puissance $k \neq 0$ est définie par $M' = \mathcal{I}(M) \Leftrightarrow z' = \frac{k}{\bar{z}}$

Dans la suite, nous supposons que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

Nous cherchons à définir \mathcal{I} géométriquement:

$$\begin{aligned} \text{Si } \boxed{k > 0}: M' = \mathcal{I}(M) &\Leftrightarrow \begin{cases} OM \times OM' = k \\ O, M, M' \text{ alignés} \\ O \notin [MM'] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \frac{k}{r} \\ \theta' = \theta \end{cases} \Leftrightarrow z' = \frac{k}{\bar{z}} \\ \text{Si } \boxed{k < 0}: M' = \mathcal{I}(M) &\Leftrightarrow \begin{cases} OM \times OM' = -k \\ O, M, M' \text{ alignés} \\ O \in [MM'] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = -\frac{k}{r} \\ \theta' = \theta + \pi \end{cases} \Leftrightarrow z' = -\frac{k}{r}e^{i\theta+\pi} = \frac{k}{\bar{z}} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on retrouve bien la formule souhaitée.

En électronique, nous aurons souvent à chercher l'image d'une droite par une telle transformation. Nous donnons ici une démonstration géométrique qui sera complétée en TD par une démonstration analytique.

PROPRIÉTÉ 11

L'image d'une droite Δ par une inversion ne passant pas par O est le cercle de diamètre $[OH']$ privé de O , H' étant l'image par \mathcal{I} du projeté orthogonal H de O sur Δ

DÉMO

Soit Δ une droite ne passant pas par O et H le projeté orthogonal de O sur cette droite.

$H' = \mathcal{I}(H) \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OH'} = k$. Ainsi, puisque H, H', O sont alignés, on a $OH \times OH' = \pm k$
Pour la suite de la démo, on supposera $k > 0$ (la démonstration est la même dans le cas contraire).

Soit $M \in \Delta$.

$$OM \times OM' = k = OH \times OH' \Rightarrow \frac{OH'}{OM} = \frac{OM'}{OH} \Rightarrow OHM \text{ et } OM'H' \text{ sont semblables.}$$

$$\Rightarrow \widehat{OHM} = \widehat{OM'H'} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M' \text{ appartient au cercle de diamètre } [OH']$$

Comme O n'est l'image d'aucun point, l'image de Δ est le cercle de diamètre $[OH']$ privé de O .

□

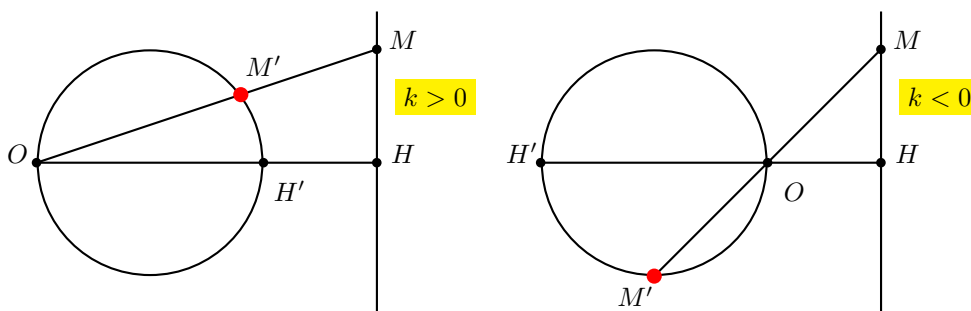


Figure 1.7: Image d'une droite par une inversion.

DÉFINITION 11

Une inversion complexe \mathcal{J} de centre O et puissance k est définie par $M' = \mathcal{J}(M) \Leftrightarrow z' = \frac{k}{z}$

L'inversion complexe est donc la composée d'une symétrie d'axe (Ox) et d'une inversion de pôle O et de puissance k : elle transforme les droites en cercles.

Les inversions et inversions complexes transforment:

- Une droite passant par O (privée de O) en une droite passant par O (privée de O).

- Une droite ne passant pas par O en un cercle passant par O (mais privé de ce point).
- Un cercle passant par O en une droite ne passant pas par O.
- Un cercle ne passant pas par O en un cercle ne passant pas par O.

1.5 Applications des complexes à l'électronique

1.5.1 Forme complexe d'un signal sinusoïdal

Considérons un signal sinusoïdal $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, d'amplitude A , de pulsation $\omega > 0$ et de phase à l'origine ϕ . On peut lui associer la fonction

$$F(t) = Ae^{i(\omega t + \phi)} = Ae^{i\phi} e^{i\omega t}$$

$F(t)$ est une fonction à valeur complexe dont la partie réelle est le signal initial: $\Re(F(t)) = f(t)$

L'application $\Lambda : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}/f(t) \rightarrow F(t)$ qui à un signal sinusoïdal (c'est à dire à une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) associe le signal complexe $F(t)$, est linéaire. En outre, on peut montrer que la dérivation et l'intégration (qui sont des transformations sur les signaux que l'on rencontre souvent en électronique) reviennent à multiplier la forme complexe du signal par une constante.

PROPRIÉTÉ 12

- $\Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$
- $\Lambda(k \times f) = k \times \Lambda(f)$ pour $k \in \mathbb{R}$
- $\Lambda(f') = i\omega \times \Lambda(f)$
- $\Lambda(\int f) = \frac{1}{i\omega} \times \Lambda(f)$

DÉMO

• Les deux premières propriétés illustrent la linéarité de la transformation. Leur démonstration est évidente car le passage d'un complexe à sa partie réelle est linéaire.

• Démontrons la troisième propriété:

$$f'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = A \sin(-\omega t - \phi) = A\omega \cos(\pi/2 + \omega t + \phi)$$

La forme complexe de ce signal est donc $A\omega e^{i(\pi/2 + \omega t + \phi)}$

$$\text{Par ailleurs, } i\omega \Lambda(f) = i\omega F(t) = i\omega Ae^{i(\omega t + \phi)} = Ae^{i\pi/2} e^{i\omega t + \phi} = Ae^{i(\pi/2 + \omega t + \phi)}$$

Par identification, $\Lambda(f') = i\omega \Lambda(f)$. C'est à dire que la dérivation dans le temps correspond à la multiplication par $i\omega$ dans les complexes.

• La démonstration est identique pour le passage à la primitive.

□

1.5.2 Impédance complexe

Considérons deux signaux $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ et $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi')$ représentant l'intensité et la tension dans un composant ou un quadripôle électronique (on suppose que l'on est en régime harmonique et que tous les signaux sont sinusoïdaux). Notons $I(t)$ et $V(t)$ leur forme complexe respective. L'impédance complexe correspondante est le nombre complexe

$$Z = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{V_m e^{i(\omega t + \phi')}}{I_m e^{i(\omega t + \phi)}} = \frac{V_m}{I_m} e^{i(\phi' - \phi)}$$

L'admittance est par définition l'inverse de l'impédance: $Y = 1/Z$

Dans le cas d'une résistance, la loi d'Ohm nous donne $v(t) = Ri(t)$. On a donc $\boxed{Z = R}$

Dans le cas d'un condensateur, on sait que $\frac{dv}{dt}(t) = \frac{1}{C}i(t)$

$$\text{Alors } i\omega \times V(t) = \frac{1}{C}I(t) \Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{iC\omega}}$$

Dans le cas d'une inductance, la loi de Lenz donne $v(t) = L \frac{di}{dt}(t)$

$$\text{Alors } V(t) = L\omega i \times I(t) \Rightarrow \boxed{Z = Li\omega}$$

Nous pouvons également définir la puissance complexe en posant $S(t) = U(t) \times I(t) \in \mathbb{C}$

Lorsque des composants sont reliés en série, les impédances s'ajoutent. Lorsqu'ils sont reliés en parallèle, ce sont les admittances qui s'ajoutent.

Ex: Circuit RLC en série

L'impédance complexe d'une cellule RLC est $Z = R + iL\omega + \frac{1}{iC\omega}$. Le module de cette impédance est donc $\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

Ex: Circuit RLC en parallèle

L'impédance complexe d'une cellule RLC vérifie $Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{iL\omega} + iC\omega$.

L'impédance est donc l'inverse de cette quantité et le module de cette impédance est donc

$$\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}$$

Ex: Considérons le montage ci-dessous

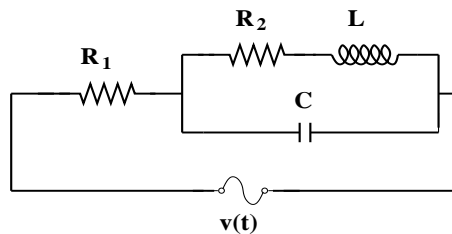


Figure 1.8: Montage RLC

Le circuit est alimenté par une tension sinusoïdale $v(t) = 4 \cos(\omega t)$ et l'on donne $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $L\omega = 2$ et $C\omega = 1/2$. Déterminons l'intensité $i(t)$ dans la maille principale. L'impédance complexe Z du montage est

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2 + L\omega i} + C\omega i} = R_1 + \frac{R_2 + L\omega i}{1 + R_2 C\omega i - LC\omega^2}$$

$$\text{Ainsi, } Z = 1 + \frac{4 + 2i}{2i} = 2(1 - i) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4} \Rightarrow I = \frac{V}{Z} = \frac{4e^{i\omega t}}{2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i(\omega t + \pi/4)}$$

$$\text{Ainsi, } i(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)$$

1.5.3 Fonctions de transfert

Un système physique linéaire possède un signal d'entrée $x(t)$ et un signal de sortie $y(t)$. Soient $X(t)$ et $Y(t)$ les formes complexes de ces signaux. La fonction de transfert harmonique de ce système est la

fonction H définie par $H(i\omega) = \frac{Y(t)}{X(t)}$

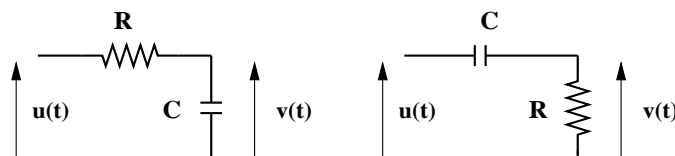


Figure 1.9: Filtre RC et filtre CR

Ex: Filtre basse-pass et passe-haut

Considérons le filtre RC donné par la figure ci-dessus. La maille est composée d'une résistance et d'un condensateur en série, tandis que la tension de sortie $v(t)$ est celle du condensateur. Sa fonction de

transfert est donc

$$H(\omega i) = \frac{\frac{1}{C\omega i}}{R + \frac{1}{C\omega i}} = \frac{1}{1 + RC\omega i}$$

De même, la fonction de transfert du second filtre est

$$H(\omega i) = \frac{R}{R + \frac{1}{C\omega i}} = \frac{RC\omega i}{1 + RC\omega i}$$

La représentation de ces fonctions de transfert se fait par les diagrammes de Bode et les diagrammes de Nyquist.

Diagrammes de Bode

Il est formé de deux graphiques donnant le module et l'argument de $H(i\omega)$ en fonction de la pulsation ω . On notera $G(\omega) = |H(i\omega)|$ et $\phi(\omega) = \arg(H(i\omega))$. Le gain en module est souvent donné en dB avec une échelle logarithmique et l'on pose alors $G(\omega) = 20 \log_{10}(|H(i\omega)|)$

Ex: Filtre RC.

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \Rightarrow G(\omega) = 20 \log_{10}(|H(i\omega)|) = -10 \log(1 + (RC\omega)^2)$$

$$\Re(H(i\omega)) = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} \text{ et } \Im(H(i\omega)) = -\frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \arg(H(i\omega)) = \arctan\left(\frac{\Im(H(i\omega))}{\Re(H(i\omega))}\right) = -\arctan(RC\omega)$$

Lors de la leçon sur les fonctions numériques, nous étudierons en détail ce type de fonctions. On peut par contre déjà constater que $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(i\omega)| = 0$, ce qui montre que l'amplitude de la sortie du filtre tend vers 0 lorsque la pulsation (et donc la fréquence) augmentent. Un filtre RC est donc un filtre passe-bas.

Ex: Filtre CR.

$$|H(i\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \Rightarrow G(\omega) = 20 \log_{10}\left(\frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\right)$$

$$\Re(H(i\omega)) = \frac{(RC\omega)^2}{1 + (RC\omega)^2} \text{ et } \Im(H(i\omega)) = \frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \arg(H(i\omega)) = \arctan\left(\frac{\Im(H(i\omega))}{\Re(H(i\omega))}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$$

$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(i\omega)| = 0$, ce qui montre que l'amplitude de la sortie du filtre tend vers 0 lorsque la pulsation diminue. Un filtre CR est donc un filtre passe-haut.

Diagrammes de Nyquist

Il s'agit de l'ensemble \mathcal{N} des points du plan complexe images de $H(i\omega)$ lorsque ω parcourt $]0, +\infty[$.

$$\mathcal{N} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \leftrightarrow z = x + iy / H(i\omega) = x + iy; \omega > 0\}$$

Ex: Considérons une fonction de transfert $H(i\omega) = \frac{1}{1 + RC\omega i}$

$$H(i\omega) = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2} - i \frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2} = x + iy$$

Par identification, on voit que $y^2 = x - x^2$ ie $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ qui est l'équation d'un cercle de centre $I(1/2, 0)$ et rayon $1/2$. Lorsque $\omega = 0$, le point correspondant est $A(1, 0)$ et lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, $M(x, y)$ parcourt le demi-cercle inférieur de A vers O .

Une autre façon de tracer le diagramme de Nyquist est de considérer les transformations du plan successives qui constituent la fonction de transfert. Grâce aux propriétés de ces transformations et notamment à l'utilisation des inversions (qui transforment droites en cercles), on peut retrouver la forme du cercle de Nyquist.

Dans le cas d'un filtre CR, le cercle de Nyquist est le demi cercle supérieur. L'origine du repère correspond à $\omega = 0$ et le point diamétralement opposé correspond à $\omega \rightarrow +\infty$.

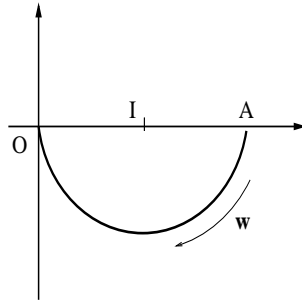


Figure 1.10: Cercle de Nyquist

1.5.4 Fonctions de variables complexes

Ce paragraphe n'est pas un cours sur les fonctions holomorphes (c'est ainsi que l'on nomme les fonctions de la variable complexe) mais simplement un ensemble d'illustrations sur la façon de représenter des fonctions de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

Pour une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, on peut la représenter par une surface dans l'espace à trois dimensions: un point de coordonnées (x, y, z) appartiendra à cette surface si et seulement si $z = \Re e(f(x + iy))$. Autrement dit, on gradue les axes (Ox) et (Oy) selon les parties réelle et imaginaire du complexe $x + iy$ et la hauteur du point sera égale à la partie réelle de $f(x + iy)$. La couleur du point correspondant est calculée à partir de sa partie imaginaire.

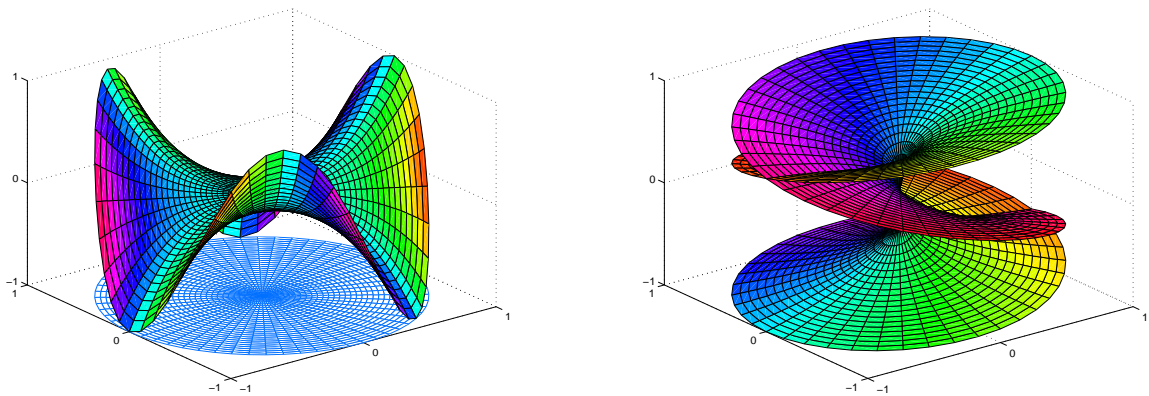


Figure 1.11: Illustrations des fonctions complexes $f(z) = z^3$ et $f(z) = \sqrt[3]{z}$.

L'ensemble de Mandelbrot est une célèbre fractale définie de la façon suivante:

On considère la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2 + c \\ z_0 = 0 \\ c \in \mathbb{C} \end{cases}$$

L'ensemble \mathcal{M} est défini par $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} / \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| \neq \infty\}$

Autrement dit, \mathcal{M} est l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquels la suite z_n ne tend pas vers l'infini. Sur la figure qui suit, cet ensemble est la tâche noire centrale et toutes ses ramifications. Dès qu'un point c appartient à \mathcal{M} , il est colorié en noir. Les autres points sont donc des points pour lesquels la suite tend vers l'infini et la couleur de ses points est choisie en fonction de la vitesse avec laquelle la suite diverge vers l'infini. Cela donne au final une structure très complexe, appelée une fractale, dont vous pourrez trouver beaucoup de propriétés sur internet.

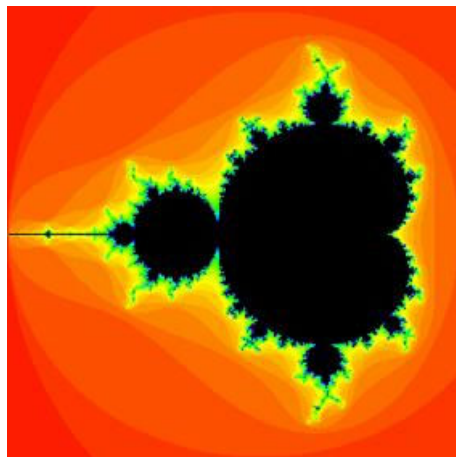


Figure 1.12: L'ensemble de Mandelbrot.

Et tout ce qui est bidoux est négatif

◇
Des
réels et des
imaginaires
sont en disco-
thèque. i vient voir un
réel qui boit un verre,
accoudé au bar:
- Eh, tu viens
danser
?
◇

La vie est
complexe, elle pos-
sède à la fois une
partie réelle et
une partie ima-
ginaire
♡

Chapitre 2

Rappels et compléments sur les limites

Introduction et historique

Le but de cette leçon est de donner des méthodes de calcul pour déterminer des limites de fonctions numériques. On passera donc rapidement sur la théorie et les rappels. La définition rigoureuse par les ϵ est donnée pour la forme et expliquée à l'aide de dessins et d'applets java. Les limites usuelles, opérations et formes indéterminées, déjà au programme de terminale, sont rappelées dans un résumé pour passer rapidement aux techniques de calcul.

Le concept de nombre réel attaché à une quantité continue commence à émerger à partir de -580 chez les mathématiciens grecs. L'existence des nombres irrationnels, l'apparition de l'infini et la notion de continu sont illustrés par Zénon (Vème siècle avant JC) dans le paradoxe d'Achille et la tortue. Dans les éléments d'Euclide apparaissent également des grandeurs "incommensurables". C'est au XVIIème siècle que la notion de calcul infinitésimal se développe avec Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Lagrange (1736-1813)... Au XIXème siècle, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) présente la notion de limite de façon rigoureuse et Karl Weierstrass (1815-1897) présente la définition des limites à l'aide des ϵ et des quantificateurs; c'est cette définition qui est utilisée aujourd'hui. Leibniz utilise la notion d'infiniment petit de façon floue et celle-ci ne sera définie rigoureusement qu'au XXème siècle par Abraham Robinson (1918-1974).

Parmi les élèves de Weierstrass, on trouve Sophie Kovalevski (1850-1891) mathématicienne et romancière russe, qui fut la première femme à obtenir un poste de professeur d'Université (à une époque où les femmes n'ont pas le droit d'y suivre des cours) et également la première femme à entrer à l'Académie des Sciences de Russie. Gosta Mittag-Leffler (1846-1927) est un mathématicien suédois, ami de Weierstrass et de Sophie Kovaleski. C'est à cause de lui que le prix Nobel de Mathématiques n'existe pas: Mittag-Leffler et Alfred Nobel fréquentait la même femme et Nobel ne voulut pas qu'un mathématicien soit récompensé par son prix.

Un résultat très important de cette leçon est le théorème de l'Hospital. Guillaume François Antoine de l'Hospital (1661-1704), comte d'Autremont et marquis de Saint-Mesme, publia en 1696 un ouvrage les limites appelé "analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes". On sait aujourd'hui que l'Hospital a acheté la plupart des résultats de ce traité à Jean Bernoulli; c'est ce dernier qui a en fait démontré la règle de l'Hospital en 1694.

Dans toute la suite de cette leçon nous supposerons les fonctions définies sur un voisinage I de $x_0 \in \mathbb{R}$.

2.1 Définitions

2.1.1 Limite en un point

DÉFINITION 12

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0 / |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x_0 / x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists x_0 / x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$$

Dans le cas de la limite de f en l' , on supposera que $I=[a, +\infty[$.

On définit de même $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ en remplaçant dans la seconde formule $> A$ par $< -A$.

Et l'on définit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ en remplaçant dans la dernière formule $f(x) > A$ par $f(x) < -A$.

On peut aussi parler de limite à droite ou à gauche dans les 2 premières formules en remplaçant $|x - x_0| < \alpha$ par respectivement $-\alpha < x - x_0 < 0$ et $0 < x - x_0 < \alpha$.

Les différents schémas ci-dessous et l'exécution de l'applet expliquent ces formules.

Pour les limites de fonctions usuelles, se reporter aussi au résumé.

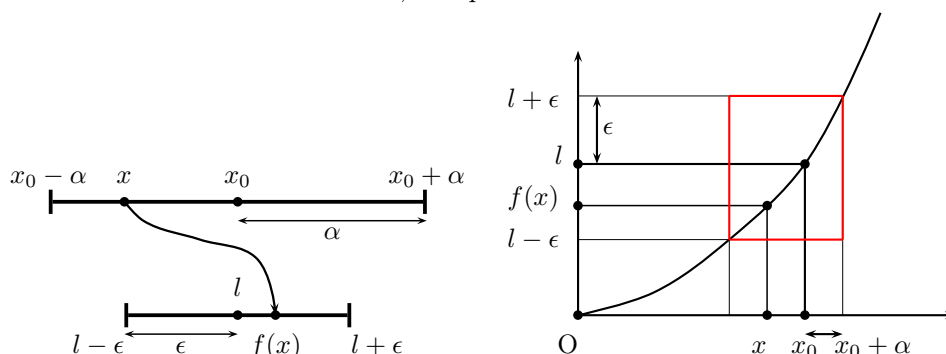


Figure 2.1: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

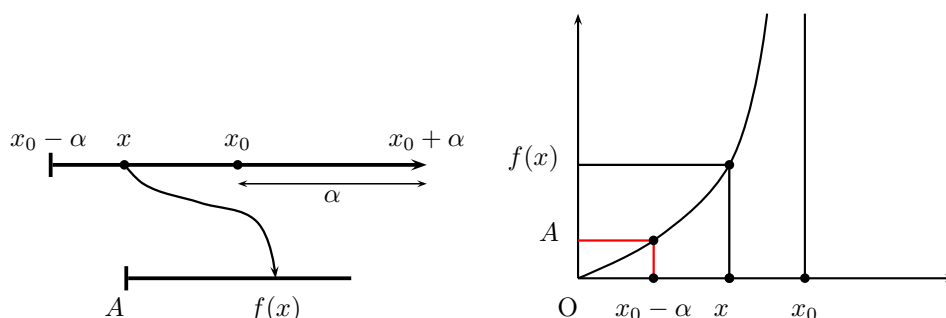


Figure 2.2: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

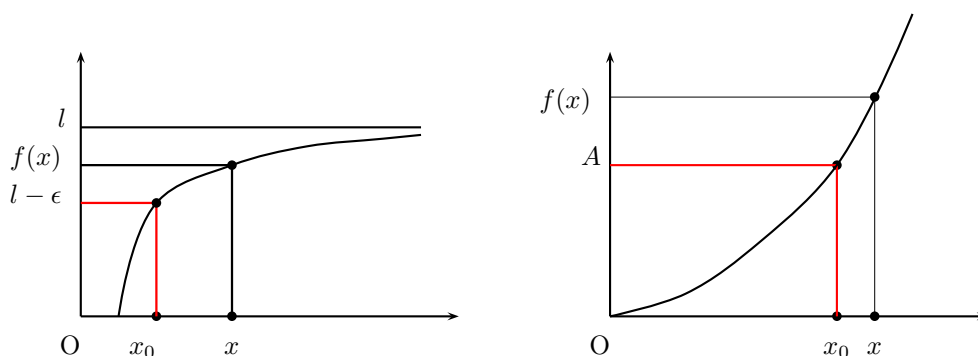


Figure 2.3: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Expliquons néanmoins quelques points sur ces formules:

$|x - x_0|$ représente la distance entre x et x_0 et $|f(x) - l|$ représente la distance entre $f(x)$ et l . La formule se traduit donc par la phrase suivante: quelque soit une précision arbitraire ϵ choisie sur l'axe des ordonnées, il existe toujours une quantité α sur l'axe des abscisses, de telle sorte que si x n'est pas éloigné de x_0 d'une valeur supérieure à α , alors $f(x)$ ne sera pas éloigné de l d'une valeur supérieure à ϵ . Autrement dit, et c'est ainsi que l'on définit maintenant la limite en lycée:

DÉFINITION 13

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff$ si x se rapproche de x_0 alors $f(x)$ se rapproche de l .

Ce n'est pas une définition très rigoureuse, mais elle conviendra pour la suite. On peut donner une définition exacte de la limite en utilisant les suites numériques réelles:

THÉORÈME 6

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \left(\forall (u_n)_{n \geq 0} / \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l \right)$$

Ex:

Considérons la fonction $f(x) = x^2$ et cherchons sa limite en $x = 2$. En utilisant une calculatrice (ou en faisant le calcul à la main), on constate que lorsque x se rapproche de $x_0 = 2$, alors $f(x)$ se rapproche de la valeur 4. C'est que nous allons démontrer en utilisant la (vraie) définition:

Choisissons un nombre $\epsilon > 0$ et considérons les quantités $f(x_0) + \epsilon$ et $f(x_0) - \epsilon$ sur l'axe des ordonnées. Ces deux valeurs ont pour antécédent par f les nombres a et b définis par $a^2 = f(x_0) - \epsilon = x_0^2 - \epsilon$ et $b^2 = f(x_0) + \epsilon = x_0^2 + \epsilon$, autrement dit,

$a = \sqrt{x_0^2 - \epsilon}$ et $b = \sqrt{x_0^2 + \epsilon}$. Posons $\alpha = \inf(|x_0 - a|, |x_0 - b|)$ de sorte que α est la distance qui sépare x_0 du plus proche des deux points a et b (aidez-vous d'un dessin). Si l'on choisit maintenant x dans l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, alors par construction de α nous sommes assurés que $f(x) \in]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$ de sorte que l'on a bien $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Puisque le nombre choisi ϵ est quelconque, cette démonstration est valable pour tout $\epsilon > 0$ et la définition de la limite est satisfaite, ainsi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4$

Examinons les deux figures ci-dessous qui illustrent un cas où la fonction $f(x)$ (dont la courbe est en bleu) n'admet pas de limite lorsque x tend vers x_0 :

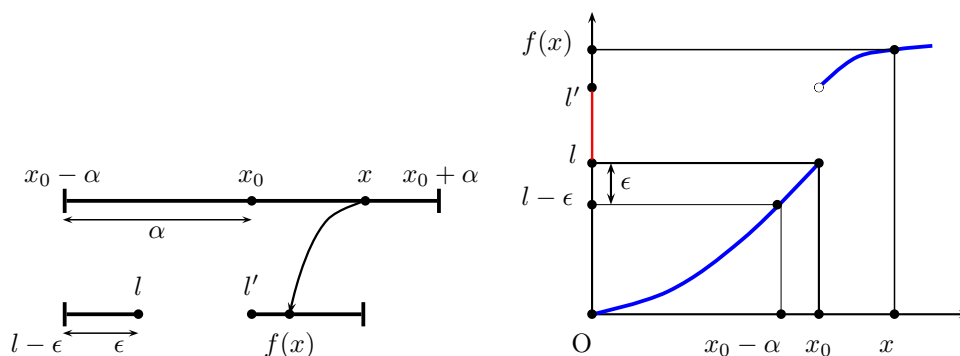


Figure 2.4: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas

On constate que si x tend vers x_0 par la gauche, la définition est satisfaite. Par contre, si x tend vers x_0 par la droite et si $\epsilon < |l - l'|$, quelque soit le choix de α , $f(x)$ ne pourra pas se rapprocher de l de façon arbitraire. En fait, la fonction admet une limite à gauche égale à l et une limite à droite égale à l' .

THÉORÈME 7

|| *Lorsqu'elle existe, la limite est unique.*

DÉMO

Supposons l'existence de deux limites l et l' pour f en un point x_0 . Pour tout $\epsilon > 0$, on a $|f(x) - l| < \epsilon$ et $|f(x) - l'| < \epsilon$. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, $|l - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| < 2\epsilon$. Comme ϵ est quelconque, $|l - l'| < \epsilon$ signifie que $l = l'$

□

REMARQUE 1

- Une fonction n'a pas besoin d'être définie en un point pour avoir une limite en ce point.
- Si $f(x_0)$ existe, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'est pas nécessairement égale à $f(x_0)$.

THÉORÈME 8

|| *Si f est continue en x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$*

Ce théorème nous donne un moyen rapide de trouver beaucoup de limites: la plupart des fonctions usuelles sont continues sur \mathbb{R} ou sur leur domaine de définition. Pour toutes ces fonctions (sin, cos, tan,

\ln , \exp , \sqrt{x} , polynômes, fractions, etc.) calculer la limite en un point revient à calculer la valeur de la fonction. Sinon, il faut revenir à la définition.

Ex: $\lim_{x \rightarrow e} \ln x = \ln e = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = \sin \pi = 0$

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas car la fonction oscille perpétuellement entre -1 et 1 .

Ex: $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$ n'existe pas mais par contre on a une limite à droite et une limite à gauche:

$\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = -\infty$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et pourtant cette fonction n'est pas définie en 1.

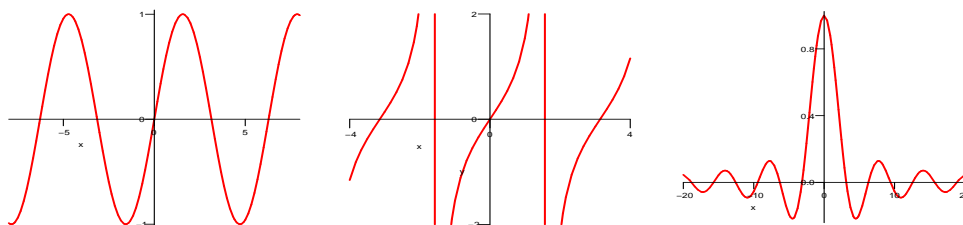


Figure 2.5: $\sin x$, $\tan x$ et $\sin x/x$

Ex: Soit $f(x)$ la fonction définie par $f(x) = e^x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1$ alors que $f(0) = 0$; cette fonction admet une limite en 0 (elle n'est pas continue en ce point) qui n'est pas égale à la valeur de la fonction en 0.

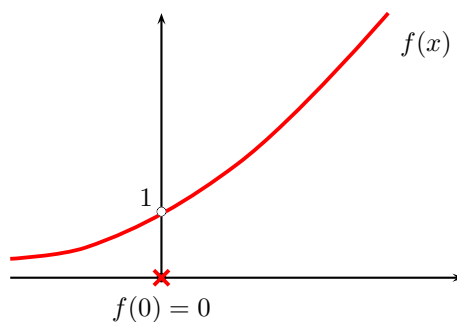


Figure 2.6: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 0$

2.1.2 Quelques limites usuelles

Nous rappelons quelques limites usuelles qui seront également revues lors de la leçon sur les fonctions:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

On peut généraliser ces limites: si $\alpha > 0$,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$

Les échelles de grandeurs entre fonctions exponentielles, puissances et logarithmes permettent de calculer les limites des produits et quotients de ces fonctions. Formellement, on peut considérer qu'en cas de limites indéterminées, les exponentielles l'emportent sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes. De façon un peu plus rigoureuse, le théorème DES CROISSANCES COMPAREES donne:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x x^\alpha = 0, 0 < a < 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty, \alpha > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \alpha > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x \ln x = 0, 0 < a < 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0, \alpha \in \mathbb{R}$

A partir de tous ces résultats, on utilise les propriétés et la stabilité du passage à la limite par les différentes opérations pour déterminer les limites d'expressions plus compliquées.

2.1.3 Opérations sur les limites

Dans les tableaux ci dessous, les colonnes représentent $\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x)$, les lignes $\lim_{x \rightarrow \bullet} g(x)$ avec

$\bullet \in \{a, +\infty, -\infty\}$.

Les cases donnent alors $\lim_{x \rightarrow \bullet} (f(x) \triangle g(x))$, $\triangle \in \{+, \times, \div\}$

+	1	$+\infty$	$-\infty$
1'	$1+1'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

\times	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	ll'	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	$+\infty$

\div	1	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$1/l'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
$+\infty$	0	FI	FI
$-\infty$	0	FI	FI

Si λ est un nombre réel non nul, on a également $\lim_{x \rightarrow \bullet} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow \bullet} f(x)$

De même, le passage à la limite respecte la relation d'ordre:

$$\boxed{f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \bullet} g(x)}$$

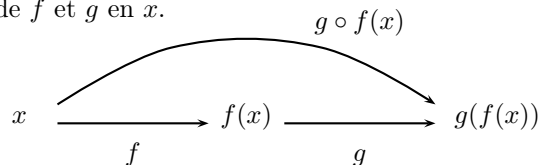
Formes indéterminées usuelles: $\infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad 0^\infty \quad \infty^0$

On rappelle que $f \circ g(x) = f(g(x))$ qui est la composée de f et g en x .

En général, $f \circ g \neq g \circ f$

PROPRIÉTÉ 13 (LIMITE DE FONCTIONS COMPOSÉES)

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow f(a)} g(x)$$



Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^0}{e^0+1} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1/\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

2.2 Techniques de calcul

2.2.1 Limites de polynômes et fractions en 0 et ∞

PROPRIÉTÉ 14

|| Pour un polynôme, c'est la limite du terme de plus haut degré en ∞ et de plus bas degré en 0.
 || Pour une fraction, c'est la limite du quotient des termes de plus haut degré en ∞ et de plus bas degré en 0.

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

Ex: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x}{-4x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-4x} = +\infty$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 3x^2}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2}{3x} = 0$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^5 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

2.2.2 Limite d'une fraction en un pôle

Un pôle est un réel α qui annule le dénominateur de $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Deux cas se présentent:

• $\boxed{Q(\alpha) = 0 \text{ et } P(\alpha) \neq 0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} F(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{k}{(x - \alpha)^n} = \pm\infty$

– Si n est pair, la limite est ∞ de même signe que k .

Ex: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{(x - 2)^2} = +\infty$

– Si n est impair, la limite est ∞ avec le signe donné par la figure ci dessous:

	$x-a < 0$	a	$x-a > 0$
$k > 0$	$-\infty$		$+\infty$
$k < 0$	$+\infty$		$-\infty$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2} = +\infty$

- $\boxed{Q(\alpha) = P(\alpha) = 0} \Rightarrow$ la limite peut ne pas être infinie.

Il faut factoriser $P(x)$ et $Q(x)$ par $(x - \alpha)^d$ où d est l'ordre du pôle.

Ex: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2+4x-3}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2+4x-3}{x^2-2x+1} = -\infty$

2.2.3 Fonctions avec radicaux

On multiplie par l'expression conjuguée:

Ex: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} = \frac{1}{3}$

Ex: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{1+x^2}} = 0$

2.2.4 Théorèmes de comparaison

THÉORÈME 9 (MAJORATION/MINORATION)

- Si $\exists x_0 / \forall x > x_0 \ f(x) \geq u(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si $\exists x_0 / \forall x > x_0 \ f(x) \leq v(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

DÉMO

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists X / x > X \Rightarrow f(x) > A.$

Fixons $A > 0$ et soit X vérifiant la propriété ci dessus.

Posons $x_1 = \max(x_0, X)$. Alors $\forall x > x_1 \ f(x) > u(x) > A$.

Ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

La démonstration est la même pour $-\infty$.

□

Ex: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + \sin x$

$x + \sin x \geq x - 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$

$x + \sin x \leq x + 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin x) = -\infty$

THÉORÈME 10 (D'ENCADREMENT)

Si $\forall x > x_0 \ |f(x) - l| \leq u(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

DÉMO

Les hypothèses impliquent par définition de la limite que $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - l| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

□

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x}$

$f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

THÉORÈME 11 (DES GENDARMES)

Si $\exists x_0 > 0 / \forall x > x_0, v(x) \leq f(x) \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

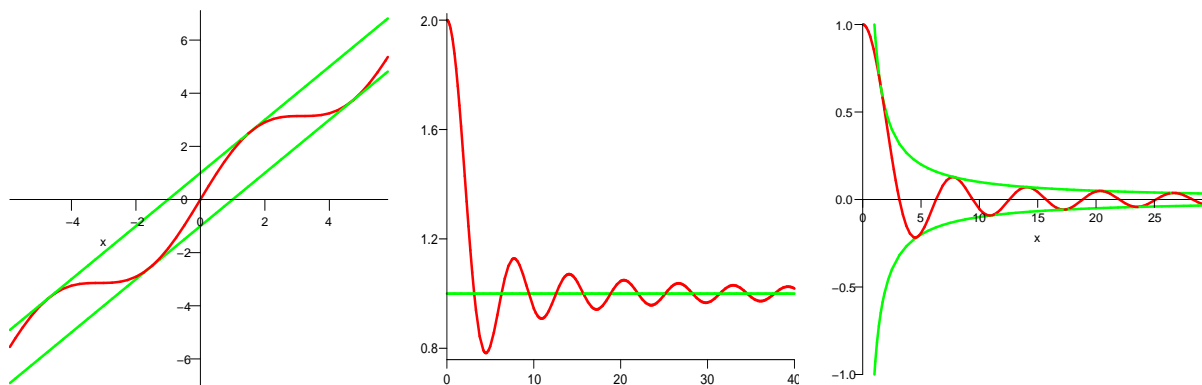


Figure 2.7: $x + \sin x$; $1 + \sin x/x$; $\sin x/x$

DÉMO

Il s'agit encore d'une conséquence directe de la définition.

□

Ex: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Les trois théorèmes précédents sont aussi valables ailleurs qu'en l'infini (nous ne citons la modification que pour le théorème des gendarmes, mais l'énoncé est le même pour les deux autres théorèmes):

THÉORÈME 12 (DES GENDARMES EN x_0)

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$
 Si $\exists \alpha > 0 / \forall x$ vérifiant $|x - x_0| < \alpha$ on ait $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = l$
 ALORS $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

En d'autres termes, si $f(x)$ est coincée, sur un voisinage de x_0 , entre deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ qui ont même limite, alors $f(x)$ tend vers cette limite commune. Les anglo-saxons appellent ce théorème le théorème de pincement ou le théorème du sandwich ("squeezing theorem" ou "pinching theorem").

Ex: Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x})$

IL est clair que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas car lorsque $x \rightarrow 0$, $1/x$ tend vers l'infini. Par contre,

$-x \leq x \sin(\frac{1}{x}) \leq x$ pour tout $x \neq 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$

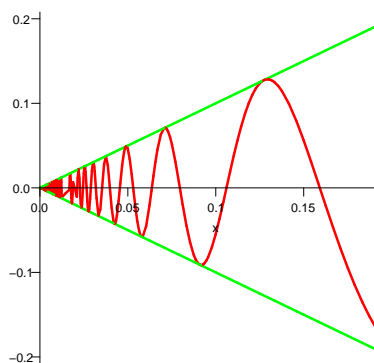


Figure 2.8: $x \sin(1/x)$

2.2.5 La règle de l'Hospital

THÉORÈME 13 (RÈGLE DE L'HOSPITAL)

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur $I \ni x_0$, dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$ telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ sur $I \setminus \{x_0\}$
 Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Ce théorème reste valable si l'on remplace x_0 par $\pm\infty$ où si les limites sont de la forme $\frac{\infty}{\infty}$

DÉMO

La démonstration utilise le théorème de Rolle qui sera vu lors de la leçon sur la dérivation. Vous pouvez passer dans un premier temps ce qui suit et y revenir plus tard dans l'année.

Sur $I = [a, b]$ posons $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$

La fonction h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $h(a) = h(b)$.

D'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, b[\mid h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$ (1)

Mais par hypothèse, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ donc $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \epsilon$

Soit alors $y \in I \mid 0 < |y - x_0| < \alpha$. D'après (1), $\exists c \in]x_0, y[\mid \frac{f(y) - f(x_0)}{g(y) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Ainsi, $\left| \frac{f(y)}{g(y)} - l \right| < \epsilon$ et il en résulte que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

□

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

Ex: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = 0$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x} \left(2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin x \right) = \frac{1}{2}$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

⚠ La règle de l'Hospital est un théorème très puissant qui permet facilement de lever beaucoup d'indéterminations.

2.3 Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

DÉFINITION 14

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un voisinage I de x_0 .

On suppose que $g(x) \neq 0$ sur un voisinage de x_0 sauf peut être en x_0 .

- On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de x_0 et l'on note $f = o(g)$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de x_0 et l'on note $f \sim g$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
- On dit que f est **comparable** à g au voisinage de x_0 et l'on note $f = \mathcal{O}(g)$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq cte$

Si $\epsilon(x)$ représente une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$ alors

$$f \sim g \iff f(x) = (1 + \epsilon(x))g(x) \quad \text{et} \quad f = o(g) \iff f(x) = \epsilon(x)g(x)$$

Ex: $x^2 = o(x)$ en 0, $\sin x = o(x)$ en $+\infty$, $x + x^3 = o(x^5)$ en $+\infty$

Ex: $\sin x \sim x$, $\cos x \sim 1$, $x^4 + x^2 - x \sim -x$, $x^4 + x^2 - x \sim x^4$, $\ln(1+x) \sim x$ (règle de l'Hôpital)

PROPRIÉTÉ 15

Soient f_1, f_2, g_1, g_2 4 fonctions telles que $f_1 \stackrel{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \stackrel{x_0}{\sim} g_2$
 Alors $f_1 f_2 \stackrel{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \stackrel{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$

DÉMO

$$f_1 \stackrel{x_0}{\sim} g_1 \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)(1 + \epsilon_1(x)), \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon_1(x) = 0, f_2 \stackrel{x_0}{\sim} g_2 \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)(1 + \epsilon_2(x)),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x)(1 + \epsilon_1(x) + \epsilon_2(x) + \epsilon_1(x) \times \epsilon_2(x)) = g_1(x)g_2(x)(1 + \epsilon(x))$$

avec $\epsilon(x) = \epsilon_1(x) + \epsilon_2(x) + \epsilon_1(x) \times \epsilon_2(x)$

$$\text{De la même façon, } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \times \frac{1 + \epsilon_1(x)}{1 + \epsilon_2(x)} = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \times (1 + \epsilon(x)) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$$

□

Ex: $1 - \cos x \stackrel{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. En effet, $1 - \cos x = 2 \sin^2(\frac{x}{2}) \stackrel{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

 **Par contre, on ne peut ajouter ou soustraire des équivalents:**

$\cos x \stackrel{0}{\sim} 1 + 2x$ mais $\cos x - 1$ n'est pas équivalent à $2x$.

PROPRIÉTÉ 16

• $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \ln(1 + u(x)) \stackrel{x_0}{\sim} u(x)$ et $e^{u(x)} - 1 \stackrel{x_0}{\sim} u(x)$
 • $u \stackrel{x_0}{\sim} v$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \neq 1 \Rightarrow \ln u(x) \stackrel{x_0}{\sim} \ln v(x)$
 • $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - v(x)) = 0$ et $u(x) \stackrel{x_0}{\sim} v(x) \Rightarrow e^{u(x)} \stackrel{x_0}{\sim} e^{v(x)}$

DÉMO

• Cette propriété découle de la définition et du fait que $\ln(1 + u) \stackrel{0}{\sim} u$ et $e^u - 1 \stackrel{0}{\sim} u$

• $u(x) = v(x)(1 + \epsilon(x)) \Rightarrow \ln(u(x)) = \ln(v(x)) + \ln(1 + \epsilon(x)) \Rightarrow \ln(u(x)) = \ln(v(x)) [1 + \frac{\ln(1 + \epsilon(x))}{\ln(v(x))}]$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(1 + \epsilon(x)) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln v(x) \neq 0$$

On a donc bien $\ln u \stackrel{x_0}{\sim} \ln v$

• $u(x) = v(x)(1 + \epsilon(x)) \Rightarrow e^{u(x)} = e^{v(x)} \times e^{v(x)\epsilon(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)}}{e^{v(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x)\epsilon(x)} \text{ de sorte que } e^{u(x)} \stackrel{x_0}{\sim} e^{v(x)} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) - v(x)) = 0$$

□

Ex: $\ln(1 + \sin x) \stackrel{0}{\sim} \sin x \stackrel{0}{\sim} x$

Ex: $\ln(2 + x) \stackrel{0}{\sim} \ln(2 + x^2)$ car $2 + x \stackrel{0}{\sim} 2 + x^2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \neq 1$

Cex: $1 + x \stackrel{0}{\sim} 1 + x^2$ mais $\ln(1 + x)$ et $\ln(1 + x^2)$ ne sont pas équivalents en 0

Ex: $e^{x + \frac{1}{x^2}} \stackrel{0}{\sim} e^{\frac{1}{x^2}}$ car $x + \frac{1}{x^2} \stackrel{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}) = 0$

Cex: $1 + \frac{1}{x^2} \stackrel{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ mais $e^{\frac{1}{x^2} + 1}$ et $e^{\frac{1}{x^2}}$ ne sont pas équivalents en 0.

PROPRIÉTÉ 17 (APPLICATION AU CALCUL DES LIMITES)

$$f \stackrel{x_0}{\sim} g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Les deux fonctions \sim en un point y ont même limite (si elles admettent des limites en ce point).

DÉMO

$$f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \epsilon(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

□

Ex: Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^4 - x^2}$

C'est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$

$x^4 - x^2 \stackrel{0}{\sim} -x^2$, $1 - \cos x \stackrel{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $1 + 2x \stackrel{0}{\sim} 1$ Ainsi, $f(x) \stackrel{0}{\sim} -\frac{x^2}{2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$

Ex: Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln(1 + \ln(1 + x))$

$\ln(1 + x) \stackrel{0}{\sim} x \Rightarrow \ln(1 + \ln(1 + x)) \stackrel{0}{\sim} \ln(1 + x) \stackrel{0}{\sim} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \ln(1 + \ln(1 + x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

Ex: Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sin 2x}$

$\frac{\ln(1 + x)}{\sin 2x} \stackrel{0}{\sim} \frac{x}{2x}$ et la limite vaut donc $\frac{1}{2}$

Ex: Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 - x) \sin(\frac{1}{x})(e^{1/x} - 1)}{e^{1/x^2} \ln(1 - \frac{1}{x^3})}$

$\sin \frac{1}{x} \approx \frac{1}{x}$, $\ln(1 - \frac{1}{x^3}) \approx -\frac{1}{x^3}$, $(e^{1/x} - 1) \approx \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{(x^4 - x) \sin(\frac{1}{x})(e^{1/x} - 1)}{e^{1/x^2} \ln(1 - \frac{1}{x^3})} \approx -x^5$ et la limite vaut donc $-\infty$

2.4 Branches infinies de fonctions

2.4.1 Asymptotes

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ alors $\Delta : x = x_0$ est asymptote verticale à \mathcal{C}_f
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ alors $\Delta : y = l$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $f(x) = ax + b + \phi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0$ alors $\Delta : y = ax + b$ est asymptote oblique à \mathcal{C}_f

Ex: $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{2x^2} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x^2}$ donc $\Delta : y = \frac{x}{2} + 1$ est asymptote en $+\infty$.

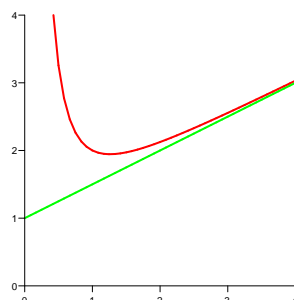


Figure 2.9: Asymptote oblique.

2.4.2 Branches paraboliques et directions asymptotiques.

- On calcule d'abord les limites aux bornes pour déterminer asymptotes verticales et horizontales.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si le résultat est:
 - ∞ , alors il existe une branche parabolique de direction (Oy).
 - 0, alors il existe une branche parabolique d'axe (Ox).
 - a , il existe une direction asymptotique d'équation $y = ax$. On calcule alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$. Si le résultat est:
 - b , la courbe admet une asymptote oblique d'équation $\Delta : y = ax + b$.
 - ∞ , la courbe n'admet qu'une direction asymptotique.
 - La limite n'existe pas: il s'agit aussi d'une direction asymptotique.

Ex: $f(x) = x^2$ possède une branche parabolique d'axe (Oy) en $+\infty$.

Ex: $g(x) = \sqrt{x}$ possède une branche parabolique d'axe (Ox) en $+\infty$.

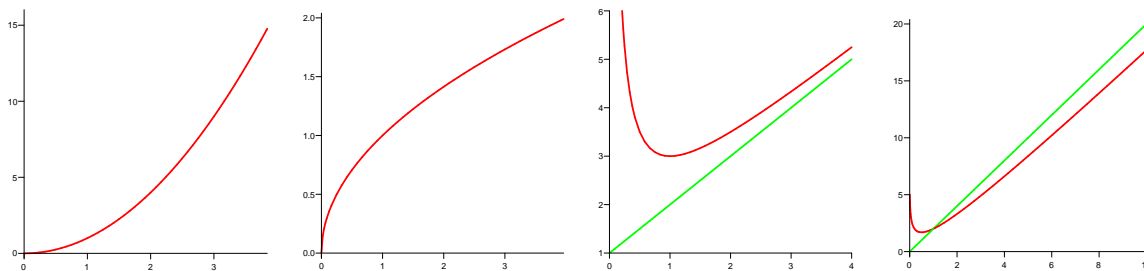


Figure 2.10: x^2 ; \sqrt{x} ; $x + 1 + \frac{1}{x}$; $2x - \ln x$

Ex: $h(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$ possède une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ en $\pm\infty$.

Ex: $k(x) = 2x - \ln x$ possède une direction asymptotique d'équation $y = 2x$.

Ex: $s(x) = x + \sin x$ possède également une direction asymptotique d'équation $y = x$ en $\pm\infty$.

En effet, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ n'existe pas.

Sur terre il y a trois types de gens: ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas compter.



Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs. (Jacques Prévert)

Chapitre 3

Polynômes et fractions rationnelles

Introduction

Les égyptiens s'intéressaient déjà aux équations du premier degré (cf. Papyrus de Rhind vers 1700 av JC). Les grecs savaient résoudre les équations du second degré, mais dans un cadre géométrique. C'est Muhammed Ibn Mussa Al Khwarizmi (780-850) qui rédigea le premier des traités d'arithmétique et d'algèbre sur la résolution symbolique des équations de degré 1 et 2. Ce grand mathématicien arabe a donné son nom au mot "algorithme" et sa méthode de résolution des équations, qu'il appelait "Al jabr", a donné le mot algèbre.

Fibonacci, au XIII^{ème} siècle, pensait que les équations de degré 3 étaient impossibles à résoudre algébriquement. La méthode de résolution de l'équation du troisième degré a été découverte par Tartaglia (1499-1557) qui la garda secrète. Cardan (1501-1576) réussit à lui soutirer cette méthode en lui promettant de ne rien dévoiler; pourtant il la publia en 1545 dans son ouvrage "Ars Magna". L'équation du quatrième degré a été résolue par Ferrari vers 1545. Celui-ci était arrivé à 14 ans comme domestique chez Cardan en fit son élève lorsqu'il qu'il découvrit ses capacités en mathématiques.

Vers 1770, Lagrange et Vandermonde s'intéressent aux équations de degré 3 et 4 et remarquent certaines propriétés des permutations de leurs racines. En 1824, Niels Abel (1802-1829) démontre l'impossibilité de résoudre algébriquement l'équation du cinquième degré, mais il est malade et meurt de la tuberculose à 27 ans avant d'avoir pu terminer ses travaux. L'oeuvre d'Abel est malgré tout très importante; selon Charles Hermite, il a laissé cinq cent ans de travail à ses successeurs.

C'est Evariste Galois (1811-1832) qui démontre trois ans plus tard, qu'à partir du degré cinq les équations algébriques ne sont, en général, pas résolubles par radicaux; il donne des conditions pour qu'une équation soit résoluble et pose en même temps les bases de la théorie des groupes. L'une de ses démonstrations est rédigée rapidement la veille d'un duel où il se fait tuer le 31 mai 1832, à l'âge de 21 ans. Galois était entré au lycée Louis le Grand à 12 ans. Il tente le concours d'entrée à l'école Polytechnique à 16 ans. La légende veut qu'il ait claqué la porte après une altercation avec ses examinateurs. Il doit alors se contenter de l'Ecole Normale Supérieure, moins prestigieuse à l'époque. Républicain convaincu, il s'en fait renvoyer durant la révolution de 1830 et est emprisonné suite à une rixe (Alexandre Dumas était présent et raconte la scène dans une lettre); il n'est libéré que peu de temps avant le duel.

3.1 Polynôme à une indéterminée

3.1.1 Structure de $\mathbb{K}[X]$

Dans toute la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{F}_2 . $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ nous sera utile lorsque nous travaillerons avec des polynômes à coefficients binaires.

DÉFINITION 15

Un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} est une expression de la forme:

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n$$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ sont les coefficients de P .
 X est l'indéterminée.
 $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ est le degré du polynôme

On notera $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

Le degré du polynôme est l'indice du dernier coef non nul, c'est à dire $\deg P = \sup\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$. Il est nul si le polynôme est constant et vaut par convention $-\infty$ pour le polynôme nul. On note généralement $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieurs ou égaux à n . Enfin, $a_n X^n$ est le terme dominant de P .

La valuation du polynôme est l'indice du premier coef non nul (ou $+\infty$ pour le polynôme nul).

Ex: Si $P(X) = -X^3 + X^2 + 3X$ alors $\deg(P)=3$, $\text{val}(P)=1$

La fonction polynômiale $\tilde{P}(x)$ associée au polynôme P est la fonction $\tilde{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \tilde{P}(x) = P(x)$

D'habitude, on parle de polynôme lorsque l'on s'intéresse aux propriétés algébriques et de fonction polynômiale lorsque l'on s'intéresse au tracé du polynôme. Nous confondrons les deux notions sans problème. Voici quelques courbes représentatives de fonctions polynômiales:

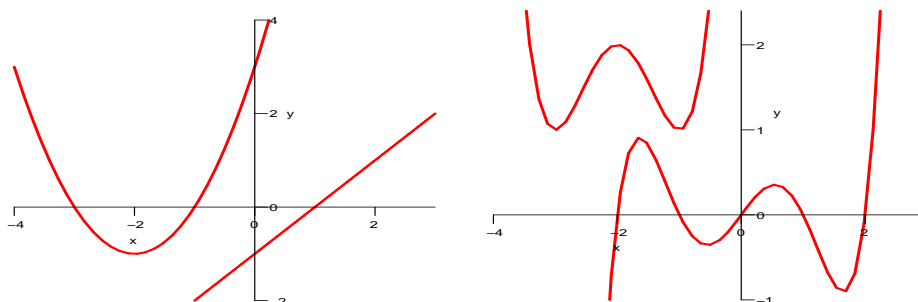


Figure 3.1: fonctions polynômiales de degré 2, 1, 4 et 5

3.1.2 Opérations dans $\mathbb{K}[X]$

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{i=0}^n b_i X^i$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

DÉFINITION 16

- $(\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$
- $(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^l (a_k + b_k) X^k$
- $(P \times Q)(X) = \sum_{k=0}^m c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$
- $(P \circ Q)(X) = P(Q(X))$

$P + Q$ s'obtient en effectuant la somme coefficient par coefficient. Lorsque les deux polynômes n'ont pas le même degré, on remplace les coefficients manquants de celui ayant le plus faible degré par 0. $P \times Q$ s'obtient en distribuant chaque terme de P par chaque terme de Q , puis en regroupant les termes de même degré. En exercice, vous pouvez démontrer la formule donnant l'expression de c_k en fonction de a_k et b_k . Enfin, $P \circ Q$ s'obtient en substituant, dans P , l'indéterminée X par l'expression complète de $Q(X)$. En considérant P et Q comme des fonctions, les opérations ci-dessus sont les opérations usuelles sur les fonctions polynômiales. Les valeurs de l et m seront définies ci-dessous.

Ex: $P(X) = X + 1$ et $Q(X) = 3 + X + 2X^2$

$(P + Q)(X) = 4 + 2X + 2X^2$

$PQ(X) = 2X^3 + 3X^2 + 4X + 3$

$P \circ Q(X) = 2X^2 + X + 4$ et $Q \circ P = 3 + (X + 1) + 2(X + 1)^2$

PROPRIÉTÉ 18 (DU DEGRÉ)

- $\deg P = \deg Q \Rightarrow \deg (P + Q) \leq \deg P$
- $\deg P \neq \deg Q \Rightarrow \deg (P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$
- $\deg (PQ) = \deg P + \deg Q$
- $\deg (P \circ Q) = \deg (Q \circ P) = \deg P \times \deg Q$

DÉMO

Les coefficients dominants de P et Q sont $a_n X^n$ et $b_p X^p$. Alors le coefficient dominant de $P + Q$ est $a_n X^n + b_p X^p$. Si $n = p$ et $a_n = -b_p$, alors le terme dominant sera de degré strictement inférieur à n . Si par contre $n \neq p$, le coefficient dominant est celui du polynôme de plus haut degré.

Le coefficient dominant de $P \times Q$ est $a_n X^n \times b_p X^p = a_n b_p X^{n+p}$.

Enfin, le coefficient dominant de $P \circ Q$ est $a_n b_p X^{np}$

□

PROPRIÉTÉ 19 (DE LA VALUATION)

- $\text{val } P = \text{val } Q \Rightarrow \text{val } (P + Q) \geq \text{val } P$
- $\text{val } P \neq \text{val } Q \Rightarrow \text{val } (P + Q) = \min(\text{val } P, \text{val } Q)$
- $\text{val } (PQ) = \text{val } P + \text{val } Q$
- $\text{val } (P \circ Q) = \text{val } (Q \circ P) = \text{val } P \times \text{val } Q$

DÉMO

La démonstration est identique à celle de la propriété précédente.

□

3.1.3 Division dans $\mathbb{K}[X]$

Division euclidienne

THÉORÈME 14

- Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$
- Il existe un unique couple (Q, R) tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$
- Q est le quotient et R le reste de la division

Ex: dans \mathbb{N} , $17 = 5 \times 3 + 2$

Ex: dans $\mathbb{R}[X]$, $X^3 + X + 1 = X(X^2 + 1) + 1$

Comme pour la division entière, il est commode de présenter les calculs avec la notation suivante:

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X + 1 & X^2 + 1 \\ X^3 + X & X \\ \hline 1 & \end{array}$$

Ex: dans $\mathbb{R}[X]$, $X^6 + 2X^5 = (X^3 + 1)(X^3 + 2X - 1) + (-2X^2 + 1)$

$$\begin{array}{r|l} X^6 + 2X^5 & X^3 + 1 \\ \dots & X^3 + 2X^2 - 1 \\ \hline -2X^2 + 1 & \end{array}$$

REMARQUE 2

• Tout au long de cette leçon, il faudra garder en tête la forte analogie entre les nombres entiers et les polynômes.

• Si $R = 0$, alors $A = B \times Q$ et l'on dit que A est divisible par B (ou factorisable).

Ex: $X^2 - 1$ est divisible par $X - 1$ car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.

• Un polynôme est **irréductible** s'il n'est divisible que par les constantes et lui-même.

Ex: $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ car $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$

La notion d'irréductibilité dépend donc du corps dans lequel on travaille. Un polynôme de degré supérieur à 1 qui a des racines ne sera pas irréductible. Par contre, ce n'est pas parce qu'un polynôme n'a pas de racine qu'il est irréductible (cf. la fin du chapitre sur les complexes).

Dans \mathbb{R} , les polynômes irréductibles sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 ayant un discriminant négatif. Tout polynôme de degré supérieur ou égal à trois n'est pas irréductible (dans \mathbb{R}). Dans \mathbb{C} , les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

- Deux polynômes sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun facteurs communs.

Ex: $X^2 - 1$ et $(X + 2)^2$ le sont, mais pas $X^2 - 1$ et $X - 1$

On peut définir la notion de plus grand diviseur commun et plus petit multiple commun de deux polynômes comme pour les entiers. On pourra se reporter au chapitre sur l'arithmétique dans les annexes.

Division suivant les puissances croissantes à l'ordre k

DÉFINITION 17

Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$ avec $\text{val } B = 0$ (ie. $b_0 \neq 0$)
 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists$ un unique couple $(Q, S) / A = BQ + X^{k+1}S$ avec $\deg Q \leq k$

Ex: Si $A = 2X + 3X^2 - X^3$ et $B = 1 + 2X - X^3$ avec $k = 3$, $A = B(2X - X^2 + X^3) + X^4(-X + X^2)$

Là encore, on utilisera la disposition précédente, mais en classant les monômes par ordre croissant:

$$\begin{array}{r|l}
 2X + 3X^2 - X^3 & 1 + 2X - X^3 \\
 \hline
 2X + 4X^2 - 2X^4 & 2X - X^2 + X^3 \\
 \hline
 -X^2 - X^3 + 2X^4 & \\
 -X^2 - 2X^3 + X^5 & \\
 \hline
 X^3 + 2X^4 - X^5 & \\
 X^3 + 2X^4 - X^6 & \\
 \hline
 -X^5 + X^6 &
 \end{array}$$

On remarquera que cette division dépend d'un ordre k qui doit être précisé avant l'opération. La division s'arrête lorsque l'on peut factoriser le reste par X^{k+1} . Finalement, le calcul s'effectue de la même façon que dans une division euclidienne, à ceci près que le degré du reste augmente au fur et à mesure des étapes.

3.1.4 Factorisation et racines

THÉORÈME 15

$a \in \mathbb{K}$ est une racine (ou un zéro) de $P \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow P$ divisible par $X - a$

DÉMO

La première équivalence est en fait la définition d'un zéro d'un polynôme

Supposons que P soit divisible par $X - a$. Alors $P(X) = (X - a)Q(X)$ et $P(a) = 0$

Réciproquement, par définition de la division euclidienne, $P = (X - a)Q + R$ avec $R = \text{cte}$

$\Rightarrow P(a) = (a - a)Q(a) + R \Rightarrow P(a) = R$. Si a est racine de P , alors $R = P(a) = 0$ et donc $X - a$ divise P .

□

Géométriquement, un polynôme possède une racine en $X = a$ si la fonction polynômiale associée possède un graphe qui coupe l'axe des abscisses en $x = a$.

On rappelle qu'un polynôme de degré n à coefficients dans \mathbb{R} a au plus n racines dans \mathbb{R} et qu'un polynôme à coefficients dans \mathbb{C} a exactement n racines dans \mathbb{C} .

Racines multiples.

Si P est divisible par $(X - a)^k$ pour une valeur de k supérieure à 1, on parle de racine multiple (sinon, on dit que a est une racine simple). Plus précisément,:

DÉFINITION 18

a est une racine (ou un zéro) de multiplicité k si P est divisible par $(X - a)^k$ mais pas par $(X - a)^{k+1}$
Autrement dit, $P(x) = (x - a)^k Q(x)$ avec $Q(a) \neq 0$

Géométriquement, cela signifie que la fonction polynômiale coupe l'axe des abscisses en un point où elle change de sens de variation et/ou elle change de convexité. Voici ci-dessous des courbes de fonctions polynômiales avec des racines simples et multiples (marquées par des points):

- Un polynôme de degré n est scindé sur \mathbb{K} s'il possède n racines (comptées avec multiplicité).

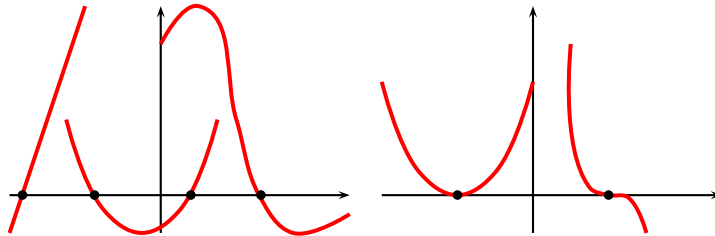


Figure 3.2: Racines simples (polynômes de degré 1, 2 et 3) et multiples (polynômes de degré 2 et 3)

En ce cas: $P(x) = k \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\alpha_i}$

- k est une constante (c'est le coef du terme de plus haut degré), les a_i sont les racines de P , chacune ayant comme multiplicité α_i (on a donc $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$).
- Un ensemble algébriquement clos est un ensemble dans lequel tout polynôme de degré n possède n racines. En ce cas, n'importe quel polynôme est scindé dans cet ensemble. \mathbb{C} est algébriquement clos, d'après le théorème de D'Alembert énoncé dans la leçon sur les complexes.

THÉORÈME 16

Soit P un polynôme de degré n
 a est racine de multiplicité k de $P \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$

DÉMO

D'après la formule de Taylor à l'ordre n (cf. leçon sur les DL), on a

$$P(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i)}(a) + (X-a)^{k+1} S$$

avec $\deg S = \deg P - k - 1$. Si l'on pose $Q = (X-a)S + \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ et

$$R = \sum_{i=0}^k \frac{(X-a)^i}{i!} P^{(i)}(a), P = (X-a)^k Q + R$$

On a alors $(X-a)^k$ divise $P \iff R = 0 \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$

□

Ex: $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2$

$P'(X) = 4X^3 - 3X^2 - 6X + 5$, $P''(X) = 12X^2 - 6X - 6$ et $P'''(X) = 24X - 6$

$P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P'''(1) \neq 0 \Rightarrow 1$ est racine triple donc $P(X) = (X-1)^3 \times Q(X)$ avec Q de degré 1.

3.2 Fractions rationnelles

3.2.1 Structure de $\mathbb{K}(X)$

DÉFINITION 19

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

L'ensemble des fractions rationnelles sur \mathbb{K} se note $\mathbb{K}(X)$

$\forall F \in \mathbb{K}(X)$, il existe un unique couple (P_0, Q_0) de polynômes premiers entre eux tels que

$F(X) = \frac{P_0(X)}{Q_0(X)}$. Il s'agit de la forme irréductible de F .

Ex: $F = \frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 2X + 1}$ a pour forme irréductible $\frac{X-2}{X-1}$

REMARQUE 3

$\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$ car tout polynôme est une fraction de dénominateur égal à 1

On dit que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$

On dit que a est un zéro de F si $P(a) = 0$ et $Q(a) \neq 0$

3.2.2 Décomposition en éléments simples

Introduction

On souhaite écrire une fraction rationnelle sous la forme d'une somme de termes les plus simples possibles, avec par exemple un seul terme au dénominateur et un numérateur de degré minimal.

Ex: $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1} = x + 3 - \frac{1}{x - 1}$

la seconde forme permet le calcul des limites, des asymptotes et est plus pratique pour l'étude de la fonction.

C'est la décomposition de f en éléments simples.

Partie entière

Soit $F(X) = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F = Q + \frac{R}{B}$ avec $\deg(R) < \deg(B)$

Q s'appelle la partie entière de F

C'est aussi le quotient dans la division euclidienne de A par B . En effet, $A = BQ + R \Rightarrow \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$

Ex: $\frac{X^2 + X + 1}{X - 2} = X + 3 + \frac{7}{X - 2}$

Ex: $\frac{X + 1}{X^3 + 2X}$ a une partie entière nulle car $\deg(X + 1) < \deg(X^3 + 2X)$

Par la suite, nous supposons donc que $\deg(A) < \deg(B)$, en n'oubliant pas que si tel n'est pas le cas, la décomposition doit commencer par son calcul.

Principe de la décomposition

On considère $F = \frac{A}{B}$ avec $\deg(A) < \deg(B)$

1. Supposons que B soit scindé, de la forme $B(X) = \lambda(X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_n)$

On dit alors que F n'a que des pôles simples.

Le théorème de décomposition assure qu'il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ telles que

$$F(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X - x_k} = \frac{\alpha_1}{X - x_1} + \frac{\alpha_2}{X - x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{X - x_n}$$

- Les x_k sont les pôles de F .
- α_k est le résidu de F relatif à x_k .
- $\frac{\alpha_k}{X - x_k}$ est la partie polaire relative au pôle x_k (on dit aussi élément simple de 1ère espèce).

Le théorème assure l'existence et l'unicité de la décomposition, mais ne donne pas de méthode pour calculer les constantes. C'est là que repose d'ailleurs toute la difficulté de la décomposition.

Ex: $F(X) = \frac{X + 1}{X^2 - 3X + 2} = \frac{X + 1}{(X - 1)(X - 2)} = \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_2}{X - 2} = \frac{-2}{X - 1} + \frac{3}{X - 2}$

On peut alors, par exemple, déterminer α_1 et α_2 par identification, en réduisant les fractions au même dénominateur.

Ex: $F(X) = \frac{X^3 + 3X - 1}{X^4 - 5X^2 + 4} = \frac{X^3 + 3X - 1}{(X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2)} = \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_2}{X + 1} + \frac{\alpha_3}{X - 2} + \frac{\alpha_4}{X + 2}$

Le calcul de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ par identification nécessite la résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues. Il existe une autre méthode plus rapide permettant le calcul du résidu d'un pôle simple (et uniquement celui d'un pôle simple !!!):

THÉORÈME 17

Si α_k est le résidu de $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$ relatif à un pôle simple x_k , alors $\alpha_k = \frac{A(x_k)}{B'(x_k)}$

Ex: $F(X) = \frac{X + 1}{X^2 - 3X + 2} = \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_2}{X - 2}$

$$\alpha_1 = \left. \frac{X+1}{2X-3} \right|_{X=1} = -2 \text{ et } \alpha_2 = \left. \frac{X+1}{2X-3} \right|_{X=2} = 3 \Rightarrow F(X) = \frac{-2}{X-1} + \frac{3}{X-2}$$

Ex: $F(X) = \frac{X^3 + 3X - 1}{X^4 - 5X^2 + 4} = \frac{\alpha_1}{X-1} + \dots + \frac{\alpha_4}{X+2}$

$$\alpha_1 = \left. \frac{X^3 + 3X - 1}{4X^3 - 10X} \right|_{X=1} = -\frac{1}{2}, \alpha_2 = \left. \frac{X^3 + 3X - 1}{4X^3 - 10X} \right|_{X=-1} = -\frac{5}{6}, \alpha_3 = \frac{13}{12} \text{ et } \alpha_4 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow F(X) = -\frac{1}{2} \frac{1}{X-1} - \frac{5}{6} \frac{1}{X+1} + \frac{13}{12} \frac{1}{X-2} + \frac{5}{4} \frac{1}{X+2}$$

2. Supposons que B soit scindé avec une unique racine de multiplicité n , ie $B(X) = \lambda(X - x_0)^n$
Alors il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ telles que

$$F(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{(X - x_0)^k} = \frac{\alpha_1}{X - x_0} + \dots + \frac{\alpha_n}{(X - x_0)^n}$$

Les α_k sont à déterminer, mais on ne peut pas utiliser le théorème précédent car il ne s'agit pas de pôles simples. Outre l'identification, on peut utiliser plusieurs astuces pour déterminer les constantes.

Ex: $\frac{X+1}{(X+2)^2} = \frac{\alpha_1}{X+2} + \frac{\alpha_2}{(X+2)^2} \quad (*)$

- Pour déterminer α_1 et α_2 , multiplions $(*)$ par X et prenons la limite de l'expression en $+\infty$:

$$XF(X) = \frac{X^2 + X}{(X+2)^2} = \frac{\alpha_1 X}{X+2} + \frac{\alpha_2 X}{(X+2)^2} \Rightarrow \lim_{X \rightarrow +\infty} XF(X) = 1 = \alpha_1 + 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

- De même, pour déterminer α_2 , multiplions $(*)$ par $(X+2)^2$ et calculons l'expression obtenue en $X = -2$:

$$(X+2)^2 F(X) = X+1 = \alpha_1(X+2) + \alpha_2 \Rightarrow -2+1 = 0 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -1$$

$$\Rightarrow F(X) = \frac{1}{X+2} - \frac{1}{(X+2)^2}$$

Lorsque n est grand, on doit déterminer n constantes et cette technique est fastidieuse; en ce cas, il est rentable d'effectuer un changement de variables en posant $Y = X - x_0$.

On peut alors déterminer tous les α_k en une seule opération:

Ex: $F(X) = \frac{X^3 + 2X - 1}{(X-1)^4}$. On pose $Y = X - 1$

$$F(X) = F(Y+1) = \frac{(Y+1)^3 + 2(Y+1) - 1}{Y^4} = \frac{Y^3 + 3Y^2 + 5Y + 2}{Y^4} = \frac{1}{Y} + \frac{3}{Y^2} + \frac{5}{Y^3} + \frac{2}{Y^4}$$

$$F(X) = \frac{1}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{5}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^4}$$

3. Supposons que B soit irréductible de degré 2, ie $B(X) = aX^2 + bX + c$ avec $\Delta < 0$

Alors $\exists \alpha$ et β / $F(X) = \frac{\alpha X + \beta}{B(X)}$ appelé élément simple de seconde espèce.

Si $B(X)$ est de la forme $(aX^2 + bX + c)^n$ alors $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ telles que:

$$F(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k X + \beta_k}{(aX^2 + bX + c)^k} = \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{aX^2 + bX + c} + \dots + \frac{\alpha_n X + \beta_n}{(aX^2 + bX + c)^n}$$

Ex: $F(X) = \frac{X^3 + X + 1}{(X^2 + 1)^2} = \frac{\alpha_1 X + \beta_1}{X^2 + 1} + \frac{\alpha_2 X + \beta_2}{(X^2 + 1)^2} \quad (**)$

- Pour déterminer α_2 et β_2 on peut multiplier l'expression $(**)$ par $(X^2 + 1)^2$ puis calculer sa valeur en $X = i$:

$$\Rightarrow (X^2 + 1)^2 F(X) = X^3 + X + 1 = (\alpha_1 X + \beta_1)(X^2 + 1) + \alpha_2 X + \beta_2$$

$$\Rightarrow i^3 + i + 1 = 0 + \alpha_2 i + \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \text{ et } \beta_2 = 1$$

- Multiplions $(**)$ par X et prenons la limite en $+\infty$:

$$XF(X) = \frac{X^4 + X^2 + X}{(X^2 + 1)^2} = \frac{\alpha_1 X^2 + \beta_1 X}{X^2 + 1} + \frac{\alpha_2 X^2 + \beta_2 X}{(X^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} XF(X) = 1 = \alpha_1 + 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

- Prenons enfin $X = 0 \Rightarrow F(0) = 1 = \beta_1 + \beta_2 \Rightarrow \beta_1 = 0$

Ainsi, $F(X) = \frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{(X^2+1)^2}$

On aurait pu aussi constater que $\frac{X^3+X+1}{(X^2+1)^2} = \frac{X(X^2+1)+1}{(X^2+1)^2} = \frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{(X^2+1)^2}$

4. Cas général: si $B(X)$ est quelconque

On applique à chacune des parties polaires la technique correspondante.

Ex: $B(X) = (X-1)(X-2)^4(X^2+1)^2 \Rightarrow$

$$F(X) = \underbrace{\frac{\alpha_1}{X-1}}_{\text{partie polaire de } X-1} + \underbrace{\frac{\alpha_2}{X-2} + \frac{\alpha_3}{(X-2)^2} + \frac{\alpha_4}{(X-2)^3} + \frac{\alpha_5}{(X-2)^4}}_{\text{partie polaire relative à } (X-2)^4} + \underbrace{\frac{\alpha_6 X + \alpha_7}{X^2+1} + \frac{\alpha_8 X + \alpha_9}{(X^2+1)^2}}_{\text{partie polaire relative à } (X^2+1)^2}$$

α_1 se calcule par la formule du résidu d'un pôle simple.

$\alpha_6, \dots, \alpha_9$ se calcule en \times par $(X^2+1)^2$ ou par une méthode équivalente.

$\alpha_2, \dots, \alpha_5$ se calcule par changement de variables $Y = X - 2$

Remarque relative à la technique du changement de variable

Lorsque $B(X)$ possède une racine x_0 d'ordre k parmi d'autres facteurs, on a $B(X) = (X - x_0)^k T(X)$

Où $T(X)$ est un polynôme dont x_0 n'est pas racine.

La partie polaire relative au pôle x_0 se détermine, comme on l'a vu en 2, en posant $Y = X - x_0$. Mais comme il existe d'autres racines que x_0 , il va être nécessaire d'effectuer une division suivant les puissances croissantes:

$$F(X) = F(Y + x_0) = \frac{A(Y + x_0)}{Y^k T(Y + x_0)} \text{ que l'on peut écrire sous la forme } \frac{A_0(Y)}{Y^k B_0(Y)}$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de A_0 par B_0 à l'ordre $k-1$:

$$A_0(Y) = B_0(Y)Q(Y) + Y^k S(Y) \Rightarrow \frac{A_0(Y)}{B_0(Y)} = Q(Y) + Y^k \frac{S(Y)}{B_0(Y)}$$

Par définition de la division, Q est de degré $\leq k-1$ et s'écrit donc sous la forme $Q(Y) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i Y^i$

$$\Rightarrow F(X) = \frac{1}{Y^k} \sum_{i=0}^{k-1} a_i Y^i + \frac{S(Y)}{B_0(Y)} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{Y^{k-i}} + \frac{S(Y)}{B_0(Y)}$$

$$\Rightarrow F(X) = \underbrace{\frac{a_0}{(X-x_0)^k} + \frac{a_1}{(X-x_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{X-x_0}}_{\text{partie polaire relative à } X-x_0} + \underbrace{\frac{S(X-x_0)}{B(X-x_0)}}_{\text{reste de la fraction}}$$

La dernière fraction ne sert à rien pour le calcul de a_0, \dots, a_{k-1} .

Ex: $F(X) = \frac{X+1}{(X-1)(X-2)^3}$

Cette fraction ne possède pas de partie entière (le numérateur est de degré 1 et le dénominateur de degré 4). Son dénominateur $B(X)$ est factorisé et l'on voit que l'on a un pôle simple et un pôle de multiplicité 3. La forme de la décomposition sera donc:

$$\frac{X+1}{(X-1)(X-2)^3} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta_1}{X-2} + \frac{\beta_2}{(X-2)^2} + \frac{\beta_3}{(X-2)^3} \quad (*)$$

Nous allons décomposer cette fraction de deux façons différentes.

1ère méthode:

Le calcul de α se fait par la formule de résidu (car c'est un pôle simple). On a facilement

$$\alpha = \left. \frac{X+1}{(X-2)^3} \right|_{X=1} = -2$$

Le calcul des β_i ne peut pas se faire par la même méthode. Nous allons donc combiner plusieurs astuces. Multiplions les deux membres de la relation (*) précédente par X et faisant tendre X vers l'infini: On a alors $0 = \alpha + \beta_1$ et l'on en déduit donc que $\beta_1 = 2$. De la même façon, multiplions les deux membres par $(X-2)^3$ puis posons $X = 2$ dans la relation obtenue; il vient alors $\beta_3 = 3$. Enfin, posons $X = 0$ (par exemple) dans (*). On obtient $\beta_2 = -2$. Ainsi,

$$F(X) = \frac{3}{(X-2)^3} - \frac{2}{(X-2)^2} + \frac{2}{X-2} - \frac{2}{X-1}$$

2nde méthode:

La présence d'un pôle de multiplicité 3 nous incite à effectuer un changement de variables. Posons $Y = X - 2$. La fraction peut alors s'écrire sous la forme $F(Y + 2) = \frac{Y + 3}{(Y + 1)Y^3}$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $Y + 3$ par $Y + 1$ à l'ordre 2 (afin de faire apparaître Y^3 en facteur du reste). Cette division donne le résultat suivant:
 $Y + 3 = (Y + 1)(3 - 2Y + 2Y^2) - 2Y^3$

Reconstituons alors la fraction: $\frac{Y + 3}{Y + 1} = 3 - 2Y + 2Y^2 - \frac{2Y^3}{Y + 1}$

$$\Rightarrow F(Y + 2) = \frac{Y + 3}{(Y + 1)Y^3} = \frac{3}{Y^3} - \frac{2}{Y^2} + \frac{2}{Y} - \frac{2}{Y + 1}$$

Il suffit alors de remplacer Y par son expression en fonction de X pour retrouver la décomposition précédente. Nous avons donc déterminé ainsi les cinq constantes en une seule division et un changement de variables.

Ex: $F(X) = \frac{16(X^2 - X + 2)}{(X + 1)^3(X - 1)^4}$

$$F(X) = \frac{\alpha_1}{X + 1} + \frac{\alpha_2}{(X + 1)^2} + \frac{\alpha_3}{(X + 1)^3} + \frac{\beta_1}{X - 1} + \frac{\beta_2}{(X - 1)^2} + \frac{\beta_3}{(X - 1)^3} + \frac{\beta_4}{(X - 1)^4}$$

- Pour calculer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, posons $Y = X + 1$

$$\Rightarrow F(X) = \frac{16((Y - 1)^2 - (Y - 1) + 2)}{Y^3(Y - 2)^4} = \frac{1}{Y^3} \frac{16(Y^2 - 3Y + 4)}{(Y - 2)^4}$$

Nous devons effectuer la division suivant les puissances croissantes de $16(Y^2 - 3Y + 4)$ par $(Y - 2)^4$ à l'ordre 2:

$4 \times 16 - 3 \times 16Y + 16Y^2$	$16 - 4 \times 8Y + 6 \times 4Y^2 - 4 \times 2Y^3 + Y^4$
$4 \times 16 - 16 \times 8Y + 6 \times 16Y^2 - 16 \times 2Y^3 + 4Y^4$	$4 + 5Y + 5Y^2$
$5 \times 16Y - 16 \times 5Y^2 + \text{etc...}$	
$5 \times 16Y - 10 \times 16Y^2 + \text{etc..}$	
$5 \times 16Y^2 + \text{etc...}$	
$5 \times 16Y^2 + \text{etc...}$	
reste de degré ≥ 3	

Ainsi, $\frac{16(Y^2 - 3Y + 4)}{(Y - 2)^4} = 5Y^2 + 5Y + 4 + Y^3S(Y) \Rightarrow F(X) = \frac{5}{Y} + \frac{5}{Y^2} + \frac{4}{Y^3} + S(Y)$

La partie polaire relative à $(X + 1)^3$ est donc $\frac{5}{X + 1} + \frac{5}{(X + 1)^2} + \frac{4}{(X + 1)^3}$

- De la même façon, pour calculer $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, posons $Y = X - 1$

$$\Rightarrow F(X) = \frac{16((Y + 1)^2 - (Y + 1) + 2)}{Y^4(Y + 2)^3} = \frac{1}{Y^4} \frac{16(Y^2 + Y + 2)}{(Y + 2)^3}$$

La division à l'ordre 3 donne

$$F(X) = \frac{1}{Y^4}(-5Y^3 + 5Y^2 - 4Y + 4 + Y^4S(Y)) = \frac{4}{Y^4} - \frac{4}{Y^3} + \frac{5}{Y^2} - \frac{5}{Y} + S(Y)$$

La partie polaire relative à $(X - 1)^4$ est donc $\frac{-5}{X - 1} + \frac{5}{(X - 1)^2} - \frac{4}{(X - 1)^3} + \frac{4}{(X - 1)^4}$

$$\Rightarrow F(X) = \frac{-5}{X - 1} + \frac{5}{(X - 1)^2} - \frac{4}{(X - 1)^3} + \frac{4}{(X - 1)^4} + \frac{5}{X + 1} + \frac{5}{(X + 1)^2} + \frac{4}{(X + 1)^3}$$

Pratique de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$

\mathbb{C} étant algébriquement clos, tout polynôme y est scindé et une décomposition en éléments simples ne contient alors aucun élément simple de seconde espèce. On peut donc commencer par décomposer une fraction (même à coefs réels) dans \mathbb{C} , puis pour obtenir sa décomposition dans \mathbb{R} regrouper les termes conjugués:

Ex: $F(X) = \frac{1}{X^4 - 1} = \frac{A}{X - 1} + \frac{B}{X + 1} + \frac{C}{X - i} + \frac{D}{X + i}$

Tous les pôles sont simples, donc $A = \frac{1}{4X^3} \Big|_{X=1} = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4X^3} \Big|_{X=-1} = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4X^3} \Big|_{X=i} = -\frac{1}{4i}$
 $\Rightarrow F(X) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{i}{X-i} - \frac{i}{X+i} \right)$ qui est la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.
 Pour obtenir la décomposition dans \mathbb{R} , on regroupe les deux derniers termes.
 $\Rightarrow F(X) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{2}{X^2+1} \right)$

Exemple

$$F(X) = \frac{7X^3 + 2X^2 + 15X + 6}{(X^2 + X - 2)(X^2 + 4)}$$

On peut commencer par deux constatations: $\deg(P) < \deg(Q)$ et il n'y aura donc pas de partie entière.
 $X^2 + 4$ n'a pas de racines réelles, tandis que $X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$.

1ère méthode:

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+2} + \frac{CX+D}{X^2+4} \text{ avec } A = \frac{P(1)}{Q'(1)} = 2, B = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} XF(X) = 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2X}{X-1} + \frac{3X}{X+2} + \frac{CX+D}{X^2+4} \right) = 2 + 3 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Enfin, } F(0) = -\frac{3}{4} = -2 + \frac{3}{2} + \frac{D}{4} \Rightarrow D = -1 \text{ et donc } F(X) = \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+2} + \frac{2X-1}{X^2+4}$$

2nde méthode:

$$(X-1)F(X) = A + (X-1)\left(\frac{B}{X+2} + \frac{CX+D}{X^2+4}\right). \text{ En } X=1 \Rightarrow A=2$$

$$(X+2)F(X) = B + (X+2)(\dots). \text{ En } X=-2 \Rightarrow B=3$$

$$(X^2+4)F(X) = CX+D + (X^2+4)(\dots). \text{ En } X=2i \Rightarrow C=2, D=-1$$

On obtient le même résultat.

3ème méthode:

On réduit la somme de fractions au même dénominateur, puis on identifie les coefficients du numérateur.

3.3 Applications aux télécommunications.

3.3.1 Codes correcteurs d'erreurs.

3.3.2 Registres linéaires et cryptographie.

Un médecin, un juriste
 et un mathématicien discutent des
 femmes. Le juriste: Il vaut mieux avoir une
 maîtresse. En cas de divorce, une épouse
 coûte cher. Le médecin: Il vaut mieux avoir
 une femme car elle réduit le stress et c'est
 bon pour la santé. Le mathématicien:
 L'idéal est d'avoir les deux. Quand
 votre femme vous croît chez votre
 maîtresse et votre maîtresse chez
 votre femme, vous pouvez
 faire des maths tranquille-
 quement.



Chapitre 4

Etude des fonctions numériques

Historique

L'idée de fonction remonte à l'antiquité où elles apparaissent sous la forme de tables de conversions, d'élévations au carré ou d'extractions de racines carrées (notamment chez les babyloniens). L'étude des mouvements et des trajectoires va conduire Kepler au XVII^{ème} siècle à considérer des lois de variations qui varient continument en fonction de paramètres comme le temps ou la position. Le terme de fonction apparait la première fois chez Leibniz en 1673; Newton (1642-1727), avait introduit auparavant le terme de "fluxion", à 23 ans, alors qu'il était élève de Barrow (1630-1677).

Les fonctions puissances étaient connues depuis l'antiquité; les fonctions trigonométriques étaient étudiées par les mathématiciens arabes au IX^{ème} siècle. Le logarithme de Neper (1550-1617) a été la première fonction transcendante à être introduite (en 1614 et 1619). C'est un horloger suisse appelé Bürgi (1552-1632), assistant de Tycho Brahé (1546-1601) et Johannes Kepler (1571-1630), qui inventa les logarithmes. Kepler invita Bürgi à publier ses résultats mais entre temps, Neper (dont le nom véritable était John Napier, Baron de Merchiston) avait lui-même découvert la fonction logarithme et publié en 1614 un traité sur cette fonction. Les tables des logarithmes en base 10 ont été publiées par Briggs (1561-1631) qui travailla avec l'aide de Neper. Euler, en 1749, généralise les logarithmes aux complexes en créant ainsi des fonctions multiformes. C'est encore Euler qui va publier le premier traité sur les fonctions dans lequel il les définit comme "une expression analytique" dépendant d'une quantité variable.

Les notions de continuité et dérivabilité viendront plus tard, au XIX^{ème} siècle, avec les contributions de Fourier, Cauchy, Weierstrass. Dans son cours d'analyse de 1821 à l'école Polytechnique, Cauchy définit la notion de fonction continue et dérivable, mais les liens entre ces deux notions restent obscurs. Dirichlet (1805-1859), dans ses études sur les séries de Fourier, précise le lien entre continuité et dérivabilité. Weierstrass donne l'exemple d'une fonction continue partout et dérivable nulle part.

4.1 Continuité

4.1.1 rappels des définitions

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie sur un intervalle I contenant x_0 .

DÉFINITION 20

$$\| f \text{ continue en } x_0 \iff \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Autrement dit, une fonction est continue en x_0 si elle possède une limite en ce point égale à $f(x_0)$. La continuité en un point implique donc que la fonction possède une limite en ce point.

PROPRIÉTÉ 20

$$\| f \text{ continue en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ \iff \forall (x_n)_{n \geq 0} / \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Ex:

- Les polynômes sont des fonctions continues sur \mathbb{R} .

- \sin , \cos , \ln , e^x sont des fonctions continues sur \mathbb{R} .
- La fonction f définie par $f(x) = e^x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0.
- La fonction g définie par $g(x) = -\sin(x)$ si $x < 0$ et $g(x) = e^x$ si $x \geq 0$ n'est pas continue en 0.
- $E(x)$, partie entière de x , n'est pas continue en k , $\forall k \in \mathbb{Z}$ (cf fig 4.2)

La continuité en un point implique donc que la fonction possède une limite en ce point. Alors qu'une fonction quelconque peut avoir une limite en un point sans être définie en ce point, une fonction continue en un point doit être définie en ce point.

On notera $C^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} et $C^0(I)$ celui des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dira qu'une fonction continue est "de classe" C^0 .

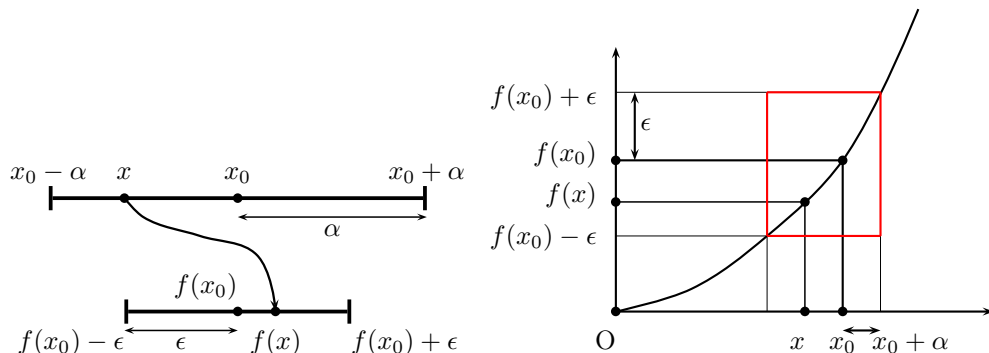


Figure 4.1: f continue en $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

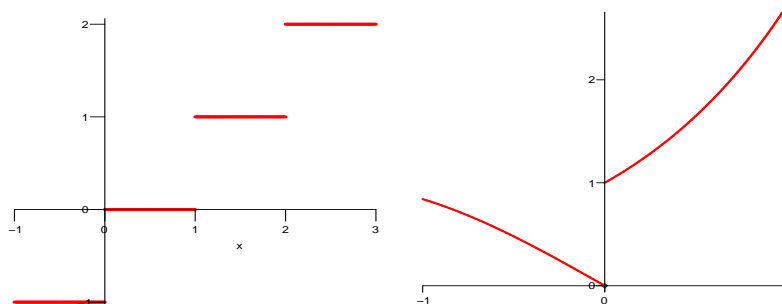


Figure 4.2: Exemples de fonctions non continues: $g(x)$, $E(x)$

Lorsqu'une fonction f possède une limite l en x_0 mais n'est pas définie en ce point, il est possible de définir une nouvelle fonction g continue en x_0 en posant $f(x) = g(x) \forall x \neq x_0$ et $g(x_0) = l$. On dit alors que l'on a prolongé f par continuité en x_0 .

Ex: La fonction sinus cardinal $sc(x) = \frac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 mais on a $\lim_{x \rightarrow 0} sc(x) = 1$. On peut donc prolonger par continuité le sinus cardinal en 0 en posant $sc(0) = 1$.

A l'instar de la notion de limite, on peut également définir la notion de continuité à droite et continuité à gauche en un point. Il suffit de remplacer x_0 par x_0^+ ou x_0^- dans la définition.

4.1.2 Opérations sur les fonctions continues

La continuité possède les mêmes propriétés que la notion de limite. Ainsi, les opérations usuelles respectent la continuité (les démonstrations se font en utilisant la définition de la continuité à l'aide des limites):

Si f et g sont continues au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + g$, λf , $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ($g(x_0) \neq 0$) sont continues en x_0 .

PROPRIÉTÉ 21 (FONCTIONS COMPOSÉES ET CONTINUITÉ)

|| Soit f continue en x_0 et g continue en $y_0 = f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0

Ex: e^x et x^2 sont continues sur \mathbb{R} donc e^{x^2} est également continue sur \mathbb{R} .

4.1.3 Propriétés

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Les propriétés suivantes dépendent de cette hypothèse de façon fondamentale. Si f est continue sur I , alors $f(I)$ est aussi un intervalle. De plus, si I est fermé borné, $f(I)$ l'est aussi. La démonstration de ce résultat utilise la propriété des bornes supérieures dans \mathbb{R} et dépasse le cadre du cours.

Ex: La fonction $f(x) = 1 - x^2$ est continue sur $[-1, 1]$ (et même sur \mathbb{R}). Alors l'image de $[-1, 1]$ est un intervalle fermé borné; on voit facilement qu'il s'agit de l'intervalle $f([-1, 1]) = [0, 1]$.

Par contre, si l'intervalle I n'est pas fermé, il se peut que $f(I)$ le soit; la seule chose dont on est assuré est que $f(I)$ sera un intervalle.

En fait, si l'on note $M = \sup_{x \in I} f(x)$ et $m = \inf_{x \in I} f(x)$, alors $f(I)$ est de la forme $]m, M[$, $[m, M[$, $]m, M]$ ou bien $[m, M]$.

Si I est fermé borné, alors $f(I) = [m, M]$ et f atteint ses bornes.

Ex: $f(x) = \sin x$ est continue sur $] - \pi, \pi[$ et l'on a $f(] - \pi, \pi[) = [-1, 1]$ qui est fermé borné.

Ex: $f(x) = x^2$ est continue sur $] - 1, 1[$ et $f(] - 1, 1[) = [0, 1[$

THÉORÈME 18 (THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES)

Soit f une fonction continue d'un intervalle $I = [x_0, x_1]$ dans $J = f(I) = [y_0, y_1]$
 Alors $\forall y \in [y_0, y_1], \exists x \in [x_0, x_1] / f(x) = y$

DÉMO

Ce théorème est également admis

□

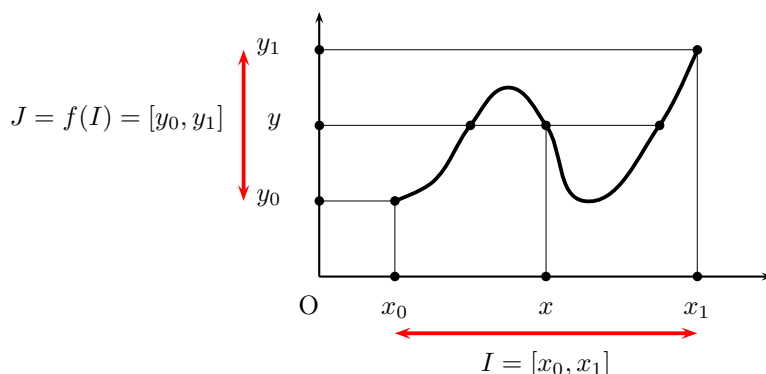


Figure 4.3: Illustration du théorème des valeurs intermédiaires

En particulier si $y = 0$, le théorème nous dit que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution x .

Ex: la fonction sinus est continue sur $[0, \pi]$, $\cos 0 = 1 > 0$ et $\cos \pi = -1 < 0$, donc $\exists x \in [0, \pi] / \cos x = 0$ (on se doute assez vite qu'il s'agit de $\pi/2$...).

Ex: Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle. Pourquoi ?

Autre conséquence du théorème: Si f est continue sur un intervalle I et si elle ne prend pas la valeur 0, alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

4.1.4 Fonctions réciproques

On rappelle qu'une bijection est une fonction $f : I \longrightarrow J$ entre deux ensembles I et J telle que:

- Pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in J$ tel que $y = f(x)$ (c'est l'image de x par f).
- Pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$ (c'est l'antécédent de y par f).

On se reportera à l'annexe sur les structures algébriques pour revoir les définitions de relation, fonction, application, injection, surjection et bijection. On s'intéresse dans la suite de ce paragraphe à la seule notion de bijection dans le cadre d'une fonction continue.

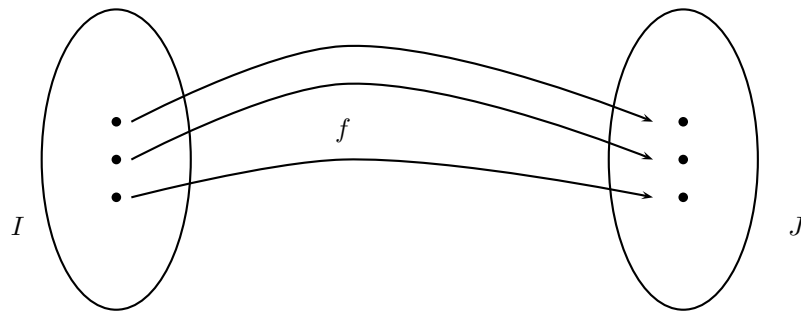


Figure 4.4: Bijection f d'un ensemble I sur un ensemble J

Rappelons qu'une fonction est croissante sur un intervalle I si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Une fonction est décroissante sur I si $\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Autrement dit, une fonction croissante respecte la relation d'ordre et une fonction décroissante l'inverse. Une fonction monotone sur un intervalle est une fonction qui est ou bien croissante ou bien décroissante sur cet intervalle.

Soit f continue sur un intervalle. Alors f injective $\iff f$ strictement monotone.

Nous admettons également le fait que pour qu'une fonction monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ soit continue, il suffit que $f(I)$ soit un intervalle. Nous voulons maintenant trouver une condition suffisante pour qu'une fonction continue soit une bijection.

PROPRIÉTÉ 22

Une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est bijective de I sur $f(I)$
 $\forall y \in f(I), \exists ! x \in I / f(x) = y$

DÉFINITION 21

Soit $f : I \rightarrow J = f(I)$ une fonction continue strictement monotone
On appelle réciproque de f notée f^{-1} la fonction $f^{-1} : J \rightarrow I / y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

$$\text{Ex: } \begin{array}{ccc} f :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ y & \longmapsto & e^y \end{array}$$

En effet, la fonction $\ln x$ est définie de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} . En terminale, elle est définie comme étant la primitive de $1/x$ qui s'annule en 1. Elle est continue et strictement croissante et admet donc une réciproque définie de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$: C'est la fonction $\exp x$

$$\text{Ex: } \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array} \quad \text{En effet, } y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$

$$\text{Ex: } \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y - 1 \end{array} \quad \text{En effet, } y = x + 1 \iff x = y - 1$$

$$\text{Ex: } \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ y & \longmapsto & \frac{1}{y} \end{array}$$

Pour commencer, \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle mais la réunion de deux intervalles: $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Pour appliquer les résultats précédents, il faut raisonner sur chacun des deux intervalles. On voit facilement que f est bijective sur ces deux intervalles et que $f(] - \infty, 0[) =] - \infty, 0[$, puis que $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$. Finalement $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$.

Une fonction égale à sa réciproque est une involution.

$$\text{Ex: } \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow &]0, 1] \\ x & \longmapsto & e^{-x^2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} f^{-1} :]0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & x = \sqrt{\ln(1/y)} \end{array}$$

La fonction $\exp(-x^2)$ est une courbe en cloche (c'est une fonction gaussienne que nous utiliserons plus tard en probabilités). Son étude montre qu'elle est croissante sur $] - \infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$. Elle atteint en 0 un maximum absolu de 1 et tend vers 0 en $\pm\infty$. Ainsi, elle ne peut être bijective que sur $] - \infty, 0]$ ou sur $[0, +\infty[$. Choisissons ce second intervalle pour définir sa réciproque et l'on a $f([0, +\infty[) =]0, 1[$.

Pour déterminer $f^{-1}(y)$, on pose $y = e^{-x^2} \iff \ln y = -x^2 \iff x = \sqrt{\ln(1/y)}$

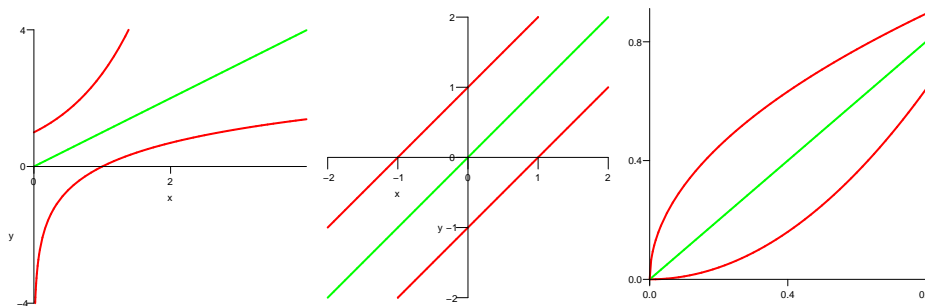


Figure 4.5: \exp et \ln - $x + 1$ et $x - 1$ - x^2 et \sqrt{x}

PROPRIÉTÉ 23

f étant toujours définie et bijective sur un intervalle I , on a :

- La courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $\Delta : y = x$
- f^{-1} a la même monotonie que f
- $f \circ f^{-1} = Id$
- f^{-1} est bijective, continue et strictement monotone

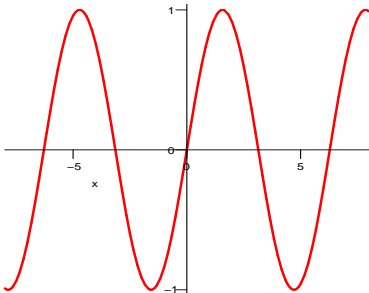
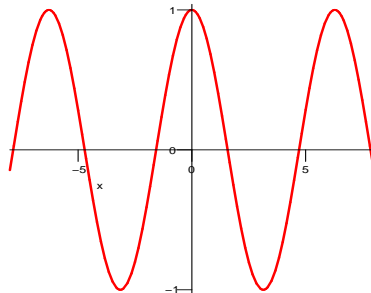
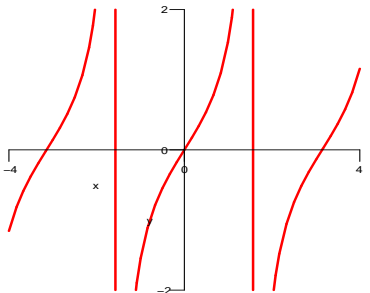
DÉMO

- $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ de sorte que le rôle de x et y est inversé.
- Nous voulons démontrer que si $y < y'$ alors $x < x'$. Supposons donc que $y < y'$ et $x > x'$. Puisque $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ alors nous avons à la fois $f(x) < f(x')$ et $x > x'$, ce qui est impossible car f est croissante.
- C'est évident par définition !! $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$; ainsi, $x = f \circ f^{-1}(x)$ pour tout x .
- f^{-1} est clairement bijective. La continuité se démontre à l'aide des suites: soit $(y_n)_n$ une suite convergente vers y . Posons $x_n = f^{-1}(y_n)$ pour tout n et $x = f^{-1}(y)$; ces nombres existent car f est supposée bijective. Alors $y_n = f(x_n)$ converge vers $y = f(x)$ par continuité de f . Donc, f^{-1} est continue.

□

4.1.5 Fonctions trigonométriques et réciproques

Rappelons rapidement les propriétés des quatre fonctions trigonométriques usuelles:

Sinus	Cosinus	Tangente																						
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ 2π périodique impaire $\sin' x = \cos x$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ 2π périodique paire $\cos' x = -\sin x$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ π périodique impaire $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$																						
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>π</td></tr><tr><td>$\sin x$</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\sin x$	0	1	0	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>π</td><td>2π</td></tr><tr><td>$\cos x$</td><td>1</td><td>-1</td><td>1</td></tr></table>	x	0	π	2π	$\cos x$	1	-1	1	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr><tr><td>$\tan x$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\tan x$	0	$+\infty$
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π																					
$\sin x$	0	1	0																					
x	0	π	2π																					
$\cos x$	1	-1	1																					
x	0	$\frac{\pi}{2}$																						
$\tan x$	0	$+\infty$																						
																								

Terminons par **cotangente**: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ $\cot' x = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

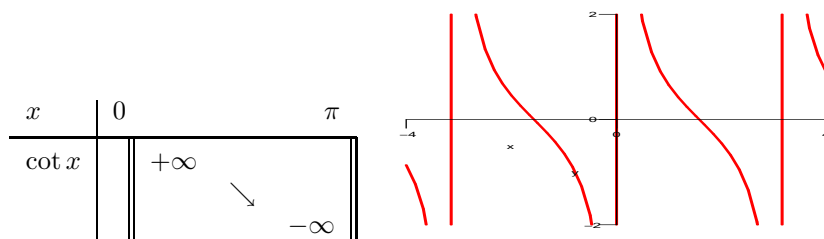


Figure 4.6: cotangente

Les réciproques des trois premières fonctions sont arcsinus, arccosinus, arctangente.

Puisque ces fonctions ne sont pas bijectives sur leur domaine de définition, il faut choisir un intervalle sur lequel la fonction est monotone. On pose donc:

DÉFINITION 22

- $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $x \longmapsto y = \arcsin(x) \iff x = \sin y$
- $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$
 $x \longmapsto y = \arccos(x) \iff x = \cos y$
- $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $x \longmapsto y = \arctan(x) \iff x = \tan y$

Ex: $\arcsin(0) = 0$ car $\sin 0 = 0$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ car $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

Les tableaux de variations ci-dessous découlent de ceux des fonctions initiales qui ont même monotonie et de la définition d'une réciproque:

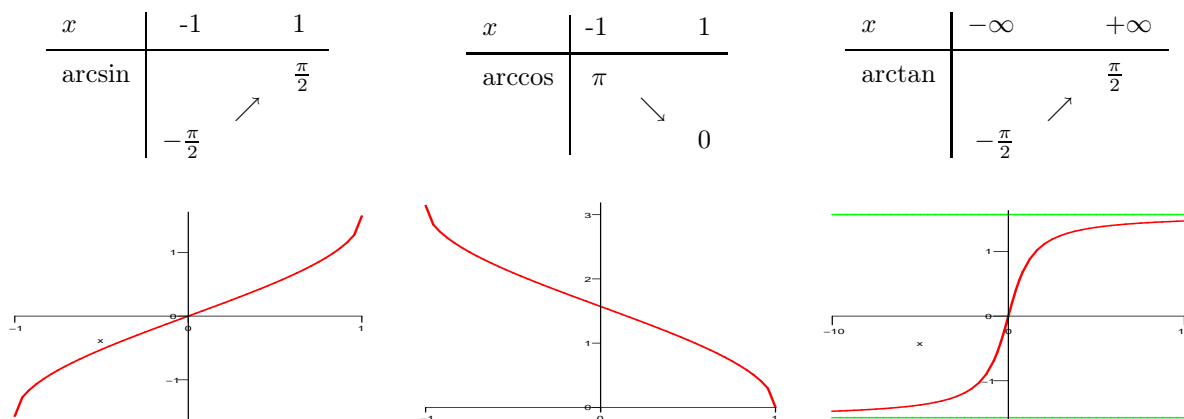


Figure 4.7: arcsin, arccos et arctan

4.2 Dérivabilité

4.2.1 Rappels et compléments

DÉFINITION 23

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
- Sous réserve d'existence, on pose $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Lorsque cette limite existe, $f'(x_0)$ est le nombre dérivé de f en x_0 . C'est aussi le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en x_0 .

L'équation de cette tangente dans un repère orthonormé du plan est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

On parle de dérivée à droite et à gauche (ou de demi-dérivée) en remplaçant la notion de limite par celle de limite à droite et gauche dans la définition.

On peut démontrer que f dérivable en $x_0 \iff \exists \epsilon(x)$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$

Cette formule s'appelle un développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de x_0 (nous verrons cela dans une leçon ultérieure). La formule permet également de retrouver le résultat de la définition de $f'(x_0)$ ci-dessus et permet également de démontrer le résultat ci-dessous:

f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en $x_0 \Rightarrow f$ définie en x_0

Interprétation géométrique de la dérivée

Considérons un point $M(x, f(x))$ de la courbe représentative de f et le point $M_0(x_0, f(x_0))$ où nous cherchons à dériver f . La droite (MM_0) a un coefficient directeur égal à

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lorsque x tend vers x_0 sur l'axe des abscisses, le point M se rapproche du point M_0 sur la courbe, et la droite (MM_0) tend vers une position limite qui est la tangente Δ à la courbe en M_0 .

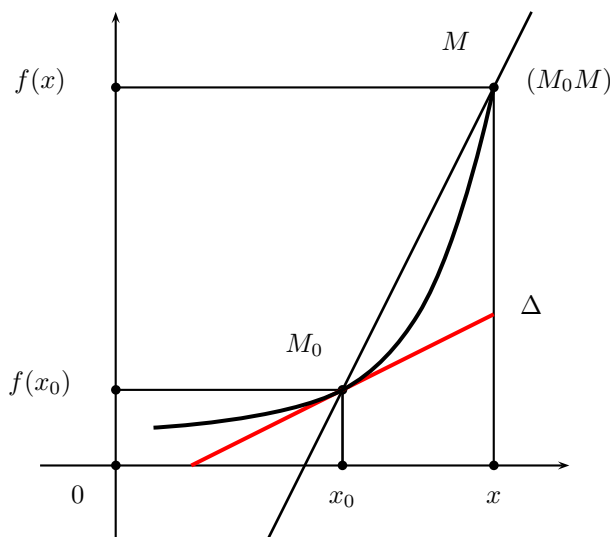


Figure 4.8: Tangente à une courbe en un point M_0 .

Enfin, on appelle fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur un intervalle I , la fonction $x \mapsto f'(x)$.

Exemples:

- \sin , \cos , \tan , \exp , \ln sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- les polynômes et fractions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- \sqrt{x} est définie sur $[0, +\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
On dit en ce cas que la courbe possède en 0 une demi-tangente verticale.
- $|x|$ est dérivable sur \mathbb{R} sauf en $x = 0$ car $f'(x) = -1$ si $x < 0$ et $f'(x) = 1$ si $x > 0$

Comme pour la notion de continuité, les opérations usuelles respectent la dérivabilité: Si f et g sont dérivables en x_0 alors $f + g$, λf , $1/f$ le sont aussi ($\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x_0) \neq 0$). En outre, la dérivation est une opération linéaire.

PROPRIÉTÉ 24

$$\begin{array}{lll} \bullet (f+g)' = f' + g' & \bullet (\lambda \times f)' = \lambda \times f' & \bullet (fg)' = f'g + g'f \\ \bullet \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} & \bullet \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} & \bullet (f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) \end{array}$$

DÉMO

Il suffit d'appliquer la définition.

En ce qui concerne la dérivée d'une fonction composée, précisons néanmoins les points suivants:

Si g est dérivable en x_0 et si f est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors $f \circ g$ est dérivable en x_0 et la dérivée est donnée par la formule ci-dessus.

□

Ex: $\sin(x^2)' = 2x \cos(x^2)$

Ex: $(\ln(1+e^x))' = \frac{e^x}{1+e^x}$

Ex: $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2} \frac{1}{x\sqrt{x}}$

PROPRIÉTÉ 25 (DÉRIVÉE D'UNE RÉCIPROQUE)

$$\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ est bijective et dérivable en } x_0 \text{ et si } f'(x_0) \neq 0 \text{ alors:} \\ f^{-1} \text{ est dérivable en } y_0 = f(x_0) \text{ et } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \end{array}$$

DÉMO

Notons $h(y) = f^{-1}(y)$. Pour $y \neq y_0$, on a $\frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$

Puisque f est injective, $\phi(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ est définie si $x \neq x_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \frac{1}{f'(x_0)}$

h est continue et d'après le théorème des applications composées $\lim_{y \rightarrow y_0} \phi(h(y)) = \frac{1}{f'(f(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$

□

Exemples: Dérivées des fonctions trigonométriques inverses.

$x = \arcsin(y) \iff y = \sin x$; Posons $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ et $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$

$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \Rightarrow \boxed{\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}$

On aura de même $\boxed{\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}$ et $\boxed{\arctan' y = \frac{1}{1 + y^2}}$

4.2.2 Théorème de Rolle et des accroissements finis - Applications

Soit f une fonction dérivable en un point x_0 d'un intervalle I .

Si f admet un extremum relatif en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

En effet, la rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ change de signe pour $x < x_0$ ou $x > x_0$.

Il en est de même avec la limite qui doit être à la fois positive et négative en x_0 .

Elle y est donc nulle.

THÉORÈME 19 (DE ROLLE)

$$\begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ une fonction continue sur } [a, b] \text{ et dérivable sur }]a, b[\\ \text{Si } f(a) = f(b) \text{ alors il existe } c \in]a, b[\text{ / } f'(c) = 0 \end{array}$$

DÉMO

f est continue sur $[a, b]$ et atteint donc ses bornes. Elle a donc un minimum et un maximum absolus qui sont égaux.

En ce cas, ou bien f est constante auquel cas sa dérivée est nulle, ou bien l'un des deux extremum est distinct de $f(a)$ et $f(b)$. Notons c son antécédent par f . On a alors $f'(c) = 0$

□

Le cas particulier où l'on a $f(a) = f(b) = 0$ montre que si f est dérivable sur un intervalle I et admet n zéros dans cet intervalle, alors sa dérivée admet $n - 1$ zéros sur I qui séparent les zéros de f .

Le théorème de Rolle permet de démontrer la règle de l'Hospital que nous avons admise dans le chapitre sur les limites, le théorème des accroissements finis et prouve le lien entre signe de la dérivée et croissance d'une fonction.

THÉORÈME 20 (FORMULE DS ACCROISSEMENTS FINIS)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
 Alors il existe $c \in]a, b[$ / $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

DÉMO

C'est une conséquence du théorème de Rolle appliqué à la fonction $g(x) = f(x) - x \times \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

□

Interprétation géométrique:

Il existe un point de la courbe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) avec $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$

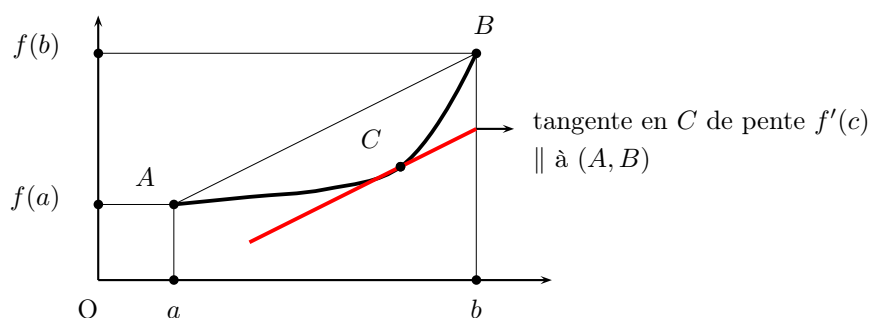


Figure 4.9: Théorème des accroissements finis

PROPRIÉTÉ 26 (APPLICATION AU SENS DE VARIATION)

Soit f une fonction dérivable dans un intervalle I

- f croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0 \forall x \in I$
- f décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0 \forall x \in I$
- f constante sur $I \iff f'(x) = 0 \forall x \in I$
- Si f' s'annule et change de signe en x , alors x est un extremum local.

DÉMO

D'après la définition de la dérivabilité, les conditions sont nécessaires. Soit x et y deux points de I

En appliquant l'égalité des accroissements finis sur $[x, y]$, on peut trouver $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Le signe de f' indique alors si f conserve ou permute le sens des inégalités.

□

Ex: $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ qui est positive sur $] - \infty, 0]$ et négative sur $[0, +\infty[$

f est donc décroissante sur $]0, +\infty[$ et croissante sur $] - \infty, 0[$

4.2.3 Dérivée seconde et applications

DÉFINITION 24

Soit f une fonction dérivable en x_0 dont la dérivée f' est dérivable en x_0 .
 On pose $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ appelée dérivée seconde de f en x_0 .

On généralise à $f^{(n)}(x_0) = \overbrace{f'' \cdots f''}^{n \times} (x_0)$ avec $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Ex: $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'''(x) = (2xe^{x^2})'' = (2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2})' = 4x(3 + 2x^2)e^{-x^2}$

THÉORÈME 21 (FORMULE DE LEIBNIZ)

Soient u et v deux fonction n fois dérivables en x :

$$(uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

DÉMO

Par récurrence sur n \square

On rappelle que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de combinaisons à k éléments d'un ensemble à n éléments.

On note $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et dont la dérivée est continue. Plus généralement, une fonction de classe C^k est une fonction k fois dérivable et dont la dérivée k -ième est continue.

Enfin, une fonction de classe C^∞ est une fonction de classe C^k pour tout k . Elle est donc infiniment dérivable.

Etude de la convexité

DÉFINITION 25

Une fonction f définie sur un intervalle I est convexe si:

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Lorsque l'inégalité est en sens contraire, on dit que la fonction est concave sur l'intervalle en question.

Interprétation géométrique:

On se donne un repère orthonormé du plan et l'on pose $A(x, f(x))$ et $B(y, f(y))$.

Lorsque λ parcourt $[0, 1]$, la quantité $\lambda x + (1 - \lambda)y$ parcourt l'intervalle $[x, y]$. Le point $M(\lambda x + (1 - \lambda)y, f(\lambda x + (1 - \lambda)y))$ de la courbe de f décrit donc la portion de courbe joignant les points A à B .

Ainsi, f est convexe sur I si pour tout couple de points de \mathcal{C}_f A, B , le segment $[A, B]$ est au dessus de \mathcal{C}_f .

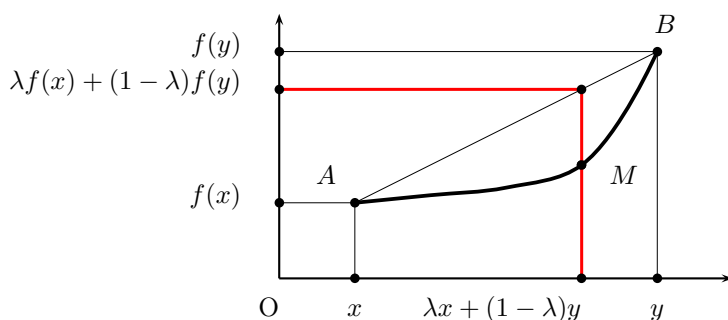


Figure 4.10: Convexité

PROPRIÉTÉ 27

Soit f une fonction 2 fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $f''(x) \geq 0$ sur I , alors f est convexe sur I .
- Si $f''(x) \leq 0$ sur I , alors f est concave sur I .
- Si $f''(x) = 0$ et change de signe en x alors la courbe de f admet un point d'inflexion en x .

DÉMO

Nous allons démontrer un résultat plus général:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I .

Posons, pour $y > x$ dans I , $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Alors $x < z < y$ et par définition de la convexité de f , on a l'une ou l'autre des deux inégalités :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ ou } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Ceci montre que: f convexe sur $I \iff \forall u \in I, F_u(t) = \frac{f(t) - f(u)}{t - u}$ est croissante sur $I - \{x_u\}$

Supposons maintenant que f admette une dérivée seconde.

En ce cas, la fonction F_u est dérivable et par définition, sa dérivée est la dérivée seconde de f

□

REMARQUE 4

f convexe sur $I \Rightarrow f$ continue sur I et f admet une demi dérivée à gauche et à droite en tout point de I . On peut montrer qu'une fonction continue sur un intervalle ouvert I est convexe si et seulement si elle admet sur I une dérivée à droite croissante (sans avoir besoin de supposer que f est deux fois dérivable).

REMARQUE 5

La dérivée seconde mesure les variations de la dérivée première. $f''(x) \geq 0$ signifie que la dérivée première au voisinage x est croissante, donc que la tangente a une pente qui augmente. De même, $f''(x) \leq 0$, signifie que la pente de la tangente diminue. On peut donc avoir une fonction croissante et convexe, ou bien croissante et concave et l'on peut également avoir une fonction décroissante et convexe, ou bien décroissante et concave.

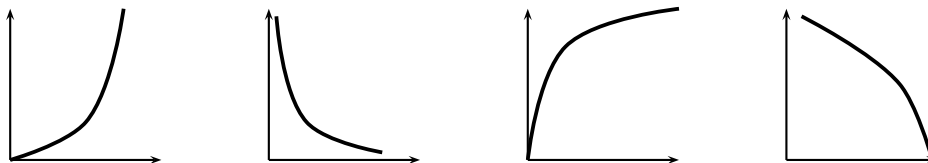


Figure 4.11: Fonctions convexe croissante, convexe décroissante, concave croissante et concave décroissante.

REMARQUE 6

Une fonction deux fois dérivable est convexe sur un intervalle si et seulement si sa tangente est sous la courbe en tout point et concave si sa tangente est au-dessus de la courbe en tout point. Si x est un point d'inflexion pour la courbe de f , la tangente Δ à f en x_0 change de position par rapport à la courbe.

PROPRIÉTÉ 28

Soit f une fonction bijective de I sur J .

- f convexe sur $I \Rightarrow f^{-1}$ concave sur J
- f concave sur $I \Rightarrow f^{-1}$ convexe sur J

DÉMO

La courbe de la fonction f^{-1} se déduit de la courbe de f par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

□

Ex:

- $f(x) = e^x$: $f''(x) = e^x \geq 0$ donc e^x est convexe sur \mathbb{R} .
- $f(x) = \ln x$: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$ donc $\ln x$ est concave sur $]0, +\infty[$.
- $f(x) = \arctan(x)$: $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \begin{cases} < 0 & \text{si } x > 0 \\ > 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Donc 0 est un point d'inflexion.

La fonction est donc concave avant 0 et convexe après.

- $f(x) = e^{-x^2}$

Cette fonction est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et nous avons déjà démontré que $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$. Le signe de f'' est celui de $2x^2 - 1$ qui est positif à l'extérieur de l'intervalle $[-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$ et négatif dans cet intervalle. La fonction est donc convexe sur $] -\infty, -\sqrt{2}/2] \cup [\sqrt{2}/2, +\infty[$, concave sur $[-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$. Par ailleurs, $-\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{2}/2$ sont les abscisses des deux points d'inflexion de la courbe.

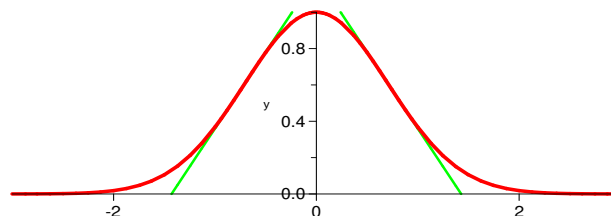


Figure 4.12: $f(x) = e^{-x^2}$ et ses tangentes aux deux points d'inflexion de la courbe.

4.3 Fonctions usuelles

4.3.1 Exponentielle et puissances

On passe sur \ln et e^x qui ont été vues et utilisées depuis le début de l'année.

Rappelons néanmoins la définition du logarithme de base a : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

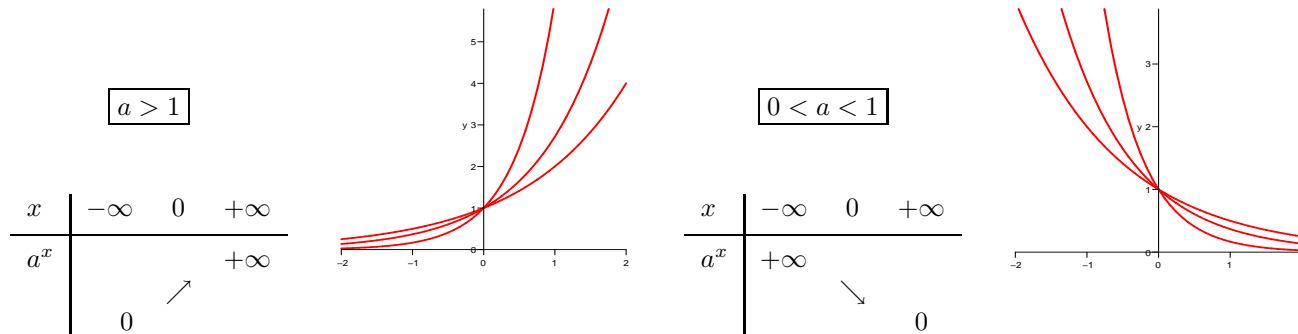
Exponentielle de base a : $f(x) = a^x$ avec $a > 0$

Si $a > 0$, on a alors $\boxed{a^x = e^{x \ln a}}$ qui définit une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

Cette fonction vérifie: $a^{x+y} = a^x a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$ et $(ab)^x = a^x b^x$

$f'(x) = \ln a e^{x \ln a}$ et $f''(x) = (\ln a)^2 e^{x \ln a}$

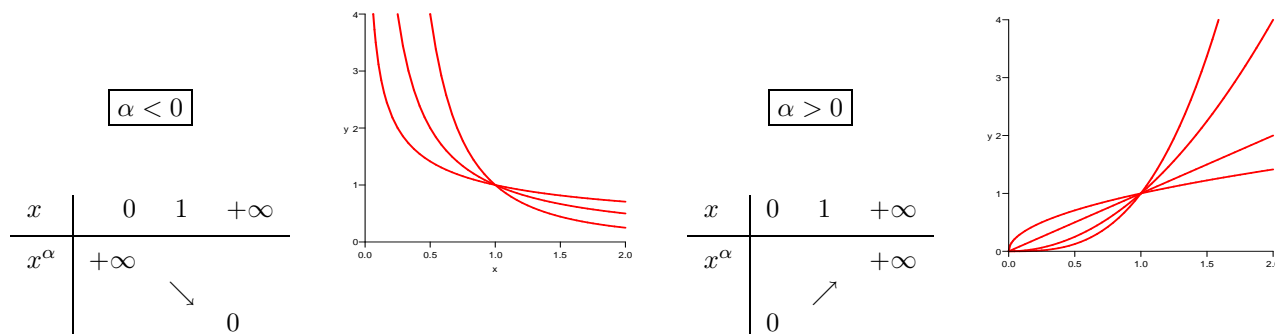
$\ln a > 0 \iff a > 1$; on a donc deux familles de courbes différentes selon que $0 < a < 1$, auquel cas la fonction est décroissante ou que $a > 1$, auquel cas la fonction est croissante. Dans les deux cas, la dérivée seconde est positive et ces fonctions sont donc convexes sur \mathbb{R} . Enfin, le théorème de croissances comparées donne les branches infinies: une branche parabolique d'axe (Oy) et une asymptote horizontale (Ox) .



Fonctions puissances: $f(x) = x^\alpha$

f est définie sur \mathbb{R}_+^* , $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

Ainsi, si $\alpha > 0$ la courbe est croissante et si $\alpha < 0$ elle est décroissante. Elle est convexe si $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$ et concave si $0 < \alpha < 1$. Lorsque $\alpha < 0$, toutes les courbes possèdent (Oy) comme asymptote verticale et (Ox) comme asymptote horizontale. Lorsque $0 < \alpha < 1$, la seule branche infinie est (Ox) qui est une branche parabolique. Enfin, lorsque $\alpha > 1$, les courbes admettent une branche parabolique d'axe (Oy) .



THÉORÈME 22 (THÉORÈME DE CROISSANCES COMPARÉES)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

- $\forall a > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$
- $\forall 0 < a < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha a^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$

4.3.2 Fonctions hyperboliques

DÉFINITION 26

$\forall x \in \mathbb{R}$, on définit les cosinus, sinus et tangente hyperboliques par:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

On utilisera également les notations $\cosh x$, $\sinh x$ et $\tanh x$ qui sont normalisées pour les calculatrices.

$\cosh x$ est la partie paire de l'exponentielle et $\sinh x$ est la partie impaire de l'exponentielle. Cette définition est à rapprocher de l'exponentielle complexe e^{ix} qui permet de définir les sinus et cosinus trigonométriques comme partie réelle et imaginaire de l'exponentielle. L'analogie entre fonctions trigonométriques et hyperboliques vient de la définition géométrique de sh , ch et th :

Considérons un repère orthonormé direct du plan et posons $X = \operatorname{ch}(x)$ et $Y = \operatorname{sh}(x)$ en se plaçant sur $[0, +\infty[$ où ces fonctions sont bijectives. de l'égalité $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$ (à vérifier) on en déduit que le point $M(X, Y)$ est sur la courbe d'équation $X^2 - Y^2 = 1$ qui est une hyperbole équilatère. Ces fonctions sont donc les analogues de $\sin x$ et $\cos x$ mais sur une hyperbole au lieu d'un cercle. On admet que le paramètre x représente le double de la surface du triangle hyperbolique OMH de la figure ci-dessous (nous démontrerons ce résultat en travaux dirigés).

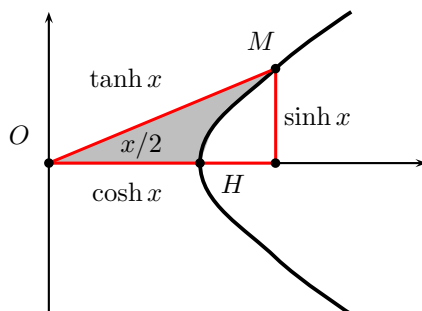
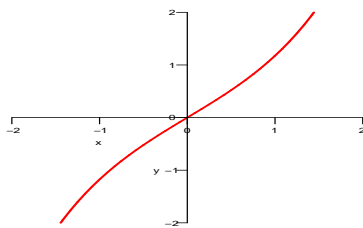
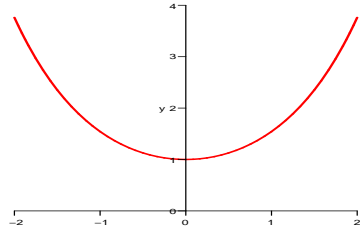
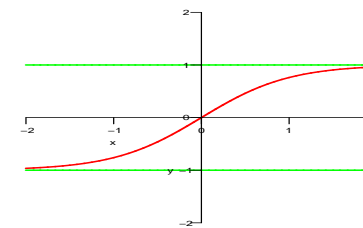


Figure 4.13: Interprétation géométrique des fonctions hyperboliques

sh(x)	ch(x)	th(x)																																				
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ impaire $\text{sh}'x = \text{ch}x$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ paire $\text{ch}'x = \text{sh}x$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ impaire $\text{th}'x = \frac{\text{ch}^2x - \text{sh}^2x}{\text{ch}^2x} = \frac{1}{\text{ch}^2x}$																																				
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\text{sh}x$</td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td></td><td>$-\infty$</td><td></td><td></td></tr></table> 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$\text{sh}x$			$+\infty$		$-\infty$			<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\text{ch}x$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr></table> 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$\text{ch}x$	$+\infty$		$+\infty$			1		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\text{th}x$</td><td></td><td></td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>-1</td><td></td><td></td></tr></table> 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$\text{th}x$			1		-1		
x	$-\infty$	0	$+\infty$																																			
$\text{sh}x$			$+\infty$																																			
	$-\infty$																																					
x	$-\infty$	0	$+\infty$																																			
$\text{ch}x$	$+\infty$		$+\infty$																																			
		1																																				
x	$-\infty$	0	$+\infty$																																			
$\text{th}x$			1																																			
	-1																																					

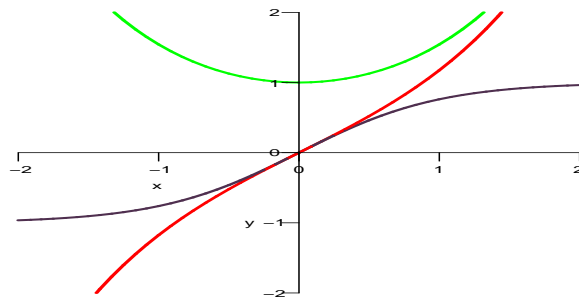


Figure 4.14: Comparaison de ch, sh et th

Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ 29 (FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

- $ch^2 x - sh^2 x = 1$
- $sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$
- $ch(2x) = 2ch^2 x - 1 = 1 + 2sh^2 x$
- $(ch(x) + sh(x))^n = ch(nx) + sh(nx)$
- $th(2x) = \frac{2th(x)}{1 + th^2(x)}$
- $ch(x + y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$
- $sh(x + y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$
- $ch(x - y) = ch(x)ch(y) - sh(x)sh(y)$
- $sh(x - y) = sh(x)ch(y) - ch(x)sh(y)$
- $th(x + y) = \frac{th(x) + th(y)}{1 + th(x)th(y)}$

DÉMO

Ces formules se démontrent facilement à l'aide des exponentielles. \square

Réciproques

DÉFINITION 27 (FONCTIONS HYPERBOLIQUES INVERSES)

- $argsh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto y = argsh(x) \iff x = sh(y)$
- $argch : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \longmapsto y = argch(x) \iff x = ch(y)$
- $argth :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto y = argth(x) \iff x = th(y)$

$\operatorname{argsh}(x)$	$\operatorname{argch}(x)$	$\operatorname{argth}(x)$																				
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ impaire $\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$ ni paire, ni impaire $\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\mathcal{D}_f =]-1, 1[$ impaire $\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1 - x^2}$																				
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\operatorname{argsh} x$</td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$\operatorname{argsh} x$			$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\operatorname{argch} x$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	1	$+\infty$	$\operatorname{argch} x$		$+\infty$	<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>$\operatorname{argth} x$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	-1	1	$\operatorname{argth} x$		$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$																			
$\operatorname{argsh} x$			$+\infty$																			
x	1	$+\infty$																				
$\operatorname{argch} x$		$+\infty$																				
x	-1	1																				
$\operatorname{argth} x$		$+\infty$																				

Expression logarithmique des fonctions hyperboliques inverses

Posons $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et $h(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition (à vous de le déterminer) et :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{et} \quad h'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Nous retrouvons les expressions des dérivées des fonctions hyperboliques inverses.

Nous pouvons donc en déduire que nos trois fonctions diffèrent des fonctions hyperboliques par une constante additive.

Par ailleurs, $f(1) = 0 = \operatorname{argch}(1)$, $g(0) = 0 = \operatorname{argsh}(0)$ et $h(0) = 0 = \operatorname{argth}(0)$. La constante additive est nulle pour les trois fonctions. Nous pouvons donc conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\forall x > 1, \quad \operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Ces expressions s'appellent formes logarithmiques des fonctions hyperboliques inverses.

4.3.3 Remarques sur l'étude d'une fonction

L'étude complète d'une fonction suppose de traiter les points suivants :

- Déterminer le domaine de définition \mathcal{D} .
- Etudier la parité, l'imparité ou la périodicité.

Une fonction est paire si $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}$. Cela suppose que le domaine de définition soit symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Une fonction est paire ssi sa courbe représentative dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Une fonction est impaire si $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}$. Cela suppose que le domaine de définition soit symétrique par rapport à $O(0,0)$. Par ailleurs, si f est définie en 0, on a nécessairement $f(0) = 0$. Une fonction est impaire ssi sa courbe représentative dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Une fonction est périodique s'il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}$. Le plus petit T vérifiant cette propriété est la période de la fonction. Cela suppose que le domaine de définition soit infini. Une fonction est périodique ssi sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur la moitié positive de son intervalle de définition et d'en déduire la courbe, par symétrie, sur tout le domaine. Lorsqu'une fonction est périodique, il suffit de l'étudier sur une période. Enfin, lorsque la fonction est périodique et paire / impaire, il suffit de l'étudier sur une demi-période.

- Calculer $f'(x)$ (si elle existe) et en déduire le sens de variations de f .
- Calculer les limites aux bornes du domaine de définition et établir le tableau de variations. Ce tableau indique le domaine de définition, le signe de la dérivée, les variations et limites aux bornes.
- Calculer la dérivée seconde $f''(x)$ (si elle existe) et en déduire la convexité ainsi que les éventuels points d'inflexion.
- Calculer les branches infinies (asymptotes verticales, horizontales, branches paraboliques, directions asymptotiques et / ou asymptotes obliques).
- Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
- Déterminer d'éventuelles symétries par changement de variables.

◇
 Loga-
 rithme et
 exponentielle
 sont à une soirée
 d'intégration. Expo-
 nentielle est seul à boire
 un verre à une table. Loga-
 rithme arrive:
 - Tu restes là tout seul ?
 - Bah, j'ai beau essayer de m'intégrer,
 ça ne change rien.
 Ils finissent quand même le
 verre ensemble et s'en
 vont. Exponentielle
 paye l'addition car
 logarithme
 népé-
 rien.
 ◇

Chapitre 5

Calcul intégral

Introduction

C'est à Eudoxe (400-355 av JC environ) que l'on doit les premiers calculs d'aires et de volumes à l'aide d'empilement de plaques dont l'épaisseur tend vers 0; Archimède (287-219 av JC) perfectionne la méthode d'Eudoxe (qui est mentionnée dans les éléments d'Euclide). Newton (1643-1729) et Leibniz (1646-1716) démontrent le rapport entre les primitives d'une fonction et le calcul d'aire (C'est à Leibniz que l'on doit la notation \int).

Cauchy et Riemann (1826-1866) définissent l'intégrale de façon rigoureuse, tandis que Lebesgue (1875-1941) et Denjoy (1884-1974) étendent la notion à des classes de fonctions plus générales.

5.1 Intégrale de Riemann

5.1.1 Rappels et compléments

Dans toute la suite, I sera un intervalle de \mathbb{R} de la forme $[a, b]$ et f une fonction continue sur cet intervalle. Nous rappelons rapidement les propriétés des intégrales de Riemann et en particulier le théorème suivant qui nous servira de définition (la définition de l'intégrale à l'aide des sommes de Darboux sera donnée plus loin).

THÉORÈME 23

Soit f une fonction continue de I dans \mathbb{R} et F une primitive de f sur I .
On appelle intégrale de f sur I la quantité notée:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

REMARQUE 7

On rappelle que F est une primitive de f si $F' = f$
On admet qu'une fonction peut être intégrable sans être continue (fonctions monotones et bornées par exemple). Nous nous limiterons dans la leçon à des fonctions continues ou bien continues par morceaux.

Ex: $\int_1^e \frac{1}{x} dx = (\ln x)_1^e = 1$

Ex: $\int_0^1 x^2 dx = (\frac{1}{3}x^3)_0^1 = \frac{1}{3}$

5.1.2 Construction de l'intégrale de Riemann (en option)

Subdivision d'un intervalle

On appelle subdivision σ d'un intervalle $[a, b]$ la donnée de $n + 1$ points x_0, x_1, \dots, x_n de $[a, b]$ vérifiant:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$[x_i, x_{i+1}]$ sont les intervalles de σ et $h = \sup_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$ est le pas de σ

On notera \mathcal{S} l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

Une subdivision σ' est plus fine qu'une subdivision σ si $\sigma \subset \sigma'$ (σ' est obtenue en rajoutant des points à σ). Enfin, $\forall \sigma$ et σ' de $[a, b]$, $\sigma \cup \sigma'$ est la subdivision obtenue par réunion des points de σ et de σ' .

Intégrale d'une fonction en escalier

Une fonction f définie sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que f soit constante et égale à y_i sur $]x_i, x_{i+1}[$

Une telle fonction est donc bornée et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Une subdivision est adaptée à une fonction f si f est constante à l'intérieur de chaque intervalle.

Toute subdivision plus fine est alors aussi adaptée à f .

THÉORÈME 24

On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le réel:

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i (x_{i+1} - x_i)$$

Ce nombre dépend de f , a et b mais pas de la subdivision choisie, on le note $I(f) = \int_a^b f(x) dx$

DÉMO

• Considérons dans un premier temps deux subdivisions σ et σ' avec σ plus fine que σ' .

σ' s'obtient à partir de σ en ajoutant des points:

Soient x_0, x_1, \dots, x_n les points de σ et $x_{i,k}, k = 0, \dots, \alpha_i$ les points de σ' appartenant à l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ avec $x_{i-1} = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i,\alpha_i} = x_i$ (faire un dessin...)

$$\Rightarrow I(f, \sigma') = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{\alpha_i-1} y_i (x_{i+1,k+1} - x_{i+1,k})}_{x_{i+1} - x_i} = I(f, \sigma)$$

• Si maintenant σ et σ' sont quelconques, on pose $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ qui est plus fine que σ et σ' .

$$\Rightarrow I(f, \sigma) = I(f, \sigma'') \text{ et } I(f, \sigma') = I(f, \sigma'') \Rightarrow I(f, \sigma) = I(f, \sigma')$$

La valeur ne dépend donc pas de la subdivision choisie et l'on peut la noter $I(f)$.

□

Intégrale de Riemann d'une fonction bornée

DÉFINITION 28

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann si:
 $\forall \epsilon > 0, \exists$ deux fonctions u, v en escalier sur $[a, b]$ telles que $u \leq f \leq v$ et $0 < I(v) - I(u) < \epsilon$

Soient $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier majorant f et minorant f .

$\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ sont non vides car f est bornée.

L'ensemble des $I(\sigma, u)$ quand u parcourt $\mathcal{E}_-(f)$ est borné supérieurement par $I^-(f)$

L'ensemble des $I(\sigma, u)$ quand u parcourt $\mathcal{E}_+(f)$ est borné inférieurement par $I^+(f)$

Ces deux nombres sont appelés somme de Darboux inférieure et supérieure de f .

THÉORÈME 25

Si f est intégrable au sens de Riemann, alors $I^+(f) = I^-(f)$

Cette valeur commune s'appelle l'intégrale de f sur $[a, b]$ et se note $\int_a^b f(x) dx$

DÉMO

• Supposons f intégrable: Il existe alors u et v en escalier avec $I(u) - I(v) < \epsilon$.

$$\text{Nous avons } I(v) \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq I(u) \Rightarrow I^-(f) = I^+(f) = I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

• Réciproquement si $I^-(f) = I^+(f)$, alors par définition de la borne supérieure d'un ensemble,

$$\exists u, v / I(u) > I^-(f) - \frac{\epsilon}{2} \text{ et } I(v) < I^+(f) + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow I(u) - I(v) < \epsilon \Rightarrow f \text{ intégrable.}$$

□

La propriété précédente est une équivalence: si f est une fonction bornée sur $[a, b]$, f est intégrable au sens de Riemann $\iff I^+(f) = I^-(f)$

REMARQUE 8

- Toute fonction monotone et bornée sur $]a, b[$ est intégrable sur $[a, b]$
- Toute fonction monotone sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$
- Toute fonction continue et bornée sur $]a, b[$ est intégrable sur $[a, b]$
- Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$
- La fonction indicatrice de \mathbb{Q} qui vaut 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon n'est pas intégrable.

5.1.3 Propriétés principales

Interprétation géométrique

PROPRIÉTÉ 30

$\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire (algébrique) comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

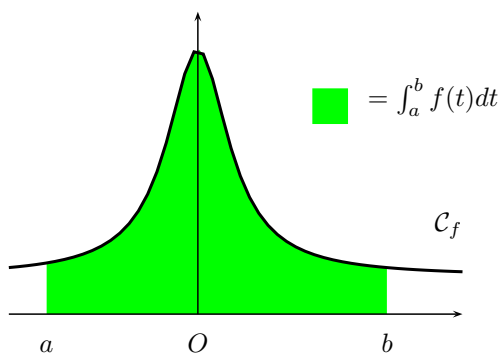


Figure 5.1: Aire et intégrale

DÉMO

On se place sur un intervalle de largeur h noté $[x, x+h]$. f étant continue sur un intervalle fermé, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle atteint son minimum m et son maximum M en deux points c_1 et c_2 de l'intervalle. Par ailleurs, d'après ce même théorème, $f([x, x+h]) = [m, M]$ est un segment. Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire algébrique entre a et x (on suppose $a < x < b$). Alors par définition, $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$ représente l'aire entre la courbe \mathcal{C}_f , (Ox) , x et $x+h$. Ainsi, on a:

$$f(c_1) \times h \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq f(c_2) \times h$$

$$\Rightarrow f(c_1) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(c_2) \quad (*)$$

Comme f est continue en x , $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall u \in]x - \alpha, x + \alpha[, f(u) \in]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$.
Si $h \in]-\alpha, \alpha[\Rightarrow f(x) - \epsilon < f(c_1) < f(x) + \epsilon$ et $f(x) - \epsilon < f(c_2) < f(x) + \epsilon$ et d'après la relation $(*)$, on a:

$$f(x) - \epsilon \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq f(x) + \epsilon \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(c_1) \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x) = f'(x)$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}(x)$ est une primitive de f . Comme elle s'annule en a , alors $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)dt$ et

$$\text{l'aire entre } a \text{ et } b \text{ est donc donnée par } \mathcal{A}(b) = \int_a^b f(t)dt$$

□

Cette interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction continue va nous permettre de visualiser très facilement (et même de démontrer) les propriétés ci-dessous. Dans le cas général d'une fonction qui n'est pas continue, il faut démontrer ces propriétés en revenant à la définition, à l'aide des fonctions en escalier (nous ne le ferons pas).

Propriétés

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g, \lambda f$ et fg sont intégrables sur $[a, b]$ (on dit que l'intégrale est linéaire et que l'ensemble des fonctions intégrables a une structure d'algèbre) et l'on a :

$$\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

On a également la relation de Chasles: $\forall a, b, c \in I, \int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

Ainsi que la formule de la moyenne: $m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

En particulier, si $f(t) \geq 0 \forall t \in I, \int_a^b f(t)dt \geq 0$ (on dit que l'intégrale est une forme positive).

De même, $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ pour toute fonction intégrable et bornée sur I .

Une conséquence de la relation de Chasles (en posant $c = a$) est que $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ et il n'est pas nécessaire que $a < b$ aux bornes de l'intégrale.

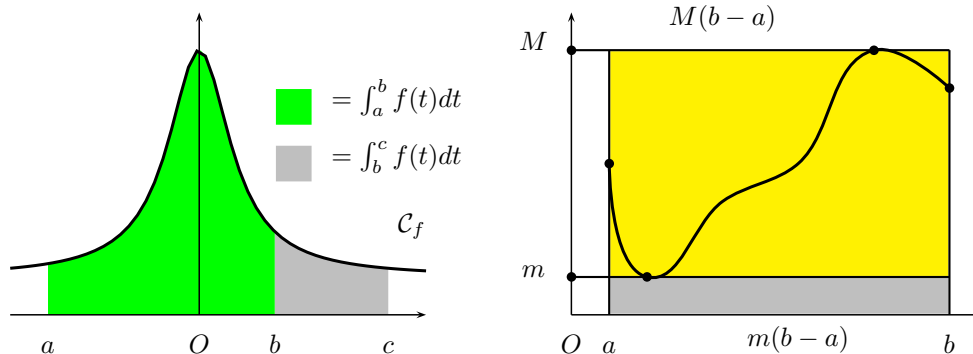


Figure 5.2: Relation de Chasles et formule de la moyenne

Il se peut que $|f|$ soit intégrable sur $[a, b]$ sans que la fonction f le soit.

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors $f \times g$ est intégrable sur $[a, b]$ et l'on a

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2dt \times \int_a^b g(t)^2dt$$

Il s'agit d'une inégalité très importante qui s'appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On retiendra qu'en règle générale, l'intégrale d'un produit N'EST PAS EGALE au produit des intégrales. En fait, l'égalité n'est atteinte que si les deux fonctions sont proportionnelles.

5.1.4 Propriétés de la fonction primitive

Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

F est continue sur I , et lorsque f est continue, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$
 F est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

On appelle intégrale indéfinie l'une de ces primitives et l'on note $\int f(x)dx$.

On a donc trois types d'expressions différentes mettant en jeu le symbole \int :

- $\int_a^b f(t)dt$ qui représente un nombre réel (l'aire entre la courbe et l'axe (Ox))
- $\int f(x)dx$ qui représente n'importe laquelle des primitives de f

- $\int_a^x f(t)dt$ qui représente la primitive de f qui s'annule en a

Par exemple, $\int \cos x \, dx = \sin x + K, K \in \mathbb{R}$

La formule suivante est admise. Elle nous servira lorsque l'on devra étudier une intégrale en tant que fonction de l'une ou l'autre de ses bornes. Nous supposons f continue, u et v dérivables:

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \right)' = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$$

Dans le cas où l'une des deux fonctions u ou v est constante, on retrouve la formule de $F(x)$ donnée ci-dessus.

Le calcul d'une intégrale se limite donc pour nous à une recherche de primitives. Il faut néanmoins savoir qu'une fonction f peut avoir une primitive sur $]a, b[$ sans y être intégrable (par exemple, $1/x$ n'est pas intégrable sur $]0, 1[$ et admet pourtant $\ln x$ comme primitive sur cet intervalle). Lorsque la primitive n'est pas immédiate à calculer, on utilisera une des méthodes du paragraphe suivant. Sinon, le théorème donne la valeur de l'intégrale:

Ex: $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2$

Ex: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

Ex: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left(\frac{1}{\cos x} \right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

5.2 Méthodes de calcul

5.2.1 Intégration par parties

On souhaite intégrer un produit de deux fonctions dont l'une s'intègre facilement tandis que l'autre se dérive facilement. On donne la formule pour deux fonctions u et v de classe C^1 sur $[a, b]$:

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

En pratique, on écrit une flèche vers le haut pour la fonction à intégrer (en premier) et vers le bas pour l'autre.

Ex: $\int_1^e x \ln x dx = \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x \right)_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2 + 1}{4}$

Ex: $\int_0^1 x e^x dx = (x e^x)_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$

Ex: $\int_0^1 \arctan t dt = (t \arctan t)_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln(1+t^2)_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

Ex: $\int_0^1 x^2 e^x dx = (x^2 e^x)_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = 1 = e - 2$ en effectuant une double intégration par parties.

5.2.2 Changement de variables

THÉORÈME 26

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ une fonction continue sur } [a, b]. \\ \text{Soit } u : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b] \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } u(\alpha) = a \text{ et } u(\beta) = b \\ \text{Alors, } \int_a^b f(x)dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt \end{array} \right.$$

Ex: $I = \int_0^1 x e^x dx$

Posons $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$ et lorsque $x = 1$, $u = e$.

$$I = \int_1^e \ln u \times u \frac{du}{u} = \int_1^e \ln u \, du = (u \ln u - u)_1^e = 1$$

$$\text{Ex: } I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

Posons $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2udu$. Lorsque $x = 1$, $u = 1$ et lorsque $x = 3$, $u = \sqrt{3}$.

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2udu}{u(1+u^2)} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = 2(\arctan u)_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

5.2.3 Intégration d'une fraction rationnelle

Pour intégrer une fraction, on la décompose en éléments simples afin de se ramener à l'une des intégrales ci dessous, dont les primitives sont connues:

$$\int \frac{u'}{u} = \ln |u| + K$$

$$\text{Ex: } \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K$$

$$\int u' u^{-n} = \frac{1}{1-n} \frac{1}{u^{n-1}} + K$$

$$\text{Ex: } \int \frac{xdx}{(1+x^2)^3} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(1+x^2)^2} + K$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u + K$$

$$\text{Ex: } \int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan x^2 + K$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

On pose $x = \tan t$ et on se ramène à des intégrales de Wallis (cf. TD)

$$\text{Ex: } I = \int_0^1 \frac{x^4}{(x+1)^2(1+x^2)} dx$$

$$\text{On pose } f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^2(1+x^2)} = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)} \Rightarrow I = \frac{5-7\ln 2}{4}$$

$$\text{Ex: } I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+4}. \text{ La fraction à intégrer (irréductible) peut s'écrire sous la forme } \frac{K}{1+u^2}.$$

$$\text{En effet, } f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1} \Rightarrow I = \frac{1}{3} (\sqrt{3} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}})_{-1}^1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Beaucoup d'intégrales se ramènent, par changement de variable, à une intégration de fraction rationnelle. Nous n'en ferons pas étude systématique et nous contenterons de quelques exemples caractéristiques.

Intégrales trigonométriques: $\int f(\sin x, \cos x, \tan x) dx$ avec f fraction rationnelle.

$$\text{La méthode générique est de poser } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Ex:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x} = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} (t+\frac{1}{2})_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Cette méthode est calculatoire et il est préférable, dans certains cas, d'utiliser les formules de Bioche ci dessous:

- Si $f(x)dx$ est invariante par changement de x en $-x$, on posera $t = \cos x$
- Si $f(x)dx$ est invariante par changement de x en $\pi - x$, on posera $t = \sin x$
- Si $f(x)dx$ est invariante par changement de x en $\pi + x$, on posera $t = \tan x$

$$\text{Ex: } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$$

$$f(x)dx \text{ est invariante par changement de } x \text{ en } -x \text{ donc on posera } t = \cos x \Rightarrow I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{-dt}{(1+2t)(1-t^2)}$$

$$\text{La fraction à intégrer se décompose en } -\frac{4}{3} \frac{1}{1+2t} + \frac{1}{6} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} \Rightarrow I = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln(\sqrt{2}-1)$$

La règle de Bioche s'applique aussi aux fractions rationnelles en ch , sh et th .

Dans le cas général d'une intégrale du type $\int f(\text{cht}, \text{sht}, \text{tht}) dt$ on peut toujours poser $u = e^t$.

Ex:
$$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{5 \sinh x - 4 \cosh x} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 9} = \int_1^2 \frac{2dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5}$$

Intégrales abéliennes: $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Le changement de variables adéquat (en ch, sh, sin, cos ou $\alpha x + \beta$ dépend du discriminant de $ax^2 + bx + c$. Nous en verrons quelques exemples en TD).

Ex: $I = \int_1^2 x \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx$ en posant $x = 2 \sinh t + 1$ que vous traiterez vous-même.

5.3 Applications du calcul intégral

5.3.1 Calculs de volumes, d'aires et de longueurs

Volume d'un solide

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'on considère un solide \mathcal{S} dont on souhaite calculer la mesure du volume \mathcal{V} . Découpons ce solide en tranches horizontales infiniment fines. Notons a la cote du point le plus bas de \mathcal{S} et b la cote du point le plus haut. A la hauteur z , la tranche correspond à la section du solide \mathcal{S} par un plan horizontal. Cette tranche est une surface de mesure $S(z)$ et les propriétés des intégrales montrent que:

$$\mathcal{V} = \int_a^b S(z) dz$$

Ex: Calcul du volume d'une sphère

On considère une sphère de Rayon R (cf. figure 5.3.). A la hauteur z , la section de la sphère avec un plan horizontal est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$; il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore à un plan vertical passant par le centre de la sphère. Ainsi, d'après la formule précédente,

$$\mathcal{V} = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = 2\pi R^3 - \left[\frac{\pi z^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

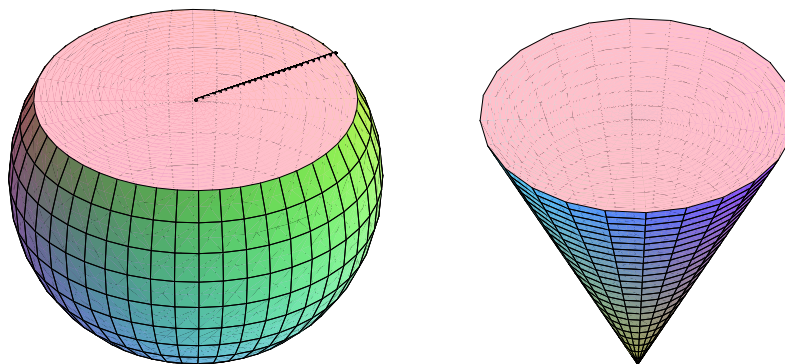


Figure 5.3: Volumes de révolution

Volume d'un solide de révolution

Dans le cas particulier où le solide est obtenu en faisant tourner une surface autour de l'axe (Oz) , chaque tranche est un disque dont le rayon est $y = f(z)$ où $f(z)$ est l'équation de la courbe formant le contour de la surface. Le disque a donc une surface égale à $\pi f(z)^2$ et l'on en déduit que:

$$\mathcal{V} = \int_a^b \pi f(z)^2 dz$$

Ex: Calcul du volume d'un cône

On considère un cône droit, de hauteur h dont la base a un rayon R . A la hauteur z , la section du cône avec un plan horizontal est, d'après le théorème de Thalès, un disque de rayon Rz/h . Ainsi,

$$\mathcal{V} = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Surface d'un volume de révolution

On considère toujours un solide obtenu en faisant tourner une surface autour de l'axe (Oz) . A la hauteur z , l'équation de la courbe obtenue en interceptant la surface extérieure avec un plan horizontal est $f(z)$. On souhaite calculer la surface spatiale enfermant ce volume. Nous admettons (cela sera démontré un peu plus loin) que:

$$\mathcal{S} = \int_a^b 2\pi f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2} dz$$

Ex: Surface d'une sphère de rayon R

Une coupe verticale de la sphère passant par O a pour équation

$$y^2 + z^2 = R^2 \iff y = f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$$

$$\text{Alors } f'(z) = -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \text{ et l'on a } \mathcal{S} = \int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - z^2}} dz = 4\pi R^2$$

Ex: Surface d'une antenne parabolique.

On considère un paraboloïde de révolution de hauteur h . Une coupe verticale de ce paraboloïde donne une parabole d'équation $y^2 = z \iff y = f(z) = \sqrt{z}$. Alors $y' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ et en appliquant la formule, on obtient:

$$\mathcal{S} = \int_0^h 2\pi \sqrt{z} \sqrt{1 + \frac{1}{4z}} dz = 2\pi \left[(z + 1/2)^{3/2} \right]_0^h = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left((2h + 1)\sqrt{2h + 1} - 1 \right)$$

Surface d'une courbe fermée

Considérons une courbe fermée plane enfermant une surface \mathcal{S} . L'équation de cette courbe doit être donnée sous forme paramétrique $x = f(t)$ et $y = f(t)$. Lorsque le paramètre t décrit un intervalle donné $[a, b]$, l'ensemble des points $M(x(t), y(t))$ décrit la courbe. Dans ce cas, l'aire de la surface enfermée est donnée par:

$$\mathcal{S} = \int_a^b y(t)x'(t) dt$$

Ex: Surface d'un cercle de rayon R

Les équations paramétriques d'un cercle de centre O et rayon R sont $\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \end{cases}$

Lorsque t parcourt $[0, 2\pi]$, le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ parcourt le cercle.

Nous avons $x'(t) = -R \sin t$ et l'aire vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= - \int_0^{2\pi} R \sin t \times R \sin t dt = -R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= -\frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) dt = -\frac{R^2}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = -\pi R^2 \end{aligned}$$

On trouve un résultat négatif car il s'agit d'une aire algébrique et l'on a parcouru le cercle dans le sens négatif.

Lorsque la courbe est donnée en coordonnées polaires sous la forme $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ la formule devient:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2 d\theta$$

Ex: Surface d'une cardioïde

Une cardioïde est une courbe ayant la forme d'un cœur (elle ressemble d'ailleurs plus à la tranche d'une pomme). C'est également la figure qui apparaît au fond d'une tasse de café lorsque celle-ci est éclairée par le soleil (ce type de courbes s'appellent des caustiques).

L'équation d'une cardioïde en coordonnées polaires est $\rho = a(1 + \cos \theta)$

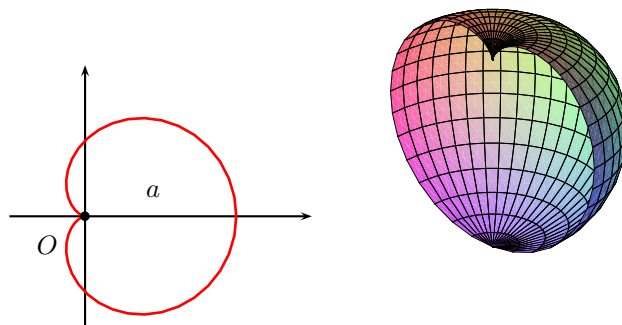


Figure 5.4: Cardioïde et volume de révolution d'une cardioïde

L'aire de la cardioïde est $\mathcal{S} = \int_0^\pi a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \left[\theta + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\theta) + 2 \sin \theta\right) \right]_0^\pi = \frac{3\pi a^2}{2}$

On pourrait, en utilisant une des formules précédentes, calculer le volume de révolution associé à la cardioïde. Le solide obtenu a la forme d'une pomme (cf. figure ci-dessus). Cette surface de révolution est utilisée en radio et par les preneurs de son; elle correspond au lobe de sensibilité d'un microphone cardioïde: ce type de micro est celui qui capte le mieux les sons provenant de l'avant en atténuant les autres.

Longueur d'un arc de courbe

Considérons une courbe d'équation $y = f(x)$ comprise entre deux points d'abscisses a et b . Considérons, sur cette courbe, deux points très proches d'abscisses x et $x + dx$. Soit dl la longueur de l'arc de courbe correspondant; la corde δ (longueur du segment) entre ces deux points vérifie, d'après le théorème de Pythagore, $\delta^2 = dx^2 + dy^2$

$\Rightarrow \frac{\delta^2}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ et lorsque $dx \rightarrow 0$, la corde tend vers la longueur de l'arc: $\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + y'(x)^2}$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Ex: Circonférence d'un cercle de rayon R

On découpe le cercle en 4 et l'on calcule la longueur du quart supérieur droit de la circonférence:

$$l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx = R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \left[\arcsin \frac{x}{R} \right]_0^R = \frac{\pi R}{2}$$

La longueur de la circonférence est donc $2\pi R$

5.3.2 Calculs de masse et moments d'inertie

Centre de gravité

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Considérons un système de points matériels M_1, \dots, M_n affectés de masse m_1, \dots, m_n . On sait que le centre de gravité de ce système est le barycentre des points M_i affectés des coefficients m_i . Si G est ce centre de gravité de ce système, on a

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{OM}_i$$

avec $M = \sum_{i=1}^n m_i$ masse totale du système. Cette équation nous permet de déterminer les coefficients du centre de gravité:

$$x_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad y_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad z_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Nous souhaitons déterminer de la même façon les coordonnées du centre de gravité d'un solide de l'espace, de masse M et de volume \mathcal{V} , sachant que la distribution de masse dans le solide peut-être une fonction des coordonnées (la matière est supposée continue). Cette distribution sera caractérisée par la masse volumique $\rho(x, y, z)$ qui est égale à la masse par unité de volume (ou d'aire ou de longueur). Si le solide est homogène, alors la masse volumique ne dépend pas des coordonnées et l'on a $M = \rho \times \mathcal{V}$.

Dans le cas contraire, $M = \int \rho dV$ l'intégrale étant effectuée sur tout le volume. Il s'agit d'une intégrale que nous ne savons pas encore calculer, mais la plupart du temps, le calcul pourra se faire par une intégrale simple. La formule à retenir est donc $dM = \rho dV$.

Notons a, b les abscisses minimales des points du solide, c, d les ordonnées minimales et e, f les altitudes minimales. Les coordonnées du centre de gravité du solide sont:

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_a^b x dV ; y_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_c^d y dV ; z_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_e^f z dV$$

Pour diminuer le nombre de calculs, il est important de noter que si le solide possède un centre, un axe ou un plan de symétrie, alors le centre de gravité se trouve nécessairement dessus.

Ex: Centre de gravité d'un cône

On considère un cône de révolution autour de l'axe (Ox) , de hauteur h et dont la droite $y = x$ est une génératrice. On suppose ce solide homogène. On sait que le volume d'un tel cône est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi h^3$ et que suivant la direction (Ox) , $dV = \pi x^2 dx$. L'axe (Ox) étant un axe de symétrie, G se trouve dessus et il suffit donc de calculer x_G :

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_0^h x \times \pi x^2 dx = \frac{3\pi}{\pi h^3} \left(\frac{x^4}{4} \right)_0^h = \frac{3}{4}h$$

Ex: Centre de gravité d'une demi-boule de rayon R

Nous supposons la demi-boule de centre O au dessus du plan (xOy) . Les deux plans (xOz) et (yOz) étant des plans de symétrie, on a $x_G = y_G = 0$ et il suffit donc de calculer z_G . Le volume de la demi-sphère est $2\pi R^3/3$ et

$$z_G = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_0^R z \times \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{3\pi R^4}{2\pi R^3 \times 4} = \frac{3R}{8}$$

Moment d'inertie

Nous repartons d'un système fini de points matériels M_1, \dots, M_n de masses respectives m_1, \dots, m_n . Le moment d'inertie de ce système par rapport au point O est par définition le réel

$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i OM_i^2$$

De la même façon, on définit le moment d'inertie d'un système par rapport à une droite ou un plan en remplaçant dans la définition les distances OM_i par les distances entre les points M_i et la droite ou le plan. Nous noterons d_i ces distances.

Par analogie avec ces définitions, nous souhaitons caractériser les moments d'inertie pour des solides possédant une distribution continue de matière.

$$I = \int \rho \times d^2 dV$$

$\rho(x, y, z)$ étant la masse volumique et $d(x, y, z)$ la distance de chaque point du solide au point, à l'axe ou au plan considéré. Là encore, cette intégrale se ramènera souvent à une intégrale simple par des considérations de symétrie.

Ex: Moment d'inertie d'une boule par rapport à son centre.

On suppose la boule homogène de masse volumique ρ . De $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, on en déduit que $dV = 4\pi R^2 dR$. Ainsi,

$$I_0 = \int_0^R \rho R^2 \times 4\pi R^2 dR = \frac{4\pi\rho R^5}{5} = \frac{3}{5}mR^2 \text{ car } m = 4\pi\rho R^3/3$$

Ex: Moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe de révolution.

On suppose le cylindre homogène de masse volumique ρ , de rayon R , de hauteur h et d'axe (Oz) . De $V = \pi R^2 h$, on en déduit que $dV = 2\pi R h dR$. Ainsi,

$$I_{(Oz)} = \int_0^R 2\pi \rho h R^3 dR = \frac{\pi \rho h R^4}{2} = \frac{m R^2}{2} \text{ car } m = \pi \rho R^2 h$$

5.3.3 Valeur moyenne et valeur efficace, puissance et énergie

Dans ce paragraphe, la plupart des fonctions représenteront des signaux dépendant du temps.

On considère un élément de circuit électronique alimenté par une tension $u(t)$ et traversé par une intensité $i(t)$. Pendant un temps dt , une charge $dq = i(t)dt$ traversera le circuit. L'énergie fournie au dipôle pendant le temps dt est par définition $dW = u(t)i(t)dt$; on définit également la puissance instantanée $dP = \frac{dW}{dt} = u(t)i(t)$. Ainsi, l'énergie consommée pendant un intervalle de temps $[a, b]$ est:

$$W = \int_a^b u(t)i(t) dt$$

On définit la valeur moyenne d'un signal $f(t)$ sur un intervalle $[a, b]$ comme étant le réel v_m donné par

$$v_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Supposons f continue sur $[a, b]$. L'existence de la valeur moyenne est assurée par la propriété de la moyenne et le théorème des valeurs intermédiaires. En effet, f étant continue, elle passe sur $[a, b]$ par toutes les valeurs comprises entre $m = \inf_{x \in [a, b]} f(t)$ et $M = \sup_{x \in [a, b]} f(t)$. On sait alors qu'il existe $c \in]a, b[$

tel que $(b-a)f(c) = \int_a^b f(t) dt$. $f(c)$ est la valeur moyenne.

La valeur efficace d'un signal est le réel v_e donné par

$$v_e = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^2 dt}$$

En électronique, la valeur efficace I_e d'un courant $i(t)$ est définie comme étant l'intensité d'un courant continu qui, durant un même intervalle de temps $[a, b]$, dégagera la même énergie dans une résistance R . L'énergie dégagée par effet joule est, dans une résistance et pour un courant continu, $W = RI_e^2(b-a)$. Par ailleurs, d'après la loi de Joule, l'énergie du courant $i(t)$ est

$$W = \int_a^b Ri(t)^2 dt$$

En égalant les deux expressions, on retrouve bien la définition ci-dessus.

Si le courant $i(t)$ est sinusoïdal de la forme $i(t) = I \sin(\omega t)$ (I est la valeur maximale du courant), l'énergie dégagée durant une période est

$$W = \int_0^T Ri(t)^2 dt = RI^2 \int_0^T \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) dt = \frac{RI^2 T}{2}$$

l'énergie dégagée par un courant continu durant une période est $W = RI_e^2 T$. En égalant les deux

expressions, on obtient $I_e = \frac{I}{\sqrt{2}}$ qui constitue la troisième définition de la valeur efficace.

Ex:

Considérons l'expression d'un courant sinusoïdal $i(t) = I \sin(\omega t)$ de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Calculons sa valeur moyenne sur une période T :

$$v_m = \frac{1}{T} \int_0^T I \sin(\omega t) dt = 0$$

Si maintenant ce courant a été redressé, nous obtenons $i(t) = I |\sin(\omega t)|$ dont la valeur moyenne est

$$v_m = \frac{1}{T} \int_0^T I |\sin(\omega t)| dt = \frac{2I}{\omega T} [-\cos(\omega t)]_0^{T/2} = \frac{2I}{\pi}$$

Considérons un dipôle pour lequel $u(t) = U_e \sqrt{2} \cos(\omega t)$. Le facteur $\sqrt{2}$ sert à exprimer cette tension en fonction de la valeur efficace et non en fonction de la valeur maximale. Note ϕ le retard de $i(t)$ par rapport à $u(t)$; nous avons alors $i(t) = I_e \sqrt{2} \cos(\omega t - \phi)$. La puissance moyenne absorbée par le dipôle durant une période T sera

$$\frac{1}{T} \int_0^T (U_e \sqrt{2} \cos(\omega t) \times I_e \sqrt{2} \cos(\omega t - \phi)) dt = \frac{U_e I_e}{T} \int_0^T [\cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi] dt = U_e I_e \cos \phi$$

$$P = U_e I_e \cos \phi$$

Le produit $I_e U_e$ s'appelle la puissance apparente (elle est mesurée en volt-ampères V.A.).

5.4 Calcul approché d'intégrales

5.4.1 Sommes de Riemann

Considérons une subdivision régulière $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ et une fonction f intégrable sur $[a, b]$. Le pas de la subdivision est $(b - a)/n$ et par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Le terme $R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ est une somme de Riemann et peut être utilisée comme valeur approchée de l'intégrale. On se reportera au paragraphe sur la construction de l'intégrale pour faire le rapport avec les sommes de Darboux.

Il s'agit de la somme des aires des rectangles de largeur $(b - a)/n$ et de hauteur $f(x_k)$.

5.4.2 Méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson

La méthode des rectangles consiste simplement à approcher la valeur de $\int_a^b f(x) dx$ par la somme précédente. On remplace alors sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses par l'aire d'un rectangle.

Si l'on suppose la fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, le théorème des accroissements finis permet de majorer l'erreur d'approximation:

$$|\int_a^b f(x) dx - R_n| \leq M \frac{(b-a)^2}{n} \text{ avec } M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

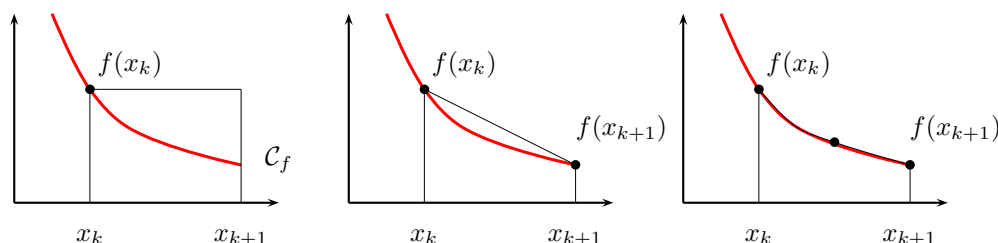


Figure 5.5: Méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson

La méthode des trapèzes consiste à approcher la valeur de $\int_a^b f(x) dx$ par la somme des aires de trapèzes. On remplace alors sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses par l'aire du trapèze $(x_k, x_{k+1}, f(x_{k+1}), f(x_k))$. Sur chaque intervalle, cette aire vaut $(x_{k+1} - x_k) \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}$ et la somme approchant l'intégrale est:

$$T_n = \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right)$$

Si l'on suppose la fonction de classe C^2 sur $[a, b]$, le théorème des accroissements finis permet encore de majorer l'erreur d'approximation:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq M \frac{(b-a)^3}{12n^2} \text{ avec } M = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

La méthode de Simpson consiste à approcher la fonction à intégrer par un polynôme de degré 2 en prenant 3 points de contrôle dans chaque intervalle. On remplace alors sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses par l'aire comprise entre le polynôme de degré 2 et l'axe des abscisses.

Sur chaque intervalle, on cherche le polynôme de degré 2 passant par les points de coordonnées

$$(x_k, f(x_k)), (x_{k+1}, f(x_{k+1})) \text{ et } \left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right)$$

et la somme approchant l'intégrale est:

$$S_n = \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right)$$

Si l'on suppose la fonction de classe C^4 sur $[a, b]$, le théorème des accroissements finis permet de majorer l'erreur d'approximation:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq M \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \text{ avec } M = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$$

On peut démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{T_n + 2R_n}{3}$

Chapitre 6

Développements limités

Historique

C'est le mathématicien Brook Taylor (1685-1731) qui a le premier utilisé, en 1717, un polynôme pour approcher une fonction (la formule porte son nom). En 1770, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) remarque que l'on peut développer une fonction sous la forme d'un polynôme en négligeant les termes de degré plus grand que n et en introduisant un terme dépendant de la dérivée n ème. Il utilise la formule de Taylor en précisant la forme du reste et obtient ainsi la formule de Taylor-Lagrange. Puis William Young (1862-1946) exprime le reste du développement à l'aide de fonctions négligeables pour obtenir la formule de Taylor-Young que nous utiliserons. C'est également Taylor qui inventa la méthode d'intégration par parties afin de pouvoir démontrer ses formules.

6.1 Formules de Taylor

Introduction

Soit $f(x) = e^x$. Examinons la courbe représentative de f autour de 0 et celle des fonctions suivantes:

$$1 + x, 1 + x + \frac{x^2}{2}, 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \text{ et } g(x) = \sum_{k=0}^{10} \frac{x^k}{k!}$$

Les différentes courbes semblent approcher de mieux en mieux celle de f au voisinage de 0.

Un développement limité est un polynôme de degré donné qui approche une courbe au voisinage d'un point.

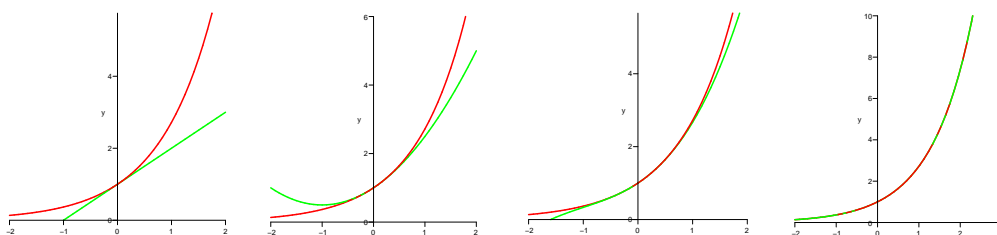


Figure 6.1: approximation de e^x par des polynômes

Le cœur de la leçon est formé par les différentes formules de Taylor, mais nous les passerons presque sous silence pour présenter simplement les applications.

6.1.1 Définition

DÉFINITION 29

On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 (DL) ssi:
 $\exists h > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tels que:
 $\forall x / |x| < h, f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$

Cela veut dire que f peut s'écrire, au voisinage de 0, sous la forme d'un polynôme plus une fonction négligeable en 0 (c'est-à-dire que f est à peu près égale au polynôme P dans l'intervalle $[-h, h]$).

Nous noterons $DL_n(x=0)$ pour parler d'un développement limité d'ordre n au voisinage de $x=0$.

L'égalité est équivalente à $f(x) = P(x) + o(x^n)$ où $o(x^n)$ est une fonction négligeable devant x^n .

On ne sait rien de la fonction $o(x^n)$ (même pas son signe) sauf qu'elle tend vers 0 en 0 plus rapidement que x^n .

$P(x)$ s'appelle la partie régulière du développement limité (c'est un polynôme de degré $\leq n$). $o(x^n)$ est le reste d'ordre n .

On se reportera à la leçon pour les propriétés sur les fonctions $o(x^n)$. La notation o , due à Landau, peut prêter à confusion et nous pourrions à la place utiliser la notation $x^n \epsilon(x) = o(x^n)$ dans laquelle $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Cette dernière notation est moins accidentogène que l'utilisation des o .

Généralisation:

- f a un DL d'ordre n en $x=a$ ssi $\exists h, \exists P / f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$
- f a un DL d'ordre n en l'infini ssi $\exists h, \exists P / f(x) = P(\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x^n})$

6.1.2 Formules de Taylor

THÉORÈME 27 (FORMULE DE TAYLOR-YOUNG)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur \mathbb{R}
 Alors il existe une fonction ϵ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$ et $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \epsilon(x)$

Notons $P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$. Alors $f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \epsilon(x)$

$P(x)$ est bien un polynôme de degré n et cette formule donne donc le développement limité de f au voisinage du point a .

En particulier, si $a=0$, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n \epsilon(x)$

Qui constitue la formule de Taylor Mac Laurin.

Il existe deux autres formules de Taylor, chacune pouvant permettre le calcul des développements limités. À titre culturel, les voici :

THÉORÈME 28 (FORMULE DE TAYLOR-LAGRANGE)

Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$.
 Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que, $\forall x \in]a, b[$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

THÉORÈME 29 (FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL)

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. Alors, $\forall x \in]a, b[$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

Ces trois formules sont données de la moins précise à la plus précise; la première est une formule locale, les deux autres sont des formules globales qui donnent le comportement de f sur un intervalle.

REMARQUE 9

La partie régulière d'un DL de fonction paire (impaire) est pair (impair).

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $x=a$, alors il est unique.

Si f admet un DL d'ordre n en a , alors elle admet des DL à tout ordre inférieur (en a).

6.1.3 Exemples usuels

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \epsilon(x) \quad \forall x / |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x) \quad \forall x / |x| < 1$$

6.2 Opérations sur les développements limités

6.2.1 Somme, produit, quotient

Soient $f(x) = P(x) + x^n \epsilon_1(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0$

THÉORÈME 30

• $(f + g)(x) = (P + Q)(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$

• $(f \times g)(x) = R(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$

R étant obtenu en calculant $P \times Q$ et en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

• $\frac{f}{g}(x) = Z(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$

Z quotient de P par Q dans la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n .

• Si $P(0) = 0$, alors $g \circ f(x) = Q \circ P(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$

en ne conservant, là encore, que les termes de degré $\leq n$.

Ex: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \epsilon(x)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \epsilon(x) \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \epsilon(x)$

Ex: $f(x) = \frac{1+x}{1-x^2} = 1 + x + x^2 + x^2 \epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) = \frac{-x+x^2}{1+x^2}$

6.2.2 Intégration et dérivation

Le principe est que l'on peut intégrer ou dériver un développement limité termes à termes.

Intégrer un reste d'ordre n donne un reste d'ordre $n+1$.

Dériver un reste d'ordre n donne un reste d'ordre $n-1$.

Exemples

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

6.3 Applications des développements limités

6.3.1 Calculs de limites

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \sin x - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

C'est une forme indéterminée du type 0/0. Soit $f(x)$ cette expression

$$1 - x \sin x - \cos x = 1 - x(x - \frac{x^3}{3!}) - (1 - \frac{x^2}{2}) + o(x^3) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$(e^x - 1)^2 = (x + \frac{x^2}{2})^2 = x^2 + o(x^2) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x)^{1/x} - e^{1-x/2}}{(1 + \tan x)^{1/x} - e^{1-x/2}}$

On a $\ln(1 + \sin x) = \ln(1 + x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$$\ln(1 + \tan x) = \ln(1 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3))$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{e^{1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2} - e^{1-\frac{x}{2}}} = \frac{e^{\frac{x^2}{6}} - 1}{e^{\frac{2}{3}x^2} - 1} + o(x^2) = \frac{\frac{x^2}{6}}{\frac{2}{3}x^2} \rightarrow \frac{1}{4}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x+1)(x+2)} - x$

Posons $u = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x) = \lim_{u \rightarrow 0} (\sqrt{(1+\frac{1}{u})(2+\frac{1}{u})} - \frac{1}{u}) = \lim_{u \rightarrow 0} (\frac{1}{u} \sqrt{1+u} \sqrt{1+2u} - \frac{1}{u})$
 $= x(1 + \frac{3}{2x} + o(\frac{1}{x}) - 1) \rightarrow \frac{3}{2}$

6.3.2 Tangentes et branches infinies

- Etudier les branches infinies de $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

On opère un DL en $+\infty$ en posant $u = \frac{1}{x}$

$$f(x) = f(\frac{1}{u}) = \frac{1}{u} e^u = \frac{1}{u} (1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3))$$

$$= \frac{1}{u} + 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{6} + o(u^2) = x + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

$\Delta : y = x + 1$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$

Par ailleurs, $f(x) - x - 1 = \frac{1}{2x}(1 + o(\frac{1}{x})) > 0$ pour x assez grand.

Ainsi, \mathcal{C}_f est au dessus de Δ en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.

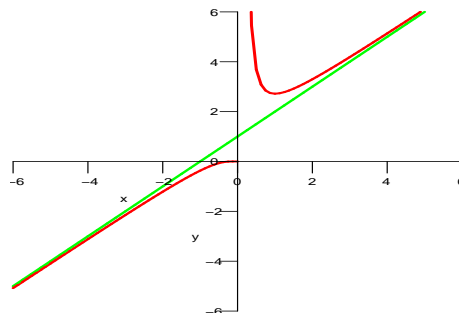


Figure 6.2: $xe^{\frac{1}{x}}$

- Etude complète de $f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{0, 1\} \quad f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \alpha \quad \text{et} \quad x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \beta$$

$f''(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \Rightarrow f$ concave avant et convexe après; en outre, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$

x	$-\infty$	0	α	1	β	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$	$f(\beta)$	$+\infty$
	$-\infty$	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow
	$-\infty$	\parallel	$-\infty$	$-\infty$	\parallel	$+\infty$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u - u^2} \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)$$

$$= \frac{1}{u} (1 + u + u^2 + o(u^2)) \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = \frac{1}{u} + 2 + \frac{5}{2}u + o(u) = x + 2 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\Rightarrow \Delta : y = x + 2$ asymptote en $\pm\infty$ (\mathcal{C}_f au dessus en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$)

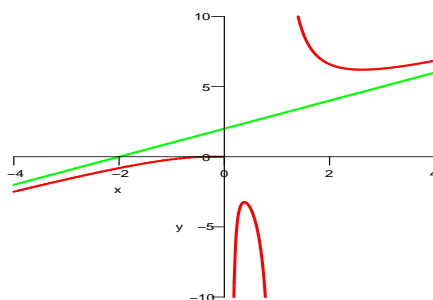


Figure 6.3: $\frac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

- Equation de la tangente en $x = 1$ à la courbe $f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x}}$

Le développement limité en $x = 1$ s'effectue en posant $u = x - 1$.

On a $f(x) = e(x - 1) - e(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$

Les termes d'ordre 1 donne l'équation de la tangente $\Delta : y = e(x - 1)$ et le terme suivant la position de la courbe par rapport à la tangente. Comme il est négatif, la tangente est toujours au dessus de la courbe.



es mathématiques sont la partie de la physique où les expériences coûtent le moins cher.
(Vladimir Arnold)

Chapitre 7

Intégrales généralisées

7.1 Définition

Nous avons déjà défini la fonction $F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$ qui est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+ . En outre, cette fonction admet une limite en $+\infty$ (la limite de la primitive de e^{-x} qui s'annule en 0).

DÉFINITION 30

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente ssi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ existe.

Cette limite s'appelle intégrale généralisée de f .

Lorsque $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, cela revient à dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe.

De même, on pose $\int_{-\infty}^a f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt$

Enfin, on pose $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Et cette intégrale existe ssi les deux autres sont convergentes.

Ex1: $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ d'après ce qui précède.

Ex2: $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$

Considérons le cas où $\alpha > 1$. On a alors $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1}$

Lorsque $\alpha < 1$, la limite est infinie et l'intégrale n'est donc pas convergente.

Enfin, lorsque $\alpha = 1$, la primitive de la fonction à intégrer est $\ln x$ qui tend vers $+\infty$ avec x et l'intégrale est donc divergente.

Ainsi, $I \text{ existe} \Leftrightarrow \alpha > 1$

REMARQUE 10

- Les propriétés de linéarité, de Chasles ou autres se généralisent à ce type d'intégrale, de même que les formules d'intégration par parties et de changement de variables (nous ne les utiliserons qu'après avoir vérifié que les intégrales en jeu convergent).
- Une intégrale peut être généralisée en a si f n'est pas définie en cette valeur; en ce cas, on pose:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt$$

Ex3: $I = \int_0^1 \ln t dt$

Cette intégrale est généralisée en 0. Une primitive de $\ln t$ est $t \ln t - t$ et donc:
 $I = \lim_{x \rightarrow 0} (-1 - x \ln x + x) = -1$ et cette intégrale est convergente !

Ex4: $I = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$

Cette intégrale est généralisée en a et en b .

Posons $y = \frac{t-a}{b-t}$. On a alors $dy = \frac{b-a}{(b-t)^2} dt$

Lorsque $t = a$, $y = 0$ et lorsque $t = b$, $y \rightarrow +\infty$ (la formule reste valable). En outre $t = \frac{by+a}{y+1}$.

On a donc $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y(b-t)^2}} \frac{(b-t)^2}{b-a} dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}} (b - \frac{by+a}{y+1}) = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y+1)\sqrt{y}}$

Il s'agit toujours d'une intégrale généralisée dans laquelle nous allons à nouveau poser $u = \sqrt{y}$ et donc $dy = 2udu$

$I = \int_0^{+\infty} \frac{2udu}{(1+u^2)u} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = 2 \arctan(u) \Big|_0^{+\infty} = \pi$

7.2 Critères de convergence

On souhaite savoir si une intégrale généralisée converge ou non (sans nécessairement savoir la calculer).

Pour cela, on a différents critères (on pensera à l'analogie avec les séries numériques).

Pour les deux critères ci dessous, **nous supposons que les fonctions sont positives.**

PROPRIÉTÉ 31 (CRITÈRE DE MAJORATION)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ avec $f(t) \leq g(t)$ pour t assez grand.

- $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge
- $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge

Ex5: Nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

$\forall t \geq 1, 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Comme la seconde fonction est intégrable en $+\infty$, la première l'est aussi.

Ex6: Nature de $\int_0^{+\infty} e^{t^2} dt$

$\forall t \geq 1, 0 \leq e^t \leq e^{t^2}$. Comme la première intégrale diverge, la seconde aussi.

Ce critère est aussi valable si l'intégrale est généralisée en $-\infty$ ou bien en $x = b$ (nous ne l'appliquerons alors que si f et g sont continues et positives sur $[c, b[$ avec $c > a$).

Ex7: Nature de $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-t}} dt$

C'est une intégrale généralisée en 1. $\forall x \in]0, 1[, \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$.

Puisque $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge, la seconde intégrale aussi.

PROPRIÉTÉ 32 (CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE)

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, +\infty[$

Si $f \stackrel{+}{\sim} g$ alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature

Là encore ce critère est aussi valable si l'intégrale est généralisée en $-\infty$ ou en $x = b$ (nous ne l'appliquerons que si f et g sont continues et positives sur un intervalle $[c, b[$ avec $c > a$).

Ex8: Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

$\frac{x^2}{1+x^4} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$ qui est intégrable en l'infini (intégrale de Riemann).

Les fonctions étant positives, le critère s'applique et l'intégrale ci dessus existe.

Ex9: Nature de $\int_0^1 \frac{dt}{\sin \sqrt{1-t}}$

Cette intégrale est généralisée en 1. Au voisinage de 1, on a $\frac{1}{\sqrt{1-t}} \sim \frac{1}{\sin \sqrt{1-t}}$

Ces fonctions sont positives et continues sur $]0, 1[$. Comme la première intégrale converge, la seconde aussi.

Ex10: Nature de $\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$

L'intégrale est généralisée en 0 et en 1.

Au voisinage de 0, on a $\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} \sim \frac{1}{t}$ et ces fonctions sont positives sur $]0, 1[$.

Puisque la seconde intégrale diverge, la première aussi.

Ex10: Nature de $\int_0^\pi \frac{dt}{(1-\cos t)^\alpha}$

La fonction à intégrer est positive sur $]0, \pi[$ et $1-\cos t \sim \frac{t^2}{2}$.

Ainsi, $f(t) \sim \frac{2}{t^{2-\alpha}}$ qui est intégrable ssi $\alpha < \frac{1}{2}$

PROPRIÉTÉ 33 (CRITÈRE D'ABEL)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, +\infty[$
 On suppose que f est décroissante et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$
 Soit g une fonction de classe C^0 sur $[a, +\infty[$ vérifiant la propriété:
 $\exists K > 0 / \forall x \geq a, \left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq K$
 Alors $\int_a^{+\infty} f(t) \times g(t) dt$ converge

Dans ce critère, on ne suppose plus que les fonctions sont positives.

Ce critère ne permet pas de savoir si une intégrale est divergente. Lorsque les hypothèses ne sont pas satisfaites, on ne peut rien conclure.

Ex12: Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$

Posons $g(t) = \sin t$ et $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$; f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, décroissante et tend vers 0. Par

ailleurs, g est C^0 et $\left| \int_a^x \sin t dt \right| = |1 - \cos x| \leq 2 \forall x > 0$.

D'après le critère, l'intégrale converge en $+\infty$.

Elle est aussi généralisée en 0 où la fonction à intégrer est équivalente à \sqrt{t} et est donc aussi intégrable.

Si aucun critère ne s'applique, on peut effectuer un développement limité de la fonction à intégrer au voisinage de la borne:

Ex13: Nature de $\int_1^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \right) dt$

On a $\sin \frac{1}{t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{6t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$ et la fonction à intégrer est donc $f(t) = -\frac{1}{6t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$

Il s'agit de la somme de deux fonction intégrables en $+\infty$ et l'intégrale existe donc.

7.3 Applications

Comme pour les intégrales définies, on peut utiliser les intégrales généralisées pour calculer des aires et des volumes. Les théorèmes vus dans la leçon précédente restent valables à condition d'avoir à faire à des intégrales convergentes.

Ex: Volume et aire d'une trompette infinie.

Considérons le volume de révolution engendré par la courbe $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$. Lorsque l'on fait tourner cette courbe autour de l'axe (Ox) , on obtient un volume de révolution ressemblant à une trompette infinie.

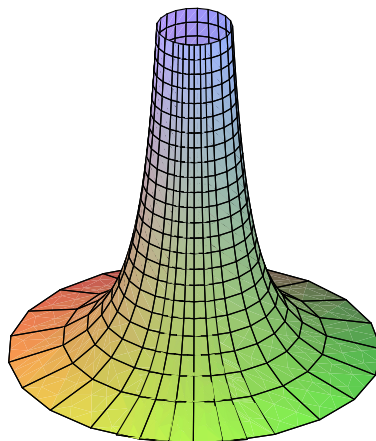


Figure 7.1: volume de révolution de la courbe $1/x$

Le volume est donné par $\mathcal{V} = \int_1^{+\infty} \pi f(x)^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{x^2} dx = -\left[\frac{\pi}{x}\right]_1^{+\infty} = \pi$

L'aire de la surface entourant ce volume se calcule également:

$$\mathcal{S} = \int_1^{+\infty} 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^4}} dx$$

La fonction à intégrer est positive et est équivalente à $\frac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$. De fait, l'aire est infinie. Nous obtenons donc ce résultat curieux: le volume a une valeur finie, mais la surface qui l'englobe est infinie....

Chapitre 8

Equations différentielles

8.1 Introduction

Une équation différentielle est une équation liant une fonction à l'une ou plusieurs de ses dérivées. La solution d'une telle équation est une fonction et l'intervalle sur lequel elle est définie. Habituellement, on note la fonction y ou $y(x)$. Si l'équation met en jeu $y^{(k)}$, $y^{(k-1)}$, ..., y' , y on dit qu'elle est d'ordre k . Résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions sur un intervalle donné.

8.2 Equation d'ordre 1

8.2.1 Equation à variables séparables

Elles sont de la forme $y'a(y) = b(x)$

On cherche les fonctions $y(x)$ dérivables qui satisfont cette égalité.

On intègre membre à membre en posant $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow A(y) = B(x) + k, k \in \mathbb{R} \Rightarrow y = A^{-1}(B(x) + k)$.

En notant A et B des primitives de a et b . Les solutions sont définies lorsque $B(x) + k \in \mathcal{D}_{A^{-1}}$

Ex1: $y' \cos y - 2x = 0$

$$\Rightarrow y' \cos y = 2x \Rightarrow \int \cos y dy = \int 2x dx + k \Rightarrow \sin y = x^2 + k \Rightarrow y = \arcsin(x^2 + k)$$

Pour k fixé, la solution est définie pour $x^2 + k \in [-1, 1]$

Ex2: $y - \frac{y'}{2x} = 1$

$$\Rightarrow 2x(y - 1) = y' \Rightarrow \ln|y - 1| = x^2 + k \Rightarrow |y - 1| = Ke^{x^2} \text{ avec } K \geq 0.$$

$$\Rightarrow y - 1 = ke^{x^2} \text{ en choisissant alors } k \in \mathbb{R} (k = \pm K).$$

Ainsi, $y = 1 + ke^{x^2}, k \in \mathbb{R}$ et les solutions sont définies sur \mathbb{R}

Ex3: $y' - 4y = 0$

$$\Leftrightarrow y'/y = 4 \Leftrightarrow y = ke^{4x}; k \in \mathbb{R}$$

Chaque équation possède une infinité de solutions (une pour chaque valeur de k). Les familles de fonctions ci-dessous permettent d'en représenter plusieurs sur le même graphique.

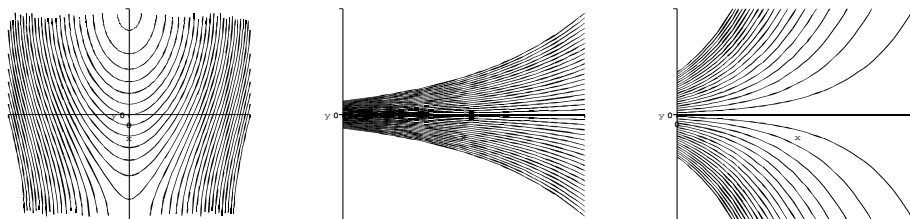


Figure 8.1: Famille de solutions des exemples 1,2 et 3

8.2.2 Equation linéaire

La forme générale est $y' + a(x)y = b(x)$ (E). On cherche toutes les fonctions deux fois dérivables $y(x)$ qui satisfont (E)
 $b(x)$ est le second membre de l'équation. L'équation est dite homogène lorsque ce second membre est nul. On note cette équation (E*). Pour résoudre (E) on résout (E*) qui est à variables séparables et s'intègre en $y = Ke^{-A(x)}$; $k \in \mathbb{R}$ et $A(x) = \int a(x)dx$

THÉORÈME 31

La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à la solution générale de (E*) une solution particulière de (E)

Méthode de la variation de la constante

Pour rechercher une solution particulière de (E) on suppose que la solution est de la forme $k(x)e^{-A(x)}$ où $k(x)$ n'est plus une constante, mais une fonction de classe C^1 que l'on doit expliciter.

Ex4: $\sin x \times y' - \cos x \times y = 1$

L'équation homogène est $y' = \cotan x \times y \iff y = k \sin x \Rightarrow y' = k' \sin x + k \cos x$ et k est solution de:

$$\sin x(k' \sin x + k \cos x) - \cos x(k \sin x) = 1 \Rightarrow k' \sin^2 x = 1 \Rightarrow k(x) = -\cotan x + cte$$

La solution particulière est donc la fonction $y_0(x) = -\cotan x \times \sin x = -\cos x$

On en déduit alors la solution générale de (E) qui est $y(x) = k \sin x - \cos x$, $k \in \mathbb{R}$

Ex5: $y' + 2y = e^{-x}$

L'équation homogène associée est $y' + 2y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = ke^{-2x}$

On pose donc $y(x) = k(x)e^{-2x} \Rightarrow k'e^{-2x} = e^{-x} \Rightarrow k' = e^x \Rightarrow k = e^x + k$

$\Rightarrow y(x) = e^{-x} + ke^{-2x}$; $k \in \mathbb{R}$ qui est la solution générale de l'équation avec second membre.

Cas où l'on connaît déjà une solution particulière

Il suffit alors de faire la somme de la solution générale de l'équation homogène avec cette solution particulière.

Ex6: $y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{x}$

La solution de l'équation homogène est $y(x) = k/x$

$y(x) = 2$ est solution de façon évidente; la solution générale est donc $y = k/x + 2$

Ex7: $y' + 2y = 2x - 1$

La solution de l'équation homogène est $y(x) = ke^{-2x}$

La fonction $y(x) = x - 1$ est solution évidente de l'équation avec second membre. On en déduit alors que la solution générale de l'équation avec second membre est $y(x) = ke^{-2x} + x - 1$

Second membre particulier

• Si $b(x) = P_n(x) \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $y_0(x)$ sera aussi un polynôme de degré n ou $n + 1$.

Ex8: $y' + 2y = 4x^2$

La solution de l'équation homogène est la même que dans l'exemple précédent. Pour la solution particulière, on recherche un polynôme de degré 2, dont la forme la plus générale est

$y_0(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $y'_0(x) = 2ax + b$ et en injectant ces deux expressions dans l'équation, on obtient $ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) = x^2$

cette relation devant être vérifiée pour tout x réel, on doit avoir $2a = 4$, $a = -b$ et $b + 2c = 0$, de sorte que $y_0(x) = 2x^2 - 2x + 1$

• Si $b(x) = P_n(x)e^{kx}$ alors $y_0(x)$ est de la forme $Q(x)e^{kx}$ où $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ est de degré n ou $n + 1$.

Ex9: $y' + 2y = xe^{-x}$

La solution particulière devra être cherchée sous la forme $(ax + b)e^{-x}$. Comme ci-dessus, en dérivant, puis en injectant l'expression et en identifiant le tout, on obtient $y_0(x) = (x - 1)e^{-x}$

La solution générale est donc $y(x) = (x - 1)e^{-x} + ke^{-2x}$

• Si $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ on forme, à partir de l'équation homogène, les équations E_1 et E_2 dont les seconds membres sont respectivement $b_1(x)$ et $b_2(x)$. Par linéarité, la solution générale de (E) est la somme de la solution générale de E_1 et de celle de E_2 .

Ex10: $y' + 2y = 4x^2 + xe^{-x}$

Pour obtenir la solution, il suffit d'additionner les solutions particulières des deux exemples précédents. La solution générale devient $y(x) = ke^{-2x} + (2x^2 - 2x + 1) + (x - 1)e^{-x}$

8.2.3 Exemples d'applications

Circuit RC

On considère une cellule RC, dont la maille est parcourue d'un courant $i(t)$ dépendant du temps t . Nous supposons que $i(t)$ est continu au cours du temps. Nous noterons $v(t)$ la tension de sortie de la cellule (qui est également la tension aux bornes du condensateur).

La quantité d'électricité emmagasinée par les armatures du condensateur est proportionnelle, d'après la loi de Faraday, à la tension aux bornes de ce condensateur; le coefficient de proportionnalité C étant par définition la capacité du condensateur (en Farad). Ainsi,

$$q(t) = Cv(t)$$

Maintenant l'intensité $i(t)$ est égale à la variation de la quantité d'électricité (que l'on suppose dérivable) par rapport au temps:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t) = C \frac{dv}{dt}(t)$$

Aux bornes de la résistance, la loi d'Ohm indique que la tension est proportionnelle à l'intensité du courant qui parcourt la résistance: $v(t) = Ri(t)$ où R est la résistance en Ohm.

La figure ci-dessous représente le montage RC en série où $e(t)$ est la tension à l'entrée de la cellule (on supposera que $v(0) = 0$).

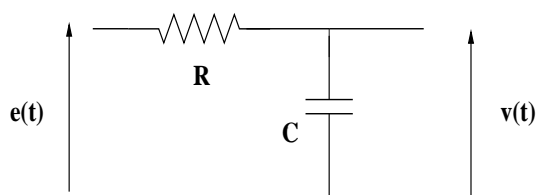


Figure 8.2: Cellule RC

La loi des mailles montre que l'équation qui pilote ce circuit est donc donnée par

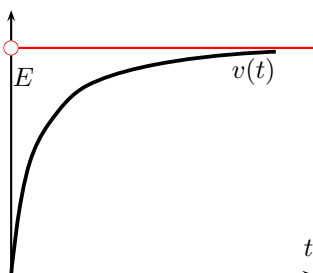
$$e(t) = Ri(t) + v(t)$$

$$\iff RC \frac{d}{dt}v(t) + v(t) = e(t)$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre un. L'équation homogène associée admet pour solution $v(t) = ke^{-t/RC}$, $k \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer une solution particulière, il faudrait connaître l'expression de $e(t)$. Supposons, par exemple, que $e(t)$ soit une tension constante égale à E . En ce cas, E est solution particulière. Par hypothèse, on a $v(0) = 0$ ce qui donne $k = E$ et la solution générale de l'équation est donc

$$v(t) = E(1 - e^{-t/RC})$$



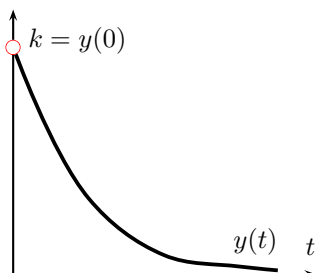
Le temps $\tau = RC$ s'appelle constante de temps du circuit et mesure la vitesse de charge du condensateur. Se reporter au TD correspondant pour plus de précisions.

Diffusion d'un médicament

Un médicament est injecté dans un organisme. Soit $y(t)$ la quantité présente au temps t ; on peut montrer que l'organisme élimine le médicament à une vitesse proportionnelle à la quantité présente à t . Ainsi, $y(t)$ est donné par l'équation différentielle:

$$y'(t) + \alpha y(t) = 0$$

La solution de cette équation linéaire et homogène est $y(t) = ke^{-\alpha t}$. k représente la quantité initiale de produit injecté tandis que α caractérise la vitesse d'évacuation de ce produit.



Désintégrations d'atomes radioactifs. ☢☢

Les atomes d'un élément radioactif se désintègrent au cours du temps. Soit $N(t)$ le nombre d'atomes à l'instant t . Les lois de la physique montrent que la vitesse de désintégration est proportionnelle au nombre d'atomes et que ce phénomène est piloté par une équation différentielle de la forme $N'(t) + \lambda N(t) = 0$ où λ est une constante ne dépendant que de la nature de l'élément.

Cette équation admet pour solutions $N(t) = ke^{-\lambda t}$ où k représente le nombre d'atomes à $t = 0$.

La demi-vie d'un élément radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié de la quantité initiale d'atomes ne se soit désintégrée. Si T est cette durée, on doit avoir alors $N(t + T) = N(t)/2$. De l'expression ci-dessus, on voit facilement que $T = \ln 2 / \lambda$. Le nombre moyen de désintégration par seconde se mesure en becquerels (Bq). Une des applications de ce phénomène est la datation de fossiles ou d'objets anciens à l'aide du carbone 14. D'autres éléments radioactifs ont permis d'évaluer de cette façon l'âge de la terre.

On pourrait donner beaucoup d'autres exemples d'applications en physique, mécanique, électronique, biologie, économie. En fait, les équations différentielles sont parmi les outils les plus importants des mathématiques appliquées et il est difficile de trouver un domaine où elle n'interviennent pas. Quelques exemples sont donnés en TD.

8.3 Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

8.3.1 Forme des solutions

Elles sont de la forme $y'' + ay' + by = h(x)$ (E) où $h(x)$ est le second membre

L'équation homogène associée est $y'' + ay' + by = 0$ (E^*)

Pour résoudre cette équation on forme l'équation caractéristique: $r^2 + ar + b = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré que l'on peut facilement résoudre:

- Si $\Delta > 0$ on note r_1 et r_2 les racines; la solution de (E^*) est $z(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ex11: $y'' + 3y' + 2y = 0$ a pour solutions $\alpha e^{-x} + \beta e^{-2x}$

- Si $\Delta = 0$ on note r la solution double; la solution de (E^*) est $z(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ex12: $y'' - 2y' + y = 0$ a pour solutions $(\alpha x + \beta)e^x$

- Si $\Delta < 0$ on note $u \pm iv$ les racines complexes; la solution de (E^*) est $e^{ux}(\alpha \cos(vx) + \beta \sin(vx))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ex13: $y'' + y = 0$ a pour solutions $e^x(\alpha \cos x + \beta \sin x)$

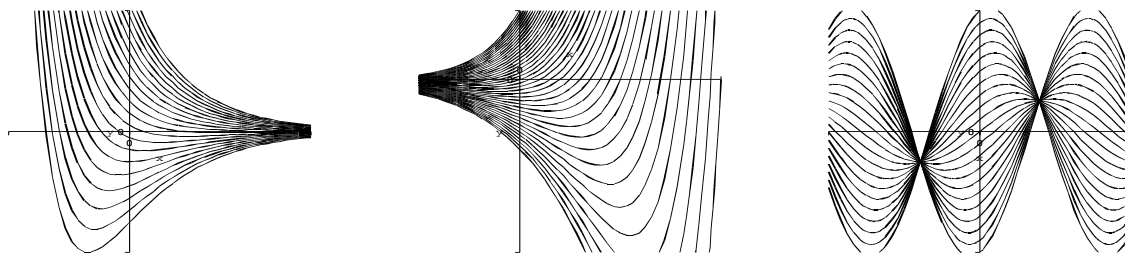


Figure 8.3: Famille de solutions des exemples 11, 12 et 13

THÉORÈME 32

Toute solution de (E) est de la forme $y(x) = z(x) + y_0(x)$ avec:

- $z(x)$ solution générale de l'équation homogène (E^*)
- $y_0(x)$ solution particulière de l'équation (E) avec second membre

Le problème se ramène donc à trouver une solution particulière de (E) .

Plusieurs cas méritent d'être retenus:

- Si le second membre $h(x) = P_n(x)e^{kx}$ où P_n est un polynôme de degré n et $k \in \mathbb{R}$:
- Si k n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution sera de la forme $Q_n(x)e^{kx}$ avec $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$
- Si k est racine simple, la solution sera de la forme $xQ_n(x)e^{kx}$
- Si k est racine double, la solution sera de la forme $x^2Q_n(x)e^{kx}$

Exemples:

Ex11: $y'' + 3y' + 2y = 4x$

Le second membre $4x$ est de la forme $P_n(x)e^{kx}$ avec $k = 0$ et $P_n(x) = 4x$. Comme k n'est pas racine de l'équation caractéristique, nous chercherons une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, ie $ax + b$. Après calculs et identification, on trouve $a = 2$ et $b = -3$ et la solution générale de l'équation est $\alpha e^{-2x} + \beta e^{-x} + 2x - 3$

Ex12: $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$

Le second membre e^{-2x} est de la forme $P_n(x)e^{kx}$ avec $k = -2$ et $P_n(x) = 1$, qui est un polynôme de degré 0. Comme k est racine simple de l'équation caractéristique, nous chercherons une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 multiplié par l'exponentielle, ie $(ax + b)e^{-2x}$. Après calculs et identification, on trouve $a = -1$ et $b = -1$ et la solution générale de l'équation est $\alpha e^{-2x} + \beta e^{-x} - xe^{-2x}$

Ex13: $y'' - 2y' + y = 6xe^x$

Le second membre $6xe^x$ est de la forme $P_n(x)e^{kx}$ avec $k = 1$ et $P_n(x) = 6x$, qui est un polynôme de degré 1. Comme k est racine double de l'équation caractéristique, nous chercherons une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3 multiplié par l'exponentielle, ie $(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$. Après calculs et identification, on trouve $a = 1$ et $b = c = d = 0$ et la solution générale de l'équation est $(x^3 + \alpha x + \beta)e^x$

- Si $h(x) = P_n(x) \cos kx$ ou $h(x) = P_n(x) \sin kx$, on cherchera la solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de $\cos kx$ et $\sin kx$, ou bien de $x \cos kx$ et $x \sin kx$ ou bien enfin de $x^2 \cos kx$ et $x^2 \sin kx$ selon que l'équation caractéristique possède $\pm ik$ comme racine.
- Si $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, on procède comme dans le paragraphe précédent en formant deux équations avec chacun des seconds membres et l'on ajoute leur solution générale.

Ex14: $y'' + y = \sin x$

L'équation homogène associée est $y'' + y = 0$ dont les solutions sont de la forme $y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Pour déterminer une solution particulière, nous chercherons une fonction de la forme $y_0(x) = a \cos x + b \sin x$

Après de longs calculs (que vous êtes priés de faire), on s'aperçoit qu'aucune valeur de a et b ne convient et qu'il est donc impossible de trouver une solution particulière sous cette forme. On cherche alors une solution sous la forme $y_0(x) = x(a \cos x + b \sin x)$. En dérivant puis en injectant cette expression dans l'équation initiale, on constate que $a = -1/2$ et $b = 0$ conviennent.

Les solutions de l'équation générale sont donc $y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x - \frac{x}{2} \cos x$

Si par hasard aucune solution sous cette forme ne pouvait être trouvée, il aurait fallu chercher la solution particulière sous la forme $y_0(x) = x^2(a \cos x + b \sin x)$. En fait, on aurait pu voir dès le départ la forme exacte de la solution: en exprimant le second membre sous la forme d'une exponentielle complexe, on a $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. On s'aperçoit alors que i et $-i$ sont solutions simples de l'équation caractéristique et, d'après les résultats ci-dessus, qu'il faut chercher la solution particulière sous la forme $x \times$ une combinaison linéaire de \sin et \cos .

8.3.2 Exemples d'applications

Mouvement d'un ressort

Un objet de masse m est suspendu à un ressort de constante de raideur k . On néglige les forces de frottement et l'on s'intéresse au mouvement vertical $y(t)$ de l'objet. On fixe comme origine du repère la position au repos de l'objet et l'on dirige l'axe (Oy) vers le bas. Le théorème fondamental de la dynamique nous dit que $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ où \vec{F} est la résultante des forces et $\vec{\gamma}$ l'accélération. La force de rappel du ressort tend à ramener celui-ci à sa position au repos: s'il est étiré, la force de rappel le ramène en direction du haut et s'il est contracté, la force de rappel est dirigée vers le bas. Ainsi, on a toujours $m\gamma = -ky(t) + mg$, $y(t)$ représentant la différence entre la longueur au repos et la longueur au temps t . On obtient donc l'équation différentielle

$$my''(t) + ky(t) = mg$$

où g est la constante de la gravitation universelle.

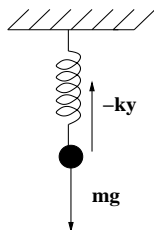


Figure 8.4: Ressort

L'équation homogène associée à cette équation est $my''(t) + ky(t) = 0$

k et m étant positifs, on peut poser $\omega^2 = \frac{k}{m}$, ce qui permet de d'écrire l'équation sous la forme $y'' + \omega^2 y = 0$

On a vu que les solutions sont de la forme $\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$

Pour trouver la solution particulière de l'équation avec second membre, on peut remarquer que la fonction constante mg/k vérifie l'équation, ce qui permet de donner la solution générale de l'équation avec second membre:

$$y(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t + \frac{mg}{k}$$

Circuit RLC

Considérons la figure ci-dessous représente une cellule RLC en série. $e(t)$ est la tension à l'entrée de la cellule et $v(t)$ est la tension en sortie de la cellule (c'est aussi la tension aux bornes du condensateur). D'après la loi des mailles, en notant $v_R(t)$, $v_L(t)$ et $v_C(t)$ les tensions aux bornes des trois composants, on a $e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$

De la même façon que dans le premier paragraphe,

$$v_R(t) = Ri(t) = \frac{dv}{dt}(t)$$

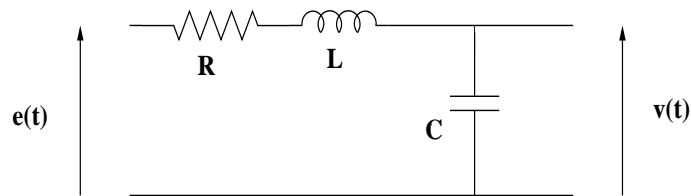


Figure 8.5: Circuit RLC

Par ailleurs, à l'intérieur de la bobine, le courant $i(t)$ crée un flux $\phi(t)$ dont la variation induit, d'après la loi de Lenz, une tension $\frac{d\phi}{dt}(t)$ qui s'oppose au courant qui lui a donné naissance. Dans la bobine, l'intensité est proportionnelle au flux: $\phi(t) = Li(t)$, L étant l'inductance qui s'exprime en Henry. Nous avons donc

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt}(t) = L \frac{d^2v}{dt^2}(t)$$

En supposant que la tension $v(t)$ est deux fois dérivable par rapport au temps. On obtient alors l'équation qui pilote le circuit:

$$LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = e(t)$$

Posons $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (qui est la pulsation du circuit) et $\alpha = \frac{R}{2L}$ (qui s'appelle le facteur d'amortissement).

Posons également $\lambda^2 = \alpha^2 - \omega^2$

L'équation homogène associée peut s'écrire $v'' + 2\alpha v' + \omega^2 v = 0$ et l'équation caractéristique est donc $r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0$. La nature des solutions dépend du signe de $\alpha - \omega$. Trois cas se présentent:

- Si $\alpha > \omega$, les solutions de l'équation homogène sont $ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t}$
- Si $\alpha < \omega$, les solutions de l'équation homogène sont $a \cos \lambda t + b \sin \lambda t$
- Si $\alpha = \omega$, les solutions de l'équation homogène sont $(at + b)e^{\alpha t}$

La solution particulière dépend de l'expression de $e(t)$. Nous en verrons quelques exemples en travaux dirigés.

Partie II

Semestre 2

Chapitre 9

Séries numériques

Notes historiques

Les grecs étudiaient déjà les séries infinies au Vème siècle avant JC: Nous avons déjà parlé de Zénon et du paradoxe d'Achille et la tortue où apparaît la notion de série géométrique $\sum 1/2^n$. Au XIVème siècle, Nicolas Oresme avait déjà démontré, en effectuant des regroupements de termes, que la série harmonique $\sum 1/n$ divergeait. Euler a trouvé la somme de la série $\sum 1/n^2$ en 1736, mais sa démonstration était fautive. Puis grâce aux travaux de Fourier au début du XIXème siècle, on a pu calculer la somme de séries du type $\sum 1/n^4$, $\sum 1/n^6$, etc. Par contre, la somme de la série $\sum 1/n^3$ semblait ne pas vouloir s'exprimer facilement et il a fallu attendre 1979 pour que Roger Apéry démontre que ce nombre était irrationnel. Bernhard Riemann a étudié les séries qui portent son nom dans la seconde moitié du XIXème siècle, en s'intéressant à la fonction $\zeta(x) = \sum 1/n^x$. Cette fonction est le sujet d'un des problèmes les plus célèbres des mathématiques: la conjecture de Riemann. Celle-ci n'est toujours pas démontrée à ce jour et un prix d'un million de dollars est prévu pour la personne qui prouvera que les zéros non réels de cette fonction ont tous une partie réelle égale à $1/2$.

Pourquoi dit-on de certaines séries qu'elles sont harmoniques ? Dans la grèce antique, Pythagore avait remarqué que le son produit par une demi-corde tendue était deux fois plus aigu que le son produit par la corde entière. L'octave est donc défini comme l'écart entre deux notes dont le rapport des hauteurs est de $2/1$, la quinte lorsque le rapport est de $3/2$, etc. Les grecs avaient donc défini sept sons obtenus par division de la longueur d'une corde par moitié, tiers, quart, etc. et la succession des intervalles formait l'octave. Ceci est à la base de la définition de gamme diatonique en musique. On parle alors d'harmonie (et donc de série harmonique) pour des termes consécutifs qui sont des rapports de proportions simples.

9.1 Définition et convergence

9.1.1 Somme partielle d'une série numérique

DÉFINITION 31

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique.
La série numérique de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

S_n est la nième somme partielle de la série.

u_n est le terme général de la série.

On notera la série de façon générique par $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$.

On voit qu'à toute série est associée une unique suite et vice versa; en effet:

Si $(S_n)_{n \geq 0}$ est une série, son terme général est donné par la suite $u_n = S_n - S_{n-1} \quad \forall n \geq 1$.

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

Il s'agit de la série harmonique de terme général $u_n = \frac{1}{n}$

On a donc $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et nous verrons plus tard que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

Ex: $\sum_{n \geq 0} q^n$ avec $q \neq 1$

Il s'agit d'une série géométrique de terme général $u_n = q^n$

On sait que $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$

Il s'agit d'une série de Riemann dont le terme général est $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

9.1.2 Convergence d'une série

DÉFINITION 32

La série de terme général u_n converge si et seulement si $(S_n)_{n \geq 0}$ est une suite convergente.
Sa limite s'appelle alors la somme de la série et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Ex: $\sum_{n \geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ auquel cas $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$

REMARQUE 11

- On ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.
- Le reste d'ordre n d'une série numérique est $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et l'on a $S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \forall n$

La série converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$

- pour qu'une série converge, il est nécessaire que son terme général tende vers 0.
En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge}$$

Ex: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge car $u_n = (-1)^n$ ne tend pas vers 0.

Le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ n'est par contre pas une condition suffisante de convergence:

Ex $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Cette série a pour terme général $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Néanmoins, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sqrt{1} - 0 + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \dots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

On conclut ce paragraphe en précisant que la somme d'une série n'est autre que la limite la suite de ses sommes partielles.

9.1.3 Opérations sur les séries

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors la série de terme général $w_n = u_n + v_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$


Par ailleurs, la somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente.

Si les deux séries divergent, on ne peut rien conclure de leur somme (elle peut, par exemple, être nulle).

De même, la série de terme général λu_n converge vers $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

9.2 Critères de convergence

9.2.1 Séries à termes positifs

 Les théorèmes suivants ne sont valables que pour des séries dont les termes généraux sont de signe constant à partir d'un certain rang.

Nous raisonnerons sur une série $\sum u_n$ dont le terme général u_n est strictement positif, tout en n'oubliant pas que les résultats sont valables si $u_n < 0$ ou si u_n ne change plus de signe à partir d'un certain rang.

THÉORÈME 33 (CRITÈRE DE CAUCHY)

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

- si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge
- si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge
- si $l = 1$ alors on ne peut rien conclure

Ex: $\sum_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$; on a $u_n^{\frac{1}{n}} = (1 - \frac{1}{n})^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge.

Ex: $\sum_{n \geq 1} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$; on a $u_n^{\frac{1}{n}} = (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} = e > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

Ex: $\sum_{n \geq 1} (1 + \frac{1}{n})^n$; on a $u_n^{\frac{1}{n}} = (1 + \frac{1}{n}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} = 1 \Rightarrow$ on ne peut conclure avec ce critère;

par contre, on sait que u_n tend vers e et donc le terme général de la série ne tend pas vers 0: elle diverge.

Ex: $\sum_{n \geq 0} (e^{-n^2})$; $u_n^{1/n} = e^{-n} \rightarrow 0$ et la série converge donc.

THÉORÈME 34 (CRITÈRE DE D'ALEMBERT)

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

- si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge
- si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge
- si $l = 1$ alors on ne peut rien conclure

Ex: $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$; on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 \Rightarrow \sum u_n$ converge.

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n^2}$; on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2(\frac{n}{n+1})^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$; on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow$ on ne peut rien conclure.

THÉORÈME 35 (CRITÈRE DE RIEMANN)

• si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$ avec $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge

• si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge

Ex: $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}}$; on a $n^2 u_n = e^{-\sqrt{n}(1-2\frac{\ln n}{\sqrt{n}})} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0 \Rightarrow \sum u_n$ converge.

Ex: $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{\ln n}}$; on a $nu_n = e^{-\sqrt{\ln n}(1-\frac{1}{\sqrt{\ln n}})} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = +\infty \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

THÉORÈME 36 (COMPARAISON AVEC UNE INTÉGRALE)

Soit I un intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$
 Soit $\sum u_n$ une série telle que $u(x)$ soit une fonction continue, positive et décroissante de x sur I .
 Soit $U(x)$ une primitive de $u(x)$ sur I .
 Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x)$ existe $\iff \sum u_n$ converge

De plus, on a la majoration $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{n+1}^x u(t)dt < R_n < \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^x u(t)dt$

Où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n de la série (la figure ci dessous illustre l'inégalité).

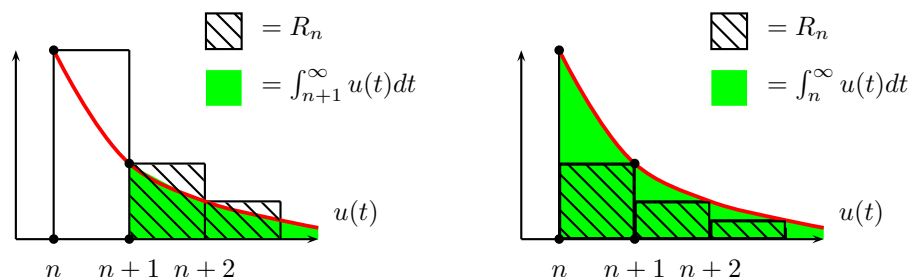


Figure 9.1: Encadrement du reste d'une série par une intégrale

Ex fondamental: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

On a $u(x) = \frac{1}{x^\alpha}$; une primitive de $u(x)$ est $U(x) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$

Cette fonction admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$ auquel cas la limite vaut 0. Ainsi:

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

Nous en déduisons en particulier que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente.

THÉORÈME 37 (CRITÈRE DE MAJORATION)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \leq v_n \forall n \geq N$
 • Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
 • $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Ex: $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$; on a $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ et comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge.

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$; on a $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

THÉORÈME 38 (CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \stackrel{+\infty}{\sim} v_n$
 Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Ex: $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2(n^2-1)}}$; on a $u_n \sim \frac{1}{n^2}$; comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge alors $\sum u_n$ aussi

Ex: $\sum_{n \geq 2} \ln(1 + \frac{1}{n})$; on a $u_n \sim \frac{1}{n}$; comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors $\sum u_n$ aussi

9.2.2 Séries alternées

Une série est alternée lorsque son terme général est alternativement positif ou négatif. On peut alors l'écrire sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0 \forall n \geq 0$

THÉORÈME 39 (CRITÈRE DES SÉRIES ALTERNÉES)

Avec les notations ci dessus, si:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
- $(v_n)_{n \geq 0}$ décroissante
- $v_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

Alors $\sum u_n$ est convergente et son reste $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$; on a $v_n = \frac{1}{n}$ qui vérifie les hypothèses: $\sum u_n$ converge.

Ex: $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

Il s'agit d'une série alternée pour laquelle $v_n = \frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ n'est pas monotone.

On peut montrer que cette série est divergente (cf dernier paragraphe).

Ceci montre que les trois hypothèses du théorème sont importantes.

9.2.3 Séries dont le terme général est de signe quelconque

On ne peut plus utiliser les critères de convergence.

Par contre, si la série de terme général $|u_n|$ converge (sur laquelle on peut par contre utiliser les critères de convergence), alors $\sum u_n$ converge aussi (on parle de série absolument convergente).

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{(-1)^n \sqrt{n} + n^2}$; on a $|u_n| \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ et $\sum u_n$ converge donc

THÉORÈME 40 (CRITÈRE D'ABEL)

Considérons la série de terme général $u_n v_n$ avec:

- v_n est une suite positive, tendant vers 0 en décroissant.
- u_n est le terme général d'une série dont les sommes partielles sont bornées. Alors $\sum u_n v_n$ converge

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ converge car $\frac{1}{n}$ est positive, décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.

Par ailleurs, $|\sum_{k=0}^n \sin k| \leq \frac{1}{\sin(1/2)} \leq 3$ (le prouver).

Les hypothèses du critère sont vérifiées, donc $\sum u_n$ converge.

Ce critère s'utilise essentiellement avec des séries trigonométriques, le terme en w_n étant alors formé par un sinus, un cosinus ou une exponentielle complexe.

Quand aucun critère ne s'applique, il reste la possibilité d'utiliser des développements limités. Ceci peut se faire quelque soit le signe du terme général et offre une méthode puissante pour montrer la convergence ou la divergence. En voici un exemple:

Ex: Nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

Soit u_n le terme général.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

u_n s'écrit comme la somme de 4 séries. La première est une série alternée convergente, la seconde est une série harmonique divergente, la troisième est majorée par une série de terme général $k/n^{3/2}$ et converge également. La dernière est négligeable devant $1/n^{3/2}$ et elle converge donc. Puisque la somme d'une série convergente et divergente est divergente, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Regroupements de termes dans une série

Nous avons vu en début de leçon que l'on peut modifier un nombre fini de termes dans une série sans en changer la nature. De même, effectuer un regroupement d'un nombre fini de termes ne change pas non plus la somme de la série.

Il n'en va pas de même lorsque l'on veut effectuer des regroupements d'une infinité de termes.

Ex: Considérons la série $\sum_n (-1)^n$

Cette série est divergente et l'on ne peut donc parler de sa somme. Notons néanmoins $S = \sum (-1)^n$ façon formelle:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$$\Rightarrow S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S \Rightarrow S = 1/2$$

Ce qui est absurde puisque la série diverge. On peut même faire pire:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

Ces deux calculs sont faux car on n'a pas le droit de regrouper ainsi des termes dans une série infinie.

En effectuant de tels regroupements, on peut changer la valeur de la somme, voire même la nature de la série.

En fait, pour pouvoir effectuer de tels regroupements, il est nécessaire que la série soit absolument convergente. Nous admettrons ce résultat.

Des néophytes recouvrent un étang en doublant de surface chaque jour. Un jour J, ils en recouvrent la moitié. Au bout de combien de temps vont-ils recouvrir la totalité de l'étang ?

Chapitre 10

Séries de Fourier

Introduction

Le problème historique de la représentation d'une fonction périodique par une série trigonométrique a été posé par Euler (1753) et repris par Joseph Fourier (1768-1830) dans sa "théorie analytique de la chaleur" (1807). Comme expliqué dans l'article de pour la science, il s'agit d'approcher un signal périodique par une superposition de fonctions sinusoïdales qui forment son spectre. La décomposition d'une série de Fourier intervient dans tous les domaines où sont en jeu des phénomènes vibratoires: thermodynamique (équation de la chaleur), mécanique (équation des cordes vibrantes, équation de la houle), télécommunications (équations des ondes et des radiotélégraphistes), mécanique quantique (équation de Shrödinger qui gouverne l'atome), etc...

10.1 Série de Fourier d'une fonction périodique

10.1.1 Polynôme et série trigonométrique

DÉFINITION 33

On appelle série trigonométrique une série dont le terme général est de la forme:
 $u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ suites réelles.

En posant $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ pour $n > 0$ et $c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} - ib_{-n})$ pour $n < 0$,

on peut écrire la série sous la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ suite de nombres complexes.

On a alors aussi la relation $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$

On rappelle que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et l'on définit de façon générale les fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ appelées caractères de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} e_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e_n(x) = e^{inx} \end{aligned}$$

Il s'agit de fonctions de classe C^∞ et 2π -périodiques sur \mathbb{R} qui vérifient en outre:

PROPRIÉTÉ 34

- $|e_n(x)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $e_n(x) \times e_p(x) = e_{n+p}(x) \quad \forall n, p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $e_{-n}(x) = e_n(-x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

Autrement dit, les caractères de \mathbb{R} forment un groupe pour la multiplication des fonctions.

DÉFINITION 34

Un polynôme trigonométrique est une somme partielle de série trigonométrique:
$$\sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

Ex: $P(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x)$ et $Q(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x)$

Ces fonctions sont 2π -périodiques; on peut généraliser à des fonctions T -périodiques en remplaçant kx par $\frac{2\pi kx}{T}$. Par exemple, $\cos(2\pi x)$ est un polynôme trigo 1-périodique.

10.1.2 Coefficient de Fourier d'une fonction périodique

DÉFINITION 35

Soit f une fonction 2π -périodique intégrable sur $[0, 2\pi]$

Les coefficients de Fourier de f sont les nombres a_n et b_n définis par:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \text{ si } n \geq 1$$

$$\text{et } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

La série de Fourier associée à f est la série trigo $\sum_{n \geq 0} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

Si l'on utilise la notation complexe, les coefs de Fourier sont les $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$ $n \in \mathbb{Z}$

La série de Fourier associée à f est alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

La plupart des séries de Fourier que nous étudierons proviennent de fonctions 2π périodiques.

Si le signal initial est T -périodique, les coefficients de Fourier sont définis par:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \text{ et } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \text{ si } n \geq 1 \text{ et } a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

La série de Fourier est alors $\sum_{n \geq 0} (a_n \cos(\frac{2\pi nx}{T}) + b_n \sin(\frac{2\pi nx}{T}))$

Enfin, dans le cas de signaux complexes de période T , les formules deviennent $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{\frac{2\pi nx}{T}} dx$ $n \in \mathbb{Z}$

La série de Fourier associée à f est alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi nx}{T}}$

Ex: Soit f 2π -périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ et $f(0) = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx \, dx = 0 \, \forall n \geq 0 \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \, \forall n \geq 1$$

Ces résultats s'obtiennent en effectuant une intégration par parties (que vous voudrez effectuer à titre d'exercice).

La série de Fourier associée à f est donc $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ (le critère d'Abel assure sa convergence pour $x \neq 2k\pi$)

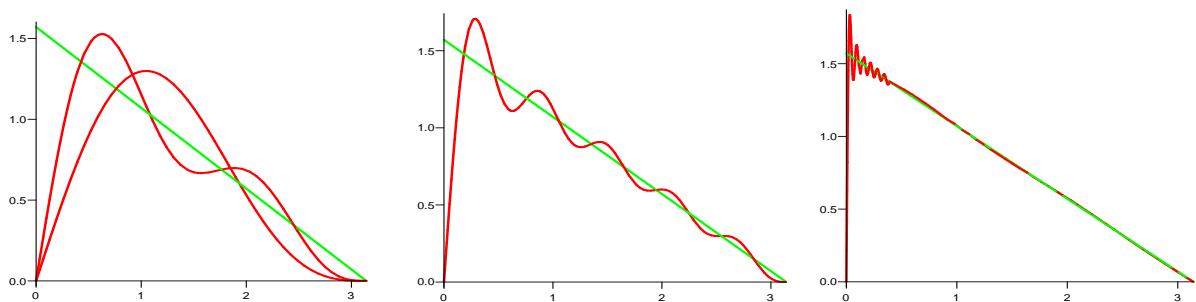


Figure 10.1: Série de Fourier de $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$: $S_2(x)$, $S_4(x)$, $S_{10}(x)$ et $S_{100}(x)$

Ex: Soit f 2π -périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$

On obtient, par une double par parties (à effectuer à titre d'exercice) $a_0 = \frac{4\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4}{n^2}$ et $b_n = -\frac{4\pi}{n}$ $\forall n \geq 1$

Ainsi, la série associée est $S(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx)$ qui converge $\forall x \neq 2k\pi$ (cf. fig2).

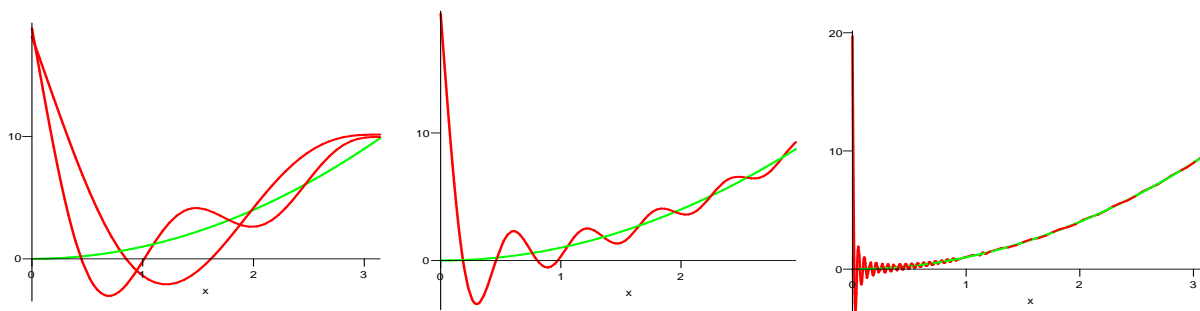


Figure 10.2: Série de Fourier de $f(x) = x^2$: $S_2(x)$, $S_4(x)$, $S_{10}(x)$ et $S_{100}(x)$

Ex: Reprenons le même exemple, mais avec la forme complexe:

On a $c_0 = \frac{4\pi^2}{3}$ si $n \neq 0$, $c_n = \frac{2}{n^2} + \frac{2\pi i}{n}$; ainsi: $S(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n=-\infty}}^{+\infty} (\frac{1}{n^2} + i\frac{\pi}{n}) e^{inx}$

PROPRIÉTÉ 35 (DES COEFFICIENTS)

- f paire $\Rightarrow b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$
- f impaire $\Rightarrow a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$
- f réelle $\Rightarrow c_n = \bar{c}_{-n} \forall n \in \mathbb{Z}$

THÉORÈME 41 (DE RIEMANN LEBESGUE)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$$

THÉORÈME 42 (RAPIDITÉ DE CONVERGENCE DES COEFFICIENTS)

$$\left\| \text{Si } \exists k > 0 / \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n^k c_n| < \infty \Rightarrow f \text{ est de classe } C^k \text{ et } f^{(k)} \text{ a pour coefs de Fourier } (in)^k c_n \right\|$$

Autrement dit, plus la série de Fourier converge vite, plus la fonction f est régulière;
En outre, la dérivation se traduit au niveau des coefs de Fourier par une \times par (in) .

10.2 Convergence des séries de Fourier

10.2.1 Convergence ponctuelle

On cherche à déterminer de quelle façon la série de Fourier va converger et lorsqu'elle converge, de quelle façon elle va représenter la fonction initiale. Dans un premier temps, on s'intéresse à la convergence point par point.

THÉORÈME 43 (DE DIRICHLET)

- Soit f une fonction 2π -périodique intégrable sur $[0, 2\pi]$
- Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ sa série de Fourier
- On suppose que f admet en tout point une demi dérivée à droite et à gauche. Alors:
 - Si f est continue en x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$
 - Sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ avec $f(x^+) = \lim_{u \rightarrow x^+} f(u)$ et $f(x^-) = \lim_{u \rightarrow x^-} f(u)$

REMARQUE 12

- En particulier, si f est continue et dérivable sur \mathbb{R} , sa série de Fourier converge en tout point de \mathbb{R} .
- Il existe des fonctions continues (mais non dérivables) dont la série de Fourier diverge en tout point de \mathbb{R} .
- Il existe aussi des séries trigo n'étant série de Fourier d'aucune fonction (par exemple $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$).

Ex d'utilisation du théorème de Dirichlet: Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Reprenons le deuxième exemple de série de Fourier: $f(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx \right)$

Appliquons le théorème de Dirichlet en $x = 0$ (la fonction est C^1 par morceaux):

Comme $x = 0$ est un point de discontinuité de $f \Rightarrow \frac{1}{2}(0 + 4\pi^2) = 2\pi^2 = S(0) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Le phénomène de Gibbs:

Ce phénomène a été mis en évidence par J.W.Gibbs (1839-1903) en 1899. Il montre que la convergence au voisinage d'une discontinuité pose des problèmes: les variations de la série de Fourier y sont très importantes (cf. travaux dirigés).

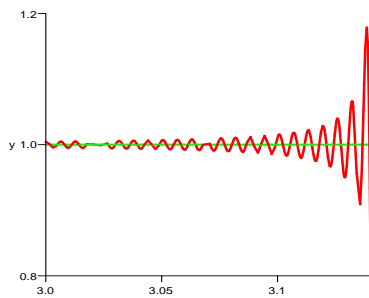


Figure 10.3: Phénomène de Gibbs au voisinage de $x = \pi$

10.2.2 Convergence en moyenne de Césaro

Pour éviter les problèmes ci dessus, on va considérer non plus les sommes partielles S_n de la série de Fourier de f , mais les moyennes de ces sommes partielles. On va donc remplacer les S_n par les

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}.$$

Les $\sigma_n(x)$ sont appelées sommes de Fejer de f et vont l'approcher de façon plus régulière.

THÉORÈME 44 (DE FEJER)

Soit f une fonction 2π -périodique et intégrable sur \mathbb{R} .
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ où f admet une limite à gauche et à droite.

On ne suppose plus dans ce théorème que la fonction admet une demi dérivée à droite et à gauche. Au voisinage des discontinuités, le phénomène de Gibbs a disparu (cf. figure).

10.2.3 Convergence en moyenne quadratique

Notion d'espace préhilbertien

David Hilbert (1862-1943) a défini sur l'ensemble des fonctions 2π -périodiques intégrables (ensemble que nous noterons $RI_{2\pi}$) une structure analogue à celle de l'espace euclidien des vecteurs du plan ou de l'espace. Nous allons donc travailler par analogie avec les vecteurs pour définir le produit scalaire, la norme, une base orthonormale de $RI_{2\pi}$, etc...

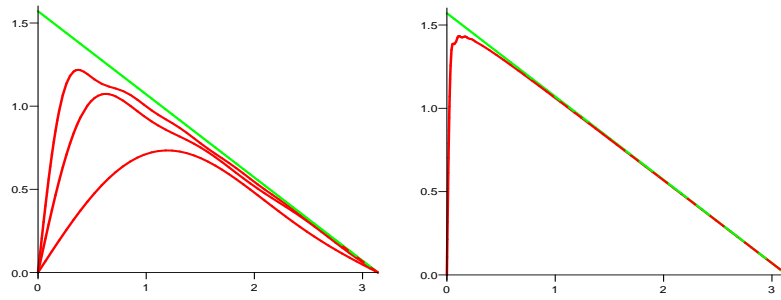


Figure 10.4: Sommes de Fejér de $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

Soient f et g deux fonctions de $RI_{2\pi}$. Le produit scalaire de f et g est le complexe $\langle f, g \rangle$ défini par:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \bar{g}(t) dt$$

Lorsque $\langle f, g \rangle = 0$, on dit que f et g sont orthogonales.

La norme d'une fonction est le réel positif noté $\|f\|$ (c'est en fait une semi norme) défini par:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\|f - g\|$ représente la "distance" entre les deux fonctions f et g (distance appelée aussi écart quadratique moyen). Cette norme n'est autre, au sens physique, que l'énergie d'un signal représentée par f .

Dans le cas de signaux T -périodique, il suffit de remplacer dans toutes les formules 2π par T

Ex: $f(x) = e_n(x) = e^{inx}$ et $g(x) = e_p(x) = e^{ipx}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n \neq p \\ 0 & \text{si } n = p \end{cases}$$

On en déduit que $\|e_n\| = 1 \Rightarrow (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale (fonctions 2 à 2 \perp et de norme égale à 1)

Si f est une fonction périodique intégrable, $\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi f(x) e^{-inx} dx = c_n$ coef de Fourier d'ordre n de f .

De sorte que l'on peut considérer que les coefficients de Fourier d'une fonction sont ses "coordonnées" dans la base formée par les $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Formule de Parseval

Les remarques ci dessus permettent de démontrer (cf TD) que parmi tous les polynômes trigonométriques d'ordre n , S_n est celui qui approche le mieux f au sens de la distance définie ci dessus. C'est le polynôme trigo pour lequel la quantité réelle $\|f - S_n\|$ est minimale. On dit que l'on a alors une approximation au sens des moindres carrés.

THÉORÈME 45 (IDENTITÉ DE PARSEVAL)

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } f \in RI_{2\pi} \Rightarrow \|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \end{array} \right.$$

Si l'on utilise les coefs de Fourier réels, la relation devient $\|f\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$

Cette relation montre que la norme de f (c'est à dire sa puissance) est égale à la somme des puissances des harmoniques qui composent son spectre (principe de conservation de l'énergie).

ATTENTION: Cette formule n'est valable que pour les fonctions de période 2π . Pour un signal T périodique, elle devient:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = a_0^2 + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Ex d'application au calcul de sommes de séries:

Considérons la fonction 2π -périodique $f(x) = |x|$ sur $] -\pi, \pi[$.

Sa série de Fourier est $S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$

A titre d'exercice, vous pourrez effectuer les calculs des coefficients de Fourier.

Le théorème de Parseval donne alors $\|f\|^2 = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Chapitre 11

Transformation de Fourier

11.1 Transformée de Fourier d'une fonction

11.1.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre sur les séries de Fourier qu'une fonction périodique peut se décomposer en une somme dénombrable de fonctions sinusoïdales. Physiquement, cela signifie que dans l'espace des fréquences, le spectre d'un signal périodique est constitué de raies discontinues, chaque raie correspondant à une fréquence d'harmonique précise et les amplitudes de ces raies formant les coefficients de Fourier du signal.

Lorsque le signal n'est plus périodique, son spectre n'est plus dénombrable mais est donné par une fonction continue. L'ensemble des fréquences possibles n'est plus \mathbb{N} mais \mathbb{R} et la contribution d'une fréquence $\nu \in \mathbb{R}$ sera donnée par la fonction $e^{i\nu t}$. La notion de somme est remplacée par celle d'intégrale.

On va donc s'intéresser ici à la transformation de Fourier, qui est l'analogue de la décomposition en série de Fourier pour des phénomènes non périodiques.

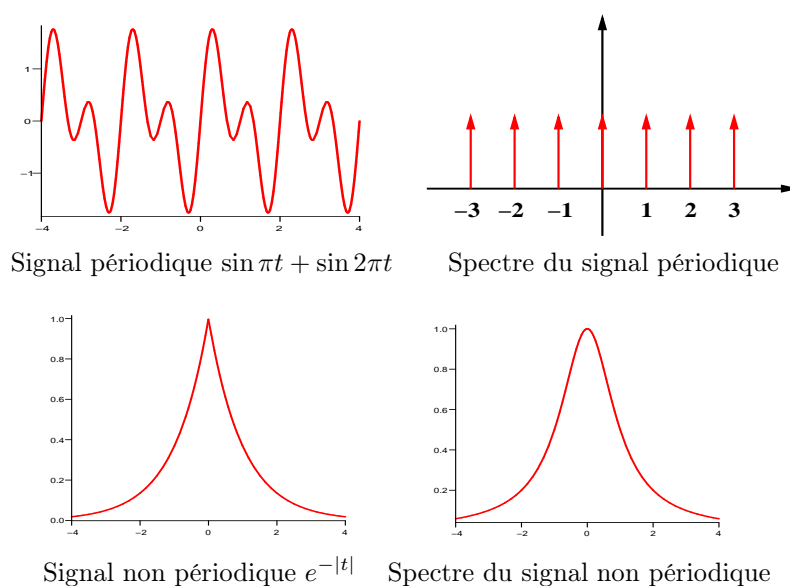


Figure 11.1: Signaux temporels et spectres

11.1.2 Définitions et notations

DÉFINITION 36

Soit f une fonction absolument intégrable sur \mathbb{R} .

La transformée de Fourier de f est la fonction \hat{f} définie par $\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i u t} dt$

- Les fonctions absolument intégrables sont les fonctions vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$
- En particulier, $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.
- $|\hat{f}(u)|$ est une fonction réelle, positive, appelée **spectre** de f .
- \hat{f} est une fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} , donnée par une intégrale généralisée.
- Cette intégrale est définie car $|f(t)e^{-2\pi iut}| = |f(t)|$ qui est intégrable par hypothèse sur f .
- La transformation de Fourier est la fonction \mathcal{F} définie par $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}$.
- On peut noter l'analogie avec la transformée de Laplace: $\boxed{\hat{f}(u) = F(2\pi iu)}$ où F est la transformée de Laplace de f .
Par contre, les conditions d'existence des deux transformées ne sont pas du tout les mêmes.

Ex1: $f(t) = e^{-|t|}$

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|-2\pi iut} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t-2\pi iut} dt + \int_{-\infty}^0 e^{t-2\pi iut} dt = \frac{1}{1-2\pi iu} + \frac{1}{1+2\pi iu} = \frac{2}{1+(2\pi u)^2}$$

En effet, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{t(1-iu)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ (cf rappels sur les exponentielles complexes).

Ces deux fonctions sont représentées dans la figure 11.1.

Ex2: $f(t) = 1_{[-a,a]}(t)$

$$\hat{f}(u) = \int_{-a}^a e^{-2\pi iut} dt = \frac{e^{-2\pi iua} - e^{2\pi iua}}{-2\pi iu} = 2a \frac{\sin 2\pi ua}{2\pi ua} = 2a \times sc(2\pi ua)$$

Cette fonction porte est une indicatrice comme nous en avons étudié en début d'année. Dans le cas particulier où $a = 1/2$, on notera cette fonction $\Pi(t)$. Sa transformée de Fourier est donc $\hat{\Pi}(u) = sc(u)$ qui s'appelle fonction sinus cardinal.

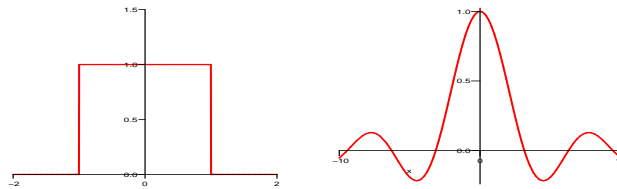


Figure 11.2: Fonction porte $\Pi(t)$ et son spectre le sinus cardinal $sc(u)$

Ex3: Masse de Dirac en zéro δ_0

Nous allons définir la masse de Dirac comme limite de fonctions indicatrices de largeur ϵ et de hauteur $\frac{1}{\epsilon}$

Posons $f_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} 1_{[-\epsilon, \epsilon]}(t)$ et $\delta_0(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t)$

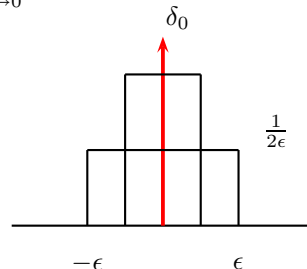


Figure 11.3: Fonction porte et masse de dirac δ_0

Lorsque ϵ tend vers 0, la largeur de la porte tend vers 0 et la hauteur tend vers l'infini. A la limite, on obtient un objet mathématique d'épaisseur nulle et de hauteur infinie en 0: C'est la masse de Dirac. Ce n'est pas une fonction et nous la définirons de façon plus rigoureuse dans la prochaine leçon.

Nous admettrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) dt = 1$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta_0(t) dt = f(0)$; on pose aussi $\delta_a(t) = \delta_0(t - a)$

Calculons maintenant la transformée de Fourier de δ_0 : $\forall \epsilon > 0$, $\hat{f}_\epsilon(u) = \frac{\sin(2\pi u \epsilon)}{2\pi u \epsilon}$ d'après l'exemple 2.

$\hat{\delta}_0(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{f}_\epsilon(u) = 1$ d'après la règle de l'Hospital.

A nouveau, nous venons d'effectuer un calcul peu rigoureux. En fait, on ne peut pas permuter, en général, une limite avec une intégrale (c'est ce que nous avons fait en écrivant que la transformée de Fourier d'une limite est la limite de la transformée de Fourier). Nous admettrons que ce calcul est valide dans ce cas précis et retiendrons que la transformée de Fourier de la masse de Dirac est la fonction constante égale à 1: $\hat{\delta}_0 = 1$

Ex4: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} 1_{[0, +\infty[}(t)$ avec $\lambda > 0$

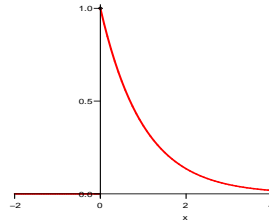


Figure 11.4: $f(t)$

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - 2\pi i u t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-t(\lambda + 2\pi i u)} dt = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\pi i u} \left[e^{-\lambda(1 + 2\pi i u)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\pi i u} \left[1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda(1 + 2\pi i u)t} \right] = \frac{\lambda}{\lambda + 2\pi i u} \end{aligned}$$

car $\Re(e^{-\lambda(1 + 2\pi i u)t}) = e^{-\lambda t}$ qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini (cf. propriétés des limites dans \mathbb{C}).

La transformée de Fourier obtenue est une fonction complexe dont on ne peut pas tracer la courbe. La courbe de son module montre une fonction en cloche qui est le spectre en module du signal.

11.1.3 Propriétés de la transformation

PROPRIÉTÉ 36 (LINÉARITÉ)

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soient } f \text{ et } g \text{ deux fonctions admettant des transformées de Fourier } \hat{f} \text{ et } \hat{g}, \text{ soit } \lambda \in \mathbb{R}. \\ \widehat{f + g} = \hat{f} + \hat{g} \\ \widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f} \end{array} \right.$$

DÉMO

La linéarité de l'intégrale prouve immédiatement la linéarité de la transformation de Fourier.

□

LEMME 1 (RIEMANN-LEBESGUE)

$$\left\| \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(u) = 0 \right.$$

DÉMO

Si f est une fonction indicatrice de la forme $f(t) = 1_{[a, b]}(t)$, alors $\hat{f}(u) = \int_a^b f(t) e^{-2\pi i u t} dt$

$$\Rightarrow |\hat{f}(u)| \leq \frac{1}{\pi|u|} \xrightarrow{u \rightarrow \pm\infty} 0$$

Si f est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices, on obtient le même résultat par linéarité de l'intégrale.

Si f est absolument intégrable, on admet enfin qu'on peut l'approcher de façon arbitrairement proche par une combinaison linéaire g de fonctions indicatrices de telle sorte que pour $\epsilon > 0$ fixé,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g(t)| dt < \epsilon$$

On a alors $|\hat{f}(u) - \hat{g}(u)| < \epsilon \Rightarrow |\hat{f}(u)| < \epsilon + |\hat{g}(u)| \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \pm\infty} |\hat{f}(u)| < \epsilon + \lim_{u \rightarrow \pm\infty} |\hat{g}(u)|$

Puisque ϵ est arbitraire, la limite est donc nulle.

□

Plus précisément, on admettra que \hat{f} est une fonction continue sur \mathbb{R} , bornée et qui tend vers 0 en l'infini. L'analogie du lemme de Riemann Lebesgue pour les séries de Fourier est le fait que les coefs de Fourier d'une fonction tendent vers 0 en l'infini.

PROPRIÉTÉ 37

Soit f une fonction absolument intégrable sur \mathbb{R} et $a \neq 0$.

- $g(t) = f(t + a)$ est intégrable et $\hat{g}(u) = e^{2\pi iua} \hat{f}(u)$
- $g(t) = e^{2\pi iat} f(t)$ est intégrable et $\hat{g}(u) = \hat{f}(u - a)$
- $g(t) = f(at)$ est intégrable et $\hat{g}(u) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right)$

DÉMO

$$\bullet g(t) = f(t + a) \Rightarrow \hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + a) e^{-2\pi iut} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{2\pi iua} e^{-2\pi iuy} dy = e^{2\pi iua} \hat{f}(u)$$

en posant $y = t + a$

$$\bullet g(t) = e^{2\pi iat} f(t) \Rightarrow \hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi iat} e^{-2\pi iut} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i(u-a)t} dt = \hat{f}(u - a)$$

$$\bullet g(t) = f(at) \Rightarrow \hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-2\pi iut} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi iuy/a} \frac{dy}{a} \text{ en posant } y = at \text{ avec } a > 0$$

$$\Rightarrow \hat{g}(u) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right). \text{ De même, si } a < 0, \hat{g}(u) = -\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right). \text{ Ainsi, } \forall a \neq 0, \hat{g}(u) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right)$$

□

Remarques

- Lorsque f est réelle $\Rightarrow |\hat{f}(u)| = |\hat{f}(-u)|$.
- Lorsque f est paire $\Rightarrow \hat{f}$ est réelle et $\hat{f}(u) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ut) dt$.
- Lorsque f est impaire $\Rightarrow \hat{f}$ est imaginaire pure et $\hat{f}(u) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi ut) dt$.

Ex5: Porte décalée $g(t) = 1_{[0,1]}(t)$

$$\text{Notons } f(t) = \Pi(t) = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t). \text{ On a } g(t) = f\left(t - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \hat{g}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} e^{-\pi iu}$$

$$\text{De la même façon, si l'on note } g(t) = 1_{[-1,0]}(t), \text{ la même propriété donne } \hat{g}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} e^{\pi iu}$$

Enfin, si $h(t) = 1_{[0,1]}(t) - 1_{[-1,0]}(t)$ est la fonction égale à -1 sur $[-1, 0[$, 1 sur $]0, 1]$ et 0 ailleurs, alors par linéarité sa transformée de Fourier sera:

$$\hat{h}(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u} (e^{-\pi iu} - e^{\pi iu}) = -\frac{2i}{\pi u} \sin^2(\pi u)$$

Comme h est impaire, on constate que sa transformée de Fourier est une fonction imaginaire pure.

Ex6: Porte dilatée $g(t) = 1_{[-1,1]}(t)$

$$\text{Notons } f(t) = \Pi(t) \Rightarrow g(t) = f\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \hat{g}(u) = 2\hat{f}(2u) = \frac{\sin(2\pi u)}{\pi u}$$

11.2 Transformation inverse de Fourier

11.2.1 Dérivation et décroissance en l'infini

THÉORÈME 46

- Soit f une fonction absolument intégrable sur \mathbb{R} et g définie par $g(t) = tf(t)$
- Si g est absolument intégrable alors \hat{f} est de classe C^1 et $\frac{d\hat{f}}{du}(u) = -2\pi i \times \hat{g}(u)$
 - Si f est de classe C^1 et si f' est absolument intégrable, alors $\hat{f}'(u) = 2\pi i u \times \hat{f}(u)$

DÉMO

$$\frac{d}{du}\hat{f}(u) = \frac{d}{du} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i ut} dt \stackrel{\text{admis}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{du} f(t)e^{-2\pi i ut} dt = (-2\pi i) \times \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)e^{-2\pi i ut} dt = (-2\pi i) \times \hat{g}(u)$$

On admet l'inversion du signe \int avec le signe $\frac{d}{du}$ (appelée dérivation sous le signe somme).

Celle ci n'est pas permise en général mais est justifiée ici par le fait que $\forall t, u \rightarrow f(t)e^{-2\pi i ut}$ est de classe C^1 et que sa dérivée est majorée par $|tf(t)|$ qui est intégrable sur \mathbb{R} par hypothèse.

- $\hat{f}'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-2\pi i ut} dt = [f(t)e^{-2\pi i ut}]_{-\infty}^{+\infty} + (2\pi i u) \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i ut} dt$ en intégrant par parties

On a en outre $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)e^{2\pi i ut} = 0$. En effet, $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds$

Puisque f' est intégrable, cette formule montre que $f(t)$ possède une limite finie quand $t \rightarrow +\infty$ f étant intégrable, cette limite est nécessairement nulle.

□

On peut généraliser de la façon suivante: si $k \in \mathbb{N}$ et $g(t) = t^k f(t)$,

- Si g est absolument intégrable alors \hat{f} est de classe C^k et $\frac{d^k \hat{f}}{du^k}(u) = (-2\pi i)^k \times \hat{g}(u)$
- Si f est de classe C^k et si $\frac{d^k f}{dt^k}$ est absolument intégrable alors $\frac{d^k \hat{f}}{du^k}(u) = (2\pi i)^k u^k \times \hat{f}(u)$

Ex7: $f(t) = (1 - |t|)1_{[-1,1]}(t)$

On a $f'(t) = \Pi(t + \frac{1}{2}) - \Pi(t - \frac{1}{2})$ aux points où f est dérivable.

$$\Rightarrow 2\pi i u \hat{f}(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u} (e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}) \Rightarrow \hat{f}(u) = \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2$$

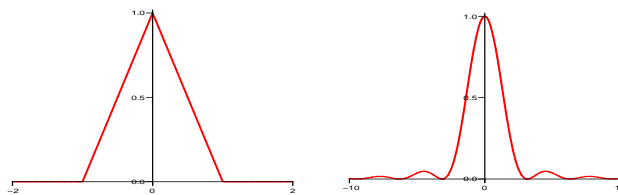


Figure 11.5: fonction triangle $\Delta(t)$ et son spectre $\hat{\Delta}(u) = sc(u)^2$

11.2.2 L'espace \mathcal{S} de Schwartz

Les formules du paragraphe précédent montrent que si f est de classe C^1 alors $u\hat{f}(u)$ tend vers 0 en l'infini, donc $\hat{f}(u)$ tend vers 0 plus vite que $1/u$. De même, si f est de classe C^k alors $u^k \hat{f}(u)$ tendra vers 0 plus vite que $1/u^k$.

Les notions de dérivabilité et de décroissance en l'infini sont donc échangées par transformation de Fourier. En gros, plus une fonction est dérivable, plus sa transformée de Fourier tend rapidement vers 0 en l'infini. La réciproque est aussi vraie, c'est à dire que plus f tend rapidement vers 0 plus sa transformée de Fourier est dérivable.

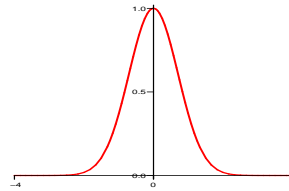
Cela nous amène à considérer un espace \mathcal{S} stable par dérivations successives et par multiplication par x , de telle sorte que \mathcal{S} soit aussi stable par transformation de Fourier.

DÉFINITION 37

On appelle espace de Schwartz \mathcal{S} l'ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ie:

$$f \in \mathcal{S} \iff \forall n, k \in \mathbb{N} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^k f^{(n)}(t) = 0$$

En clair, cet ensemble est celui des fonctions C^∞ qui $\rightarrow 0$ plus vite que tous les polynômes (ex: e^{-t^2} , $\sin te^{-t^2}$)



Exemple de Fonction de \mathcal{S} : e^{-t^2}

REMARQUE 14 (IMPORTANTE)

Toute fonction de \mathcal{S} est absolument intégrable sur \mathbb{R} et admet donc une transfo de Fourier.

Par ailleurs, le théorème précédent montre que la transfo de Fourier d'une fonction de \mathcal{S} est encore dans \mathcal{S} .

11.2.3 Formule d'inversion de Fourier

THÉORÈME 47

Si f et \hat{f} sont absolument intégrables sur \mathbb{R} , alors en tout point t où la fonction f est continue on a:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) e^{2\pi i u t} du$$

DÉMO

Nous admettons ce théorème.

□

Ceci peut encore s'écrire: $\boxed{\widehat{\hat{f}}(t) = f(-t)}$

La formule s'applique en particulier aux fonctions de l'espace \mathcal{S} .

Elle exprime le fait que la transformation de Fourier est (presque) sa propre inverse.

Par suite, les propriétés de la transformation de Fourier et de sa transformation inverse seront les mêmes.

Ex8:

On a vu que $f(t) = e^{-|t|} \Rightarrow \hat{f}(u) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 u^2}$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1 + 4\pi^2 u^2} e^{2\pi i u t} du = e^{-|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

En particulier, si $t = 0$, la formule donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + 4\pi^2 u^2} = \frac{1}{2}$

En outre, on voit que si $g(t) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 t^2} = \frac{1}{1 + (2\pi t)^2} \Rightarrow \hat{g}(u) = \frac{1}{2} f(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}$

Contre exemple 8:

Si $f(t) = \Pi(t) \Rightarrow \hat{f}(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u}$ mais cette fonction n'est pas absolument intégrable sur \mathbb{R} .

Le théorème d'inversion ne peut donc pas s'appliquer.

Par contre, le théorème suivant permet de généraliser la formule d'inversion.

THÉORÈME 48

Si f est absolument intégrable sur \mathbb{R} , C^1 par morceaux et si f' est intégrable:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \hat{f}(u) e^{2\pi i u t} du = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) & \text{sinon} \end{cases}$$

DÉMO
Admis.
□

Ex9: Reprenons le contre exemple précédent

$f(t)$ vérifie les hypothèses du nouveau théorème et celui ci nous donne:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sin \pi u}{\pi u} e^{2\pi i u t} du = \Pi(t)$$

En particulier, si $t = 0$, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi u}{\pi u} du = 1$, ou encore après changement de variable,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}}$$

11.2.4 Transformation de Fourier des fonctions de carré intégrable

Il s'agit des fonctions vérifiant la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$ (signaux d'énergie finie).

THÉORÈME 49 (FORMULE DE PLANCHEREL PARSEVAL)

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } f \text{ est absolument et de carré intégrable sur } \mathbb{R}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(u)|^2 du \end{array} \right.$$

DÉMO
Admis.
□

ou encore, en notant $\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}$ la norme de la fonction f au sens donné dans la leçon sur les séries de Fourier, le théorème ci dessus devient:

$$\boxed{\|f\| = \|\hat{f}\|}$$

Cette formule est l'analogie de la formule de Bessel Parseval pour les séries de Fourier et exprime la conservation de l'énergie entre les signaux et leur spectre.

Elle est valable pour toute fonction de \mathcal{S} puisque cet ensemble est inclus dans celui des fonctions absolument intégrables et aussi dans celui des fonctions de carré intégrable.

La seconde écriture de la formule traduit le fait que la transformation de Fourier est une isométrie.

Ex10:

$$f(t) = \Pi(t) \text{ est de carré intégrable et } \hat{f}(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2 du = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \pi$$

11.3 Produit de convolution

11.3.1 Définition

DÉFINITION 38

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soient } f \text{ et } g \text{ deux fonctions absolument intégrables sur } \mathbb{R} \\ \text{Le produit de convolution de } f \text{ et } g \text{ est la fonction:} \\ f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)ds \end{array} \right.$$

Ex11: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} H(t)$ et $g(t) = 1_{[-1,1]}(t)$

On rappelle que $H(t)$ est la fonction de Heaviside qui vaut 1 si $t \geq 0$ et 0 sinon.

$$f * g(t) = \lambda \int_{-1}^1 e^{-\lambda(t-s)} H(t-s) ds$$

$$H(t-s) = 1 \iff t-s \geq 0 \iff s \leq t.$$

- Si $t < -1$, $[-1, 1] \cap]-\infty, t] = \emptyset$ et $f \star g(t) = 0$
- Si $-1 < t < 1$, $[-1, 1] \cap]-\infty, t] = [-1, t]$. On a alors: $f \star g(t) = \int_{-1}^t \lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda s} ds = (1 - e^{-\lambda(t+1)})$
- Si $t > 1$, $f \star g(t) = \int_{-1}^1 \lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda s} ds$

Finalement, $f \star g(t) = (1 - e^{-\lambda(t+1)})1_{[-1, 1]}(t) + (e^\lambda - e^{-\lambda})e^{-\lambda t}1_{]1, +\infty[}(t)$

Ex12: $\Pi \star \Pi(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(t-s) ds$

Comme précédemment, $\Pi(t-s) = 1 \iff -1/2 \leq t-s \leq 1/2$. Si $t > 1$ ou $t < -1$, la fonction est nulle donc l'intégrale aussi. Si $-1 < t < 0$, l'intégrale vaut $1+t$. Si $0 < t < 1$, l'intégrale vaut $1-t$. Finalement,

$\Pi \star \Pi(t) = (1 - |t|)1_{[-1, 1]}(t) = \Delta(t)$ fonction triangle.

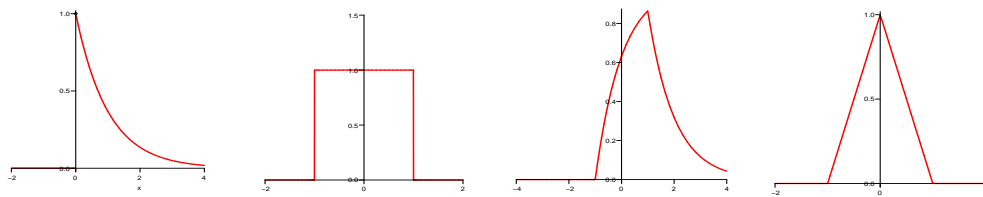


Figure 11.6: $f(t)$, $g(t)$, $f \star g(t)$ et $\Pi \star \Pi(t)$

Signification du produit de convolution:

L'exemple 2 montre que la convolée de deux fonctions discontinues peut donner une fonction continue. L'exemple 1 donne une fonction avec une "bosse" autour de $[0, 1]$ qui représente la contribution de la fonction porte au produit de convolution. La convolution de deux fonctions est une sorte de mélange des fonctions conservant l'allure et les propriétés des deux. Le produit conserve le "meilleur" des deux fonctions. On admet ainsi que si l'une des fonctions est de classe C^k le produit est aussi de classe C^k : l'opération régularise les fonctions initiales.

Physiquement, on peut voir la convolution comme une sorte de filtrage. Si l'on considère un système avec un signal d'entrée et de sortie, ce système est caractérisé par une fonction h : On passe du signal d'entrée $x(t)$ au signal de sortie $y(t)$ par une convolution par $h(t)$, ie $y(t) = h * x(t)$. Nous allons revenir sur cet aspect dans le paragraphe suivant.

Enfin, on peut représenter la convolution à l'aide du spectre: Calculer le produit de convolution de deux fonctions revient à multiplier leur spectre. Nous allons y revenir également.

11.3.2 Propriétés

THÉORÈME 50

- La convolution est une opération linéaire en f et en g .
- Elle est commutative: $f * g = g * f$
- Elle est associative: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- δ_0 est son élément neutre: $f * \delta_0 = f$

DÉMO

• $f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)dt = g * f(t)$ en posant $s = t - u$

- l'associativité se démontre en utilisant des intégrales doubles. Nous l'admettons.

□

Nous admettons également la propriété suivante: $\delta_a * f(t) = f(t+a)$

THÉORÈME 51 (CONVOLUTION ET TRANSFO DE FOURIER)

La transformation de Fourier échange le produit de convolution en produit de fonctions, ie:

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$$

$$\widehat{f \times g} = \hat{f} * \hat{g}$$

DÉMO

Là encore, ce théorème est admis.

□

Ex13: Soit $\Pi(t) = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$. Nous cherchons à calculer rapidement $\Pi * \Pi(t)$.

$\widehat{\Pi * \Pi} = \hat{\Pi} \times \hat{\Pi} = \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2$ dont on sait qu'elle est la transformée de Fourier de la fonction

$$\Delta(t) = (1 - |t|)1_{[-1, 1]}(t).$$

Par application de la transfo inverse de Fourier, on a donc $\Pi * \Pi(t) = f(t)$

11.3.3 Convolution et série de Fourier

Il existe différentes formes du produit de convolution, pour des signaux continus comme pour des signaux discrets.

Considérons l'ensemble des suites complexes (ou réelles) bilatères; ce sont les suites dont les indices peuvent être positifs comme négatifs. Par exemple, les coefficients de Fourier complexes d'une fonction forment une suite bilatère. Considérons deux suites $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et définissons leur produit de convolution $c * d$ comme étant la suite dont le n ème terme est $\sum_{k=}$

Si les deux suites ont un nombre fini de termes non nuls, on retrouve alors la formule qui permet d'effectuer un produit matriciel ou un produit de polynômes.

Considérons maintenant deux fonctions f et g , 2π -périodiques et intégrables. Le produit de convolution $f * g$ de f et g est défini par

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt$$

Les propriétés sont les mêmes que pour le produit de convolution défini en début de paragraphe. De plus, $f * g$ est une fonction 2π -périodique.

Notons $c_n(f)$ et $c_n(g)$ les coefficients de Fourier complexes de f et g .

THÉORÈME 52

• $c_n(f * g) = c_n(f) \times c_n(g) \forall n \in \mathbb{Z}$
 • $c_n(f \times g) = c_n(f) * c_n(g) \forall n \in \mathbb{Z}$

Si $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ et $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{inx}$, alors $f * g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) c_n(g) e^{inx}$

On a également $f(x)g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) * c_n(g) e^{inx}$

Des formules analogues existent si le développement est donné à l'aide de coefficients réels a_n et b_n , $n \in \mathbb{N}$.

11.4 Applications

11.4.1 Système physique et fonction de transfert

Considérons un système physique qui possède en entrée un signal $x(t)$ et en sortie un signal $y(t)$. Ce système peut donc être vu comme une boîte noire qui transforme une fonction $x(t)$ en $y(t)$. Notons S l'action de ce système. S est une fonction qui à un signal en associe un autre: $S(x) = y$

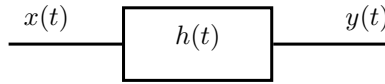


Figure 11.7: Système physique linéaire

On dit qu'un système est linéaire s'il possède les trois propriétés suivantes:

DÉFINITION 39

- *Linéarité*: $S(x_1 + x_2) = S(x_1) + S(x_2)$ et $S(\lambda x) = \lambda S(x) \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- *Causalité*: Si $x = 0$, $S(x) = 0$
- *Stationnarité*: Si $S(x(t)) = y(t)$, alors $S(x(t - \tau)) = y(t - \tau)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$

La linéarité s'appelle aussi principe de superposition: si l'on superpose en entrée deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, la sortie correspondante est la superposition des sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$. La causalité indique qu'une sortie ne peut dépendre que du passé de l'entrée: le système est physiquement réalisable. Enfin, la stationnarité implique qu'un décalage à l'entrée se répercute à la sortie.

THÉORÈME 53

- Considérons un système physique linéaire, causal et stationnaire.
- Soit $x(t)$ le signal d'entrée et $y(t)$ la sortie correspondante.
- Il existe une unique fonction $h(t)$ appelée réponse impulsionnelle du système telle que $y(t) = x \star h(t)$

Autrement dit, tout système possédant les propriétés ci-dessus est un système de convolution et la transformation de $x(t)$ en $y(t)$ se fait par un filtrage de convolution.

DÉMO

Admis

□

Supposons maintenant que tous les signaux en jeu admettent une transformée de Fourier. L'équation $y = x \star h$ montre alors que

$$\boxed{\hat{y}(u) = \hat{h}(u) \times \hat{x}(u)} \quad (1)$$

La fonction \hat{h} s'appelle fonction de transfert du filtre. En électronique, on la note souvent $H(u)$.

11.4.2 Equations différentielles et transformation de Fourier

Considérons une cellule RC avec une tension d'entrée $x(t)$ et une tension de sortie $y(t)$ mesurée aux bornes du condensateur.

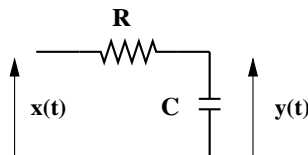


Figure 11.8: Filtre RC

Nous supposons que x et y admettent une transformée de Fourier et que y est une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Nous savons que l'équation différentielle qui pilote ce circuit est

$$RCy'(t) + y(t) = x(t)$$

Pour la résoudre, nous allons passer à la transformée de Fourier dans les deux membres de l'équation: l'équation différentielle dans le temps, dont l'inconnue est y , se transforme alors en une équation (simple) d'inconnue \hat{y} dans l'espace des fréquences. Après résolution, on en déduit alors la solution en calculant la transformée de Fourier inverse de \hat{y} .

$$RCy'(t) + y(t) = x(t) \Rightarrow 2\pi iuRC\hat{y}(u) + \hat{y}(u) = \hat{x}(u) \Rightarrow \hat{y}(u) = \frac{1}{1 + 2\pi iuRC} \times \hat{x}(u) \quad (\bullet)$$

D'après l'équation (1) et par identification, $\hat{h}(u) = \frac{1}{1 + 2\pi iuRC}$ est la fonction de transfert du système (constitué de la cellule RC). On sait que le signal temporel correspondant est

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} 1_{[0, +\infty[}(t)$$

qui constitue donc la réponse impulsionnelle du système.

Enfin, en passant à la transformée de Fourier inverse dans l'équation (\bullet) nous obtenons la solution de l'équation différentielle:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \times \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-s}{RC}} 1_{[0, +\infty[}(t-s) ds = h \star x(t)$$

Cette équation nous permet d'exprimer la solution en fonction du second membre x et montrer qu'il s'agit bien du produit de convolution de la réponse impulsionnelle par l'entrée.

Chapitre 12

Théorie du signal

12.1 Distribution

12.1.1 Introduction

Nous avons déjà parlé précédemment de la masse de Dirac en zéro δ_0 en la définissant de la façon suivante:

Soit $\Pi_\epsilon(x)$ la fonction porte définie par $\Pi_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon}1_{[-\epsilon, \epsilon]}(x)$

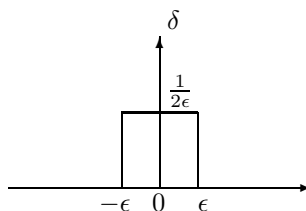


Figure 12.1: Fonction porte et masse de dirac δ

Lorsque ϵ tend vers 0, la largeur de la porte tend vers 0 tandis que la hauteur tend vers $+\infty$. La masse de Dirac en 0 est la limite de cette fonction porte lorsque ϵ tend vers 0.

Hélas, cette limite n'est pas une fonction car elle devrait être nulle partout sauf en 0 où sa valeur serait infinie, ce qui n'a pas de sens.

En outre, $\forall \epsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\epsilon(x) dx = 1$, on souhaiterait donc avoir aussi $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$, ce qui n'est pas

possible car une fonction partout nulle sauf en un nombre fini de points a une intégrale nulle.

La notion de fonction ne peut donc pas modéliser correctement cette masse de Dirac.

Celle ci est pourtant utilisée couramment en physique depuis des années (Heaviside utilisait la fonction échelon dès 1894 pour l'étude des circuits électriques et Paul Dirac utilise la fonction δ_0 en mécanique quantique vers 1926) comme le montrent les exemples ci dessous:

En électrostatique, on est amené à considérer des distributions de charges ponctuelles, superficielles ou volumiques dans des conducteurs. Une distribution ponctuelle de charge peut s'obtenir comme limite d'une distribution superficielle lorsque la surface tend vers 0. Supposons que la fonction porte ci dessus représente la densité de charge linéique d'un conducteur. La charge totale du conducteur est égale à l'intégrale de la densité de charge sur \mathbb{R} , c'est à dire 1. Lorsque ϵ tend vers 0, cette quantité doit rester égale à 1, tandis que la charge devient ponctuelle. L'objet mathématique représentant cette charge doit donc vérifier les propriétés d'une masse de Dirac; ce ne peut pas être une fonction

Prenons un autre exemple en mécanique. Considérons un solide de masse m initialement au repos sur une surface où il peut glisser sans frottements, à qui on applique une poussée entre les instants $-\epsilon$ et ϵ dont l'intensité en fonction du temps est $F_\epsilon(t) = \Pi_\epsilon(t)$. Sa vitesse est $v_\epsilon(t)$, son accélération $\gamma_\epsilon(t)$ et son énergie cinétique $E(t) = \frac{1}{2}mv_\epsilon(t)^2$.

Supposons que les poussées deviennent de plus en plus brèves, tout en conservant la même énergie finale E .

Lorsque ϵ tend vers 0, la poussée est équivalente à un choc instantané provoqué en $t = 0$.

L'énergie cinétique du solide à partir de $t = \epsilon$ est constante et égale à $E = \frac{1}{2}mv_\epsilon(\epsilon)^2$, de sorte que la vitesse $v_\epsilon(\epsilon)$ est une constante K qui ne dépend pas de ϵ . Or, $K = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \gamma_\epsilon(t)dt$ et $F_\epsilon = m\gamma_\epsilon$ d'après la seconde loi de Newton. Ainsi:

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, F_\epsilon(t) \geq 0 \\ F_\epsilon = 0 \text{ si } |t| \geq \epsilon \\ \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} F_\epsilon(t)dt = 1 \end{cases}$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, le choc doit donc être représenté par la masse de Dirac δ_0 .

La masse de Dirac illustre donc la notion d'impulsion, qui est censée représenter un phénomène physique très bref et intense (choc entre deux solides, impulsion électrique dans un circuit, etc...). Ce phénomène doit être représenté par un signal nul sauf durant un instant très court, où son intensité doit être importante.

Bref, les fonctions s'avèrent insuffisantes pour représenter ces phénomènes et c'est le mathématicien Laurent Schwartz qui, en 1946, a créé une théorie mathématique rigoureuse permettant de définir ces objets généralisant les fonctions et que l'on appellent des distributions.

12.1.2 Définition d'une distribution

On accède à une distribution de façon indirecte, en regardant comment la distribution agit sur un signal. De même que lorsqu'on observe un filtre, on évalue sa fonction de transfert ou son action en envoyant un signal à l'entrée et en regardant ce qui sort du filtre, on va définir les distributions en évaluant leur action sur des fonctions tests, un peu comme si on les étudiait par l'intermédiaire d'appareils de mesure.

Les fonctions tests sont des fonctions régulières à qui on doit pouvoir faire subir toutes sortes de transformations (intégration, dérivation, limite en l'infini...). Nous choisirons donc des fonctions de classe C^∞ nulles à l'extérieur d'un intervalle (on dit à support compact).

DÉFINITION 40

Notons \mathcal{D} l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact.
Une distribution T est une fonction linéaire et continue définie par:

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle T, \phi \rangle = T(\phi) \end{aligned}$$

La notion de continuité dépasse le cadre de ce cours et nous la passerons sous silence pour la suite. La définition indique qu'une distribution est un opérateur linéaire qui associe un nombre réel à une fonction test ϕ .

Cette définition est très vague, mais est aussi en contre partie est très générale.

Un cas particulier très important de distribution est donné par les distributions régulières associées à des fonctions. Elles sont définies comme suit:

$$T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)e^{-2\pi iut} dt \text{ autrement dit, } \phi \xrightarrow{T_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)e^{-2\pi iut} dt$$

A une fonction test, T associe son intégrale multipliée par la fonction f . On dit que f est associée à cette distribution et la caractérise.

Ex1: La distribution de Dirac δ_0

Elle est définie par $\phi \xrightarrow{\delta_0} \phi(0)$ ou encore par $\boxed{\delta_0(\phi) = \phi(0)}$

A une fonction, la distribution de Dirac associe sa valeur en 0.

$$\langle \delta_0, \phi_1 + \phi_2 \rangle = (\phi_1 + \phi_2)(0) = \phi_1(0) + \phi_2(0) = \langle \delta_0, \phi_1 \rangle + \langle \delta_0, \phi_2 \rangle \Rightarrow \delta_0 \text{ est bien linéaire.}$$

Il s'agit bien aussi de la distribution dont il est question dans l'introduction. En effet,

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \phi(t)dt$$

$\langle \delta, \phi \rangle$ est donc la valeur moyenne de ϕ sur $[-\epsilon, \epsilon]$ et lorsque la largeur de l'intervalle tend vers 0, la valeur moyenne tend vers la valeur de la fonction, ie $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$.

Ex2: La distribution de Dirac δ_a , $a \in \mathbb{R}$.

Elle est définie par $\phi \xrightarrow{\delta_a} \phi(a)$ ou encore par $\delta_a(\phi) = \phi(a)$

A une fonction, cette distribution associe sa valeur en a: $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$

Ex3: La fonction de Heaviside U est une distribution régulière associée à $1_{[0, +\infty[}(x)$.

$$\langle U, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) U(x) dx = \int_0^{+\infty} \phi(x) dx$$

A une fonction test, cette distribution associe l'intégrale de la fonction entre 0 et l'infini.

Ex4: Le peigne de Dirac $\sqcup(x)$

C'est une somme de masse de Dirac espacées de 1 unité: Si $\phi \in \mathcal{D}$, $\langle \sqcup, \phi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n)$

Cette somme existe car ϕ est à support compact et donc $\phi(n) = 0$ pour $|n|$ assez grand.

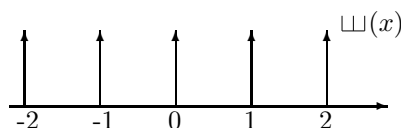


Figure 12.2: Peigne de Dirac

Ex5: La distribution constante $\mathbb{1}$

Elle est définie par $\langle \mathbb{1}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx$

Cette intégrale est définie puisque ϕ est à support bornée.

Ex6: La distribution associée à la fonction $T(x) = e^{2\pi i u x}$

Elle est définie par $\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{2\pi i u x} dx$

12.1.3 Opérations sur les distributions

Les opérations de somme et produit sont identiques à celles des fonctions.

La dérivation se fait par contre de façon un peu différente et conduit à des résultats étonnants...

DÉFINITION 41

|| Soit T une distribution et ϕ une fonction test de \mathcal{D} .

|| La dérivée de T est la distribution T' définie par: $\langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle$

Ex5: Dérivée de δ_0

Soit $\phi \in \mathcal{D}$. On a $\langle \delta'_0, \phi \rangle = - \langle \delta_0, \phi' \rangle = -\phi'(0)$

La dérivée de la masse de Dirac en 0 est donc la distribution qui à une fonction associe l'opposé de sa dérivée en 0.

Ex6: Dérivée de la fonction de Heaviside

$$\langle U', \phi \rangle = - \langle U, \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x) 1_{[0, +\infty[}(x) e^{-2\pi i u t} dt = - \int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = [\phi]_0^{+\infty} = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$

ϕ est nulle en l'infini car elle est à support compact, donc nulle en dehors d'un intervalle de longueur finie.

Ainsi, la dérivée de la fonction échelon est la masse de Dirac en 0.

Ex7: Dérivation d'une fonction discontinue (...!)

Considérons une fonction f dérivable sauf en $x = 0$ où elle admet une limite à droite et à gauche.

Notons α la différence entre ces deux limites.

Considérons la distribution T associée à cette fonction f . Comme toute distribution, f est dérivable et l'on a:

$$\begin{aligned}
\langle T', \phi \rangle &= - \langle T, \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x) f(x) e^{-2\pi i u t} dt = - \int_{-\infty}^0 \phi'(x) f(x) dx - \int_0^{+\infty} \phi'(x) f(x) dx \\
&= -[\phi(x) f(x)]_{-\infty}^0 - [\phi(x) f(x)]_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f'(x) e^{-2\pi i u t} dt = \alpha \phi(0) + \langle D, \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle + \langle D, \phi \rangle = \langle \delta + D, \phi \rangle
\end{aligned}$$

En notant D la distribution associée à la fonction f' .

Nous venons ainsi de montrer que la dérivée de f est, au sens des distributions, $f' = \alpha \delta + D$.

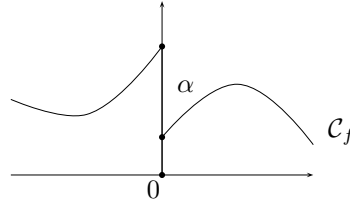


Figure 12.3: Fonction discontinue en 0

La convolution de deux distributions met en jeu des intégrales doubles, nous n'en parlerons donc pas. Cependant, il est nécessaire de connaître les deux résultats ci dessous:

THÉORÈME 54

- La masse de Dirac est l'élément neutre pour la convolution des distributions: $\delta * T = T$
- Par ailleurs, la convolution par δ_a revient à une translation: $\delta_a * T(x) = T(x - a)$

Enfin, la convolution de deux distributions régulières associée à des fonctions f et g est la distribution régulière associée à la fonction $f * g$.

12.1.4 Transformation de Fourier d'une distribution

Nous supposons ici que les fonctions tests appartiennent à \mathcal{S} , l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide. Toute distribution T admet alors une transformée de Fourier \hat{T} et définie par:

DÉFINITION 42

$$\forall \phi \in \mathcal{S} \quad \langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle$$

Ex1: Transformée de Fourier de la masse de Dirac δ_0

$$\langle \hat{\delta}_0, \phi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \mathbb{1}(x) dx = \langle \mathbb{1}, \phi \rangle \text{ et donc } \hat{\delta}_0 = \mathbb{1}$$

$\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur \mathbb{R}

Ex2: Transformée de Fourier de δ_a

$$\langle \hat{\delta}_a, \phi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\phi} \rangle = \hat{\phi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-2\pi i a x} dx = \langle e^{-2\pi i a x}, \phi \rangle \text{ et donc } \hat{\delta}_a = e^{-2\pi i a x}$$

Les propriétés de la transformation de Fourier des fonctions classiques s'étendent à la transformation de Fourier des distributions et il en est de même pour la transformation inverse de Fourier. Nous les rappelons rapidement dans le tableau de la page suivante qui reprend aussi les exemples usuels.

La formule d'inversion de Fourier $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ permet grâce aux deux exemples ci dessus de déterminer sans calculs les transformées de Fourier, **AU SENS DES DISTRIBUTIONS**, des fonctions $\mathbb{1}$ et $e^{2\pi i a x}$.

SIGNAL INITIAL (FONCTION OU DISTRIUBTION)	TRANSFORMÉE DE FOURIER
$f(x)$	$\hat{f}(u)$
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right)$
$f(x - a)$	$e^{-2\pi i u a} \hat{f}(u)$
$f(x) e^{2\pi i u_0 x}$	$\hat{f}(u - u_0)$
$f * g(x)$	$\hat{f}(u) \times \hat{g}(u)$
$f(x) \times g(x)$	$\hat{f} * \hat{g}(u)$
$-2\pi i x f(x)$	$\frac{d}{du} \hat{f}(u)$
$f'(x)$	$2\pi i u \hat{f}(u)$
$\hat{f}(x)$	$f(-u)$
δ_0	$\mathbb{1}$
$\mathbb{1}$	δ_0
δ_a	$e^{-2\pi i u a}$
$e^{2\pi i a t}$	δ_a
$\cos(2\pi a t)$	$\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$
$\sin(2\pi a t)$	$\frac{1}{2i}(\delta_a - \delta_{-a})$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi u^2}$
δ'_0	$2\pi i u$

On peut alors en déduire facilement les transformées de Fourier des fonctions cosinus et sinus (toujours au sens des distributions puisque ces fonctions ne sont pas intégrables). Le résultat obtenu montre que le spectre d'une fonction sinusoïdale est une masse de Dirac et explique de fait pourquoi les fonctions périodiques ont un spectre de raies dénombrable et se développent en série de Fourier. Nous reviendrons sur cet aspect dans le paragraphe suivant.

12.1.5 La formule de Poisson

On se propose dans ce paragraphe de déterminer la transformée de Fourier du peigne de Dirac. La formule qui donne l'expression de cette transformée s'appelle formule de Poisson et sera très utile pour la suite.

Soit $\phi \in \mathcal{S}$.

$$\text{Par définition, } \langle \mathbb{1}, \phi \rangle = \langle \mathbb{1}, \hat{\phi} \rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n, \hat{\phi} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n(\hat{\phi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(n)$$

La série converge car $\phi \in \mathcal{S}$ donc $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$.

Considérons maintenant la fonction $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(x+k)$

Nous admettrons que F est une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Il est facile de voir qu'elle est en outre périodique de période 1. Elle est donc développable en série de Fourier et l'on a, en vertu du théorème de DIRICHLET, :

$$(1) \quad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

c_n est le nième coefficient de Fourier de F et est donné par:

$$c_n = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(x+k) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \phi(x+k) e^{-2\pi i n x} dx$$

Nous admettons le fait que la permutation de l'intégrale avec la somme infinie est licite (cela provient du fait que $\phi \in \mathcal{S}$). Dans cette dernière intégrale, posons $y = x + k$:

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} \phi(y) e^{-2\pi i n(y-k)} dy = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} \phi(y) e^{-2\pi i n y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{-2\pi i n y} dy = \hat{\phi}(n)$$

Le coefficient de Fourier de F est donc égal à la transformée de Fourier de ϕ en n . L'égalité \circledast devient alors:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(x+k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(n) e^{2\pi i n x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, si $x = 0$, nous obtenons la FORMULE DE POISSON: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(n)$

Une application directe de cette formule est le calcul de la transformée de Fourier du peigne de Dirac. En effet, nous avons vu que:

$$\langle \hat{\sqcup}, \phi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(n) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(n)}_{\text{Formule de Poisson}} = \langle \sqcup, \phi \rangle$$

Et nous venons de montrer que le peigne de Dirac est invariant par transformation de Fourier, i.e.

$$\hat{\sqcup} = \sqcup$$

La formule de Poisson se généralise à un peigne de Dirac à écartement quelconque T . Ainsi,

$$\sqcup = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT} \Rightarrow \hat{\sqcup} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n/T} \text{ et la formule de Poisson devient } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right)$$

On peut encore écrire la formule de Poisson sous la forme de deux relations (obtenues simplement en développant l'expression du peigne de Dirac) qui nous serviront dans la suite de la leçon:

$$(2) \quad \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(\frac{x}{T} - n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nT)$$

$$(3) \quad \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(u - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(n - Tu)$$

12.2 Echantillonnage et reconstitution d'un signal

Le traitement numérique du signal impose de transformer un signal analogique en signal numérique. Cette opération s'appelle l'échantillonnage et transforme un signal initial $x(t)$ (fonction ou plus généralement distribution) en suite numérique $x_n = (x(nT))_{n \in \mathbb{N}}$ où T est le pas d'échantillonnage (c.f. fig).

Le problème inverse consiste à reconstituer le signal initial en connaissant uniquement la suite échantillonnée $(x_n)_n$. Cette opération s'appelle reconstitution ou interpolation du signal.

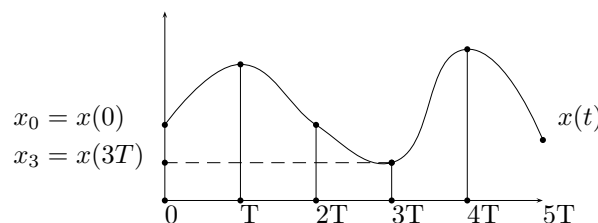


Figure 12.4: Fonction échantillonnée

12.2.1 Formule de Shannon

DÉFINITION 43

On dit qu'un signal $x(t)$ est à largeur de bande finie si son spectre $\hat{x}(u)$ est inclus dans $[-F, F]$

THÉORÈME 55 (DE SHANNON)

Si le signal $x(t)$ est à largeur de bande finie $[-F, F]$,

on peut reconstituer le signal initial $x(t)$ si et seulement si $T < \frac{1}{2F}$

La formule d'interpolation est alors donnée par:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\sin(2\pi(t - nT)F)}{2\pi(t - nT)F} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \text{sinc}(2\pi(t - nT)F)$$

La condition indique que l'on ne peut reconstituer le signal que si le pas d'échantillonnage est inférieur à l'inverse de la largeur de bande. La démonstration du théorème va expliquer ce phénomène.

DÉMO

Nous partons d'un signal $x(t)$ à largeur de bande finie $[-F, F]$.

Echantillonner ce signal suivant un pas T revient à le multiplier par le peigne de Dirac $\sqcup(\frac{t}{T})$. En effet:

$$\tilde{x}(t) = x(t) \times \sqcup(\frac{t}{T}) = x(t) \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n(\frac{t}{T}) = x(t) \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\frac{t}{T} - n) = x(t) \times T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT) \text{ d'après (2)}$$

$$\tilde{x}(t) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(t) \delta(t - nT) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \delta_{nT}(t)$$

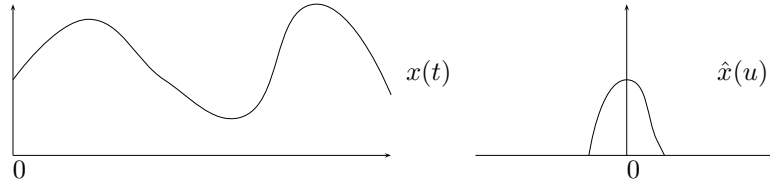


Figure 12.5: Signal $x(t)$ et son spectre $\hat{x}(u)$

La fonction $\tilde{x}(t)$ représente donc le signal échantillonné. Déterminons son spectre:

$$\widehat{\tilde{x}}(u) = \widehat{x(t) \times \sqcup(\frac{t}{T})} = \hat{x}(u) * T \sqcup(Tu) = \hat{x}(u) * T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n(Tu) = \hat{x}(u) * T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(n - Tu) = \hat{x}(u) * T \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(u - \frac{n}{T})$$

$$\widehat{\tilde{x}}(u) = \hat{x}(u) * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(u - \frac{n}{T}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(u) * \delta(u - \frac{n}{T}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(u - \frac{n}{T})$$

Ce résultat nous montre que la formule échantillonnée est une fonction périodique de période $\frac{1}{T}$.

Ainsi, échantillonner un signal rend son spectre périodique

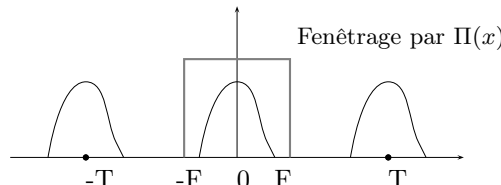


Figure 12.6: Courbe de $\hat{\tilde{x}}(u)$

Par ailleurs, $\hat{x}(u) \subset [-F, F]$ par hypothèse. Lorsque n varie, les fonctions $u \rightarrow \hat{x}(u - \frac{n}{T})$ sont des translatées de la fonction $\hat{x}(u)$. Deux cas se présentent:

- Si $T < \frac{1}{2F}$

Les supports de ces fonctions sont disjoints et le spectre du signal échantillonné est formé d'une succession de copies du spectre du signal initial. On peut retrouver le spectre de x en sélectionnant l'une de ces copies.

- Si $T > \frac{1}{2F}$

Les supports ne sont plus disjoints et les spectres se chevauchent. On perd l'information sur le spectre initial.

Pour reconstruire le signal, il faut donc que la première condition soit réalisée. On peut alors sélectionner une copie du spectre en fenêtrant la fonction $\hat{x}(u)$ dans l'intervalle $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ (en $\times \hat{x}(u)$ par une fonction porte):

$$\begin{aligned}\hat{x}(u) &= \tilde{x}(u) \times 1_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}(u) = \tilde{x}(u) \times 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(Tu) = \tilde{x}(u) \Pi(Tu) \\ \Rightarrow x(t) &= \tilde{x}(t) * \widehat{\Pi(Tu)} = \tilde{x}(t) * \frac{1}{T} \widehat{\Pi}\left(\frac{u}{T}\right) = \tilde{x}(t) * \frac{1}{T} \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}} = \tilde{x}(t) * \frac{1}{T} \frac{\sin(2\pi F t)}{2\pi F t}\end{aligned}$$

En réutilisant l'expression de $\tilde{x}(t)$, nous obtenons:

$$x(t) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \delta(t - nT) * \frac{1}{T} \frac{\sin(2\pi F t)}{2\pi F t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \frac{\sin(2\pi F(t - nT))}{2\pi F(t - nT)}$$

qui constitue la formule d'interpolation de Shannon.

□

Chapitre 13

Calcul matriciel

13.1 Matrice: définition et notation

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$ et $J = \{1, 2, \dots, p\}$

DÉFINITION 44

Une matrice de type (n, p) à coefficients dans \mathbb{R} est un tableau de nombre réels à n lignes et p colonnes. L'ensemble de ces matrices se note $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

On notera $A = (a_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ ou de façon plus explicite $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

i sera toujours l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

Lorsque $n = 1$ on parlera de matrice ligne et lorsque $p = 1$ de matrice colonne ou vecteur de \mathbb{R}^n

REMARQUE 15

- Si $n = p$, on parle de matrice carrée et l'on note $M_n(\mathbb{R})$ leur ensemble
- $(a_{ii})_{i \in I}$ forme la diagonale de la matrice
- Une matrice carrée est diagonale si $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$
- Une matrice est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$
- Une matrice est triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$
- La matrice identité de \mathbb{R}^n est $I = (a_{ij})$ avec $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$
- Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j$
- La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls

13.2 Opérations sur les matrices

13.2.1 addition, multiplication par un scalaire

DÉFINITION 45

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
- $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

PROPRIÉTÉ 38

- $A + B = B + A$
- $A + 0 = 0 + A = A$
- $A - A = 0$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$

On dit que $(M_n(\mathbb{R}), +)$ forme un groupe commutatif

13.2.2 Multiplication et puissance

DÉFINITION 46

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{pq}(\mathbb{R})$ pour $n, p, q \in \mathbb{N}$
 on pose $AB = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$

ATTENTION AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Pratique du calcul:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \Rightarrow AB \in M_{23}(\mathbb{R})$

On pose le calcul comme ci dessous:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 8 & 14 & 3 \end{pmatrix} = AB$$

Ex: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow MY = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Le produit d'une matrice par un vecteur est un vecteur.

PROPRIÉTÉ 39

- $M(N_1 + N_2) = MN_1 + MN_2$
- $(M_1 + M_2)N = M_1N + M_2N$
- $M(NP) = (MN)P$
- $\lambda(MN) = (\lambda M)N = M(\lambda N)$

Par contre, **le produit matriciel n'est pas commutatif** et en général **$MN \neq NM$**

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & . \\ . & . \end{pmatrix}$

Une somme ou un produit de matrices diagonales (triangulaires) est diagonale (triangulaire).

DÉFINITION 47 (PUISSANCE D'UNE MATRICE)

$A^0 = I$ et si $k \geq 1$, $A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \times}$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

13.2.3 Inverse d'une matrice

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on $I \times A = A \times I = A$.

On dit que l'élément neutre pour la multiplication des matrices est la matrice identité.

On cherche à déterminer si $(M_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, c'est à dire si toute matrice M possède un inverse M^{-1} de telle sorte que $M \times M^{-1} = I$

La réponse est **NON**

En règle général, une matrice (même non nulle) ne possède pas d'inverse et l'ensemble ci dessus n'est pas un groupe pour \times

DÉFINITION 48

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

Lorsque cette matrice existe, elle est unique.

L'ensemble des matrices carrées inversibles forment un groupe pour \times et se note $GL_n(\mathbb{R})$ (groupe linéaire).

Ex: I est inversible d'inverse $I^{-1} = I$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

En résolvant $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

13.2.4 Transposition

DÉFINITION 49

On appelle transposée de $A = (a_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{R})$ la matrice ${}^tA = (a_{ji}) \in M_{pn}(\mathbb{R})$ obtenue en permutant les lignes en colonnes

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉ 40

- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

Si ${}^tA = A$ on dit que la matrice est symétrique.

Si ${}^tA = -A$ on dit qu'elle est anti-symétrique.

Si ${}^tA \times A = I$ on dit qu'elle est orthogonale.

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et ${}^t\bar{A} = A$, on dit qu'elle est hermitienne.

Chapitre 14

Déterminants

Historique

Les concepts de déterminants et de matrices sont apparus au cours du XVIIIème siècle dans le cadre de la résolution des systèmes d'équations linéaires. Les déterminants sont d'abord utilisés par Leibniz en 1678 comme une valeur dont la nullité indique le nombre de solutions du système, puis Cramer en 1754 établit les formules qui porte son nom et qui permettent la résolution de systèmes par les déterminants. Vandermonde, Laplace et Gauss développent les propriétés principales et Cauchy en 1815 synthétise l'ensemble des résultats connus.

Le concept de matrice est apparu plus tard. Gauss utilise matrices et déterminants sans faire de distinction. Ce sont Cayley et Sylvester qui séparent les deux notions. En 1850, Sylvester introduit le terme matrice comme un tableau rectangulaire de nombres, puis en 1858 Cayley publie "a theory of matrices" qui contient l'essentiel des propriétés du calcul matriciel.

14.1 Définition

14.1.1 Introduction

- Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan dans une base donnée.

On sait que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ab' - ba' \in \mathbb{R}$ et que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \exists \lambda \neq 0 / \vec{u} = \lambda \vec{v} \iff \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires.

- Soient $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace.

$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) \in \mathbb{R}$ est le produit mixte des trois vecteurs et caractérise leur coplanarité.

On pose $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3]$ et l'on a:

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 0 &\iff \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \text{ coplanaires} \\ &\iff \text{l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres (on dit linéairement dépendants)} \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 / \vec{u}_3 = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \end{aligned}$$

- On souhaite étendre à \mathbb{R}^n cette notion de déterminant qui doit caractériser la dépendance linéaire (ou l'indépendance linéaire) de n vecteurs de \mathbb{R}^n de telle façon que:

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = 0 &\iff \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \text{ linéairement dépendants} \\ &\iff \text{l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres (on dit linéairement dépendants)} \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \neq 0 / \vec{u}_n = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{u}_{n-1} \end{aligned}$$

Les démonstrations de la plupart des théorèmes qui suivent dépassent le cadre du cours. Nous les admettrons.

14.1.2 Déterminant d'une matrice

DÉFINITION 50

|| Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A le déterminant des n vecteurs colonnes de A

Nous ne démontrerons ni son existence ni son unicité et admettrons ses propriétés et le fait que:

PROPRIÉTÉ 41

$\det(A) \neq 0 \iff$ les vecteurs colonnes de A sont linéairements indépendants

PROPRIÉTÉ 42

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),$

- $\det(I) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A), \lambda \in \mathbb{R}$
- $\det({}^t A) = \det(A)$

PROPRIÉTÉ 43 (IMPORTANTE)

$\det(A) \neq 0 \iff A$ inversible

En ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

PROPRIÉTÉ 44 (LINÉARITÉ)

Le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne et à chaque colonne

Il faut bien distinguer matrices et déterminants. Un déterminant est un nombre réel, une matrice est un tableau. Les propriétés des deux ne sont pas les mêmes. Par exemple, la linéarité du déterminant par rapport à chaque ligne indique que l'on peut mettre en facteur un terme présent dans une seule ligne. Pour une matrice, il faut que ce terme soit en facteur de tous les coefficients. Passons maintenant au calcul des déterminants et aux exemples.

14.2 Méthodes de calcul

14.2.1 Méthode des cofacteurs

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Le mineur relatif au terme a_{ij} est le déterminant A_{ij} de la matrice obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j .

$$\text{Ex: } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ s'appelle cofacteur de a_{ij} et $(\Delta_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ s'appelle matrice des cofacteurs de A .

Le développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne permet de réduire la taille du déterminant à calculer, jusqu'à ne plus avoir que des déterminants de taille 2×2 .

THÉORÈME 56 (DÉVELOPPEMENT PAR RAPPORT À UNE LIGNE OU UNE COLONNE)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}). \forall i = 1 \dots n, \forall j = 1 \dots n$, on a:

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta_{kj}}_{\partial / \text{colonne } j} = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta_{ik}}_{\partial / \text{ligne } i}$$

Ex: Calculer $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la seconde ligne.

$$\det(A) = a_{21} \Delta_{21} + a_{22} \Delta_{22} + a_{23} \Delta_{23} = -a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} - a_{23} A_{23} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

Cette méthode est d'autant plus avantageuse que la matrice possède beaucoup de zéros.

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(3 - 2) = 2$$

14.2.2 Règle de Sarrus

$$\text{Si } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{33}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\text{Ex: } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 0 + 0 + 3 - 0 - 6 - 2 = -5$$

14.2.3 Opérations sur les lignes et les colonnes

Nous admettrons (et nous n'hésiterons pas à l'utiliser) le fait que:

- On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une ligne (resp une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp colonnes).
- Si l'on permute 2 lignes (2 colonnes) on change le signe du déterminant.

Ces propriétés sont utiles pour faire apparaître des zéros et pouvoir efficacement utiliser la méthode des cofacteurs.

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

PRATIQUE: Si A est triangulaire (ou diagonale)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

ATTENTION Ceci est faux dans les autres cas !

Dans le même ordre d'idée, si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A, B, C sont des matrices, alors

$$\det(M) = \det(A) \times \det(B)$$

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

14.3 Applications

14.3.1 Calcul de l'inverse

On a vu que A inversible $\iff \det(A) \neq 0$. En ce cas:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \Delta$$

Où Δ est la matrice des cofacteurs de A .

$$\text{Ex: } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible et } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.3.2 Indépendance linéaire

Il découle directement de la définition du déterminant qu'une famille de n vecteurs de \mathbb{R}^n est libre si et seulement si le déterminant de la matrice colonne formée par ces vecteurs est non nul. En particulier, le déterminant d'une matrice ayant deux lignes ou deux colonnes identiques est nul.

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Les déterminants sont aussi des outils essentiels à la résolution des systèmes linéaires. Nous reviendrons sur ce thème en détail dans une prochaine leçon, une fois que nous aurons introduit le concept d'espace vectoriel.

14.3.3 Volumes

PROPRIÉTÉ 45

- Soient u et v deux vecteurs du plan et \mathcal{A} l'aire du parallélogramme engendré par u et v
Alors $|\det(u, v)| = \mathcal{A}$
- Soient u, v, w 3 vecteurs de l'espace et \mathcal{V} le volume du parallélépipède rectangle engendré par u, v, w
Alors $|\det(u, v, w)| = \mathcal{V}$

On peut aussi généraliser la notion de volume algébrique en dimension n .

Ex: Soient $u(2, 0, 0)$, $v(0, 2, 0)$, $w(0, 0, 2)$ Alors $\det(u, v, w) = 2^3 \times \det(I) = 8$ représente le volume du cube de côté 2 dont les arêtes sont portées par les axes.

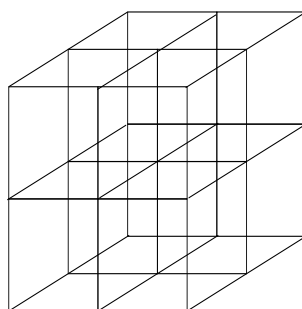


Figure 14.1: Volume d'un cube

Chapitre 15

Transformation de Laplace

15.1 Transformée de Laplace d'une fonction

15.1.1 Introduction et définition

Lorsque l'on étudie un signal périodique, l'outil mathématique adéquat est le développement en série de Fourier. La série de Fourier de la fonction contient toute l'information sur le spectre du signal. Lorsque les signaux ne sont pas périodiques, l'outil adéquat est la transformée de Fourier que nous avons déjà étudiée. Elle permet de définir le spectre d'une fonction non-périodique. Mais la transformation de Fourier est définie à l'aide d'une intégrale généralisée et pour certains signaux cette intégrale est divergente. C'est Olivier Heaviside (1850-1925), un physicien anglais, qui a proposé de définir une transformation analogue à celle de Fourier, mais définie pour un ensemble plus vaste de signaux et qui possède des propriétés analogues à la transformée de Fourier: c'est la transformation de Laplace. Durant toute cette leçon, on gardera à l'esprit la forte analogie entre ces deux transformées.

On ne travaillera dans toute la suite de ce chapitre qu'avec des fonctions causales, c'est à dire telles que $f(t) = 0$ si $t < 0$.

THÉORÈME 57

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique causale.
Sous réserve d'existence, on appelle transformée de Laplace de f la fonction notée $\mathcal{L}f$ ou F et définie par:

$$\mathcal{L}f(p) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

La variable p peut être réelle ou complexe, auquel cas la transformation définit une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Pour les premiers exemples, nous supposons que $p \in \mathbb{R}$.

La définition précise par ailleurs "sous réserve d'existence". Pour que la transformée existe, il faut et il suffit que la fonction $f(t)e^{-pt}$ soit intégrable en $+\infty$. Un cas fréquent où cette propriété est vérifiée est celui des fonctions intégrables pour lesquelles $\exists M > 0, \alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R} / \forall t \geq A, |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. En ce cas, la transformée de Laplace existe pour $p > \alpha$. Par exemple, une fonction continue et bornée sur $]0, +\infty[$ satisfait ces conditions. En pratique, nous traiterons les problèmes d'existence de la transformée au cas par cas et laisserons souvent de côté ces points théoriques pour nous focaliser sur les techniques de calcul.

Ex1: $f(t) = H(t) = \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t)$

Il s'agit de la fonction de Heaviside, encore appelée fonction échelon ou indicatrice de \mathbb{R}_+ . Elle va nous accompagner tout au long de cette leçon où elle joue un rôle fondamental. Cette fonction ne prend que deux valeurs: elle vaut 1 sur $[0, +\infty[$ et 0 sur $] - \infty, 0[$.

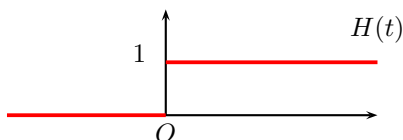


Figure 15.1: Fonction de Heaviside $H(t)$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

L'intégrale ci dessus ne converge que si $p > 0$ et F n'est donc définie que sur $]0, +\infty[$.

La fonction de Heaviside est très importante dans cette leçon. Pour transformer une fonction $f(t)$ quelconque en fonction causale, il suffit de la multiplier par la fonction de Heaviside: $f(t)H(t)$ est nulle si $t < 0$ et égale à $f(t)$ si $t \geq 0$. On dit alors que le signal a été fenêtré. Comme nous ne travaillons qu'avec des fonctions causales, nous supposons dans toute la leçon que les signaux sont ainsi multipliés par la fonction $H(t)$, même lorsque celle-ci sera omise (le mieux est d'écrire systématiquement $f(t)H(t)$ pour tout signal).

Ex2: $f(t) = e^{\alpha t} H(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{p-\alpha} \text{ qui n'est définie que sur }]\alpha, +\infty[$$

Les deux exemples ci dessus montrent que $\mathcal{L}f(p)$ n'existe que sous certaines conditions: Il est nécessaire et suffisant que la fonction $f(t)e^{-pt}$ soit intégrable en $+\infty$. Nous utiliserons par la suite certaines classes de fonctions satisfaisant cette condition.

Ex3: $f(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$ fonction indicatrice de l'intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b$.

$$F(p) = \int_a^b e^{-pt} dt = \frac{-1}{p} [e^{-pt}]_a^b = \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$$

Ex4: Transformée de Laplace de la masse de Dirac δ_0

Définissons comme d'habitude la masse de Dirac comme limite de fonctions indicatrices (en se souvenant qu'il ne s'agit pas d'une fonction mais d'une distribution): $\delta_0(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{1}_{[0, \epsilon]}(t)$

D'après l'exemple précédent, la transformée de Laplace de la fonction porte est $F_\epsilon(p) = \frac{1}{p\epsilon}(1 - e^{-p\epsilon})$

En appliquant la règle de l'Hospital on a donc $\mathcal{L}\delta_0(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-(-p)e^{-p\epsilon}}{p} = 1$

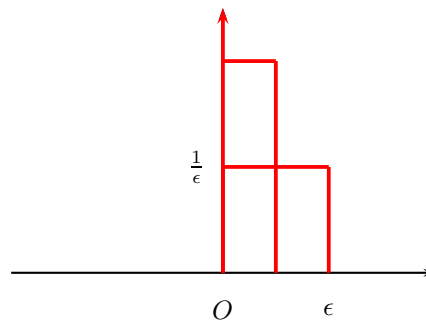


Figure 15.2: Fonction porte et masse de dirac δ_0

Notons encore l'analogie avec la transformation de Fourier: si f admet à la fois une transformée de Fourier et une transformée de Laplace (et les conditions d'existence ne sont pas les mêmes) alors

$$\boxed{\hat{f}(u) = F(2\pi i u)}$$

15.1.2 Propriétés des exponentielles complexes

Afin de manipuler la transformée de Laplace pour $p \in \mathbb{C}$, il est nécessaire de connaître certaines propriétés des exponentielles complexes:

PROPRIÉTÉ 46

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \\ \text{On pose } e^z = e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) \Rightarrow |e^z| = e^{\Re(z)} \text{ et } \arg(e^z) = \Im(z) \end{array} \right.$$

Ainsi, le module de l'exponentielle d'un complexe z est égale à l'exponentielle de sa partie réelle et son argument est égal à la partie imaginaire de z .

PROPRIÉTÉ 47

$$\left\| \forall z \in \mathbb{C}, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{zt} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{zt}| = 0 \iff \Re(z) < 0 \right.$$

Ex5: $f(t) = e^{it}H(t)$

$$\int_0^{+\infty} e^{it} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(i-p)t} dt = \frac{1}{i-p} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(i-p)t} - 1 \right) = \frac{1}{p-i}$$

à condition que la limite soit nulle. Or, $|e^{(i-p)t}| = e^{\Re((i-p)t)}$

t est un nombre réel. Si $p \in \mathbb{R}$, la partie réelle de $(i-p)t$ vaut $-pt$ qui tend vers 0 si et seulement si $p > 0$. Ainsi, la transformée de Laplace n'est définie que si $p > 0$. Maintenant si p est un nombre complexe, alors la partie réelle de $(i-p)t$ est égale à $-\Re(p)t$ qui tend vers 0 si et seulement si

$$\boxed{\Re(p) > 0}$$

15.1.3 Propriétés de la transformation

Soient f et g deux fonctions admettant des transformées de Laplace notées respectivement F et G . Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La linéarité de l'intégration implique aussitôt celle de la transformation:

THÉORÈME 58

$$\left\| \mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}f + \mu \mathcal{L}g \right.$$

Ex6: $f(t) = \sin t \times H(t)$ et $f(t) = \cos t \times H(t)$

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$

$$\int_0^{+\infty} \sin t e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{(i-p)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(i+p)t} dt = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{1+p^2}$$

$$\text{De même, } e^{it} = \cos t + i \sin t \Rightarrow \cos t = e^{it} - i \sin t \Rightarrow \mathcal{L} \cos(p) = \frac{1}{p-i} - i \frac{1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1}$$

Pour les mêmes raisons que dans l'exemple précédent, ces transformées ne sont définies que si $p > 0$ dans le cas où $p \in \mathbb{R}$ et si $\Re(p) > 0$ dans le cas où $p \in \mathbb{C}$

PROPRIÉTÉ 48 (EFFET D'UN RETARD)

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } a \in \mathbb{R} \\ g(t) = f(t-a)H(t-a) \Rightarrow G(p) = e^{-ap}F(p) \end{array} \right.$$

DÉMO

$$G(p) = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+a)} du = e^{-ap}F(p) \text{ en posant } u = t-a$$

□

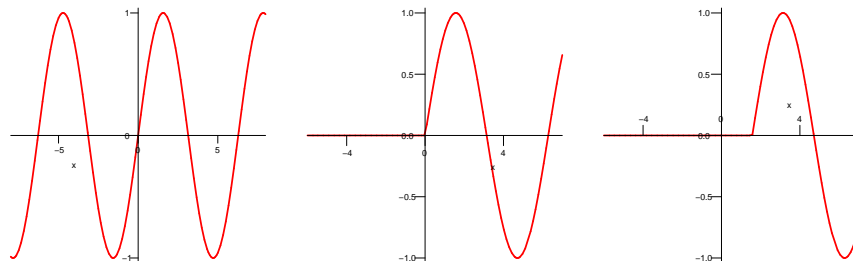


Figure 15.3: fonction $f(t)$, fonction causale $f(t)H(t)$ et fonction causale retardée $f(t-a)H(t-a)$

Ex7: $g(t) = \mathbb{1}_{[2,+\infty[}(t) \Rightarrow G(p) = e^{-2p} \frac{1}{p}$

Lorsque $a > 0$, la fonction $f(t-a)H(t-a)$ est retardée par rapport à la fonction $f(t)H(t)$: elle “début” avec un retard de a et sa courbe est donc translatée d’un facteur a sur la droite par rapport à celle de $f(t)H(t)$.

Il ne faudra surtout pas oublier la fonction de Heaviside dans ce cas. En effet, la retardée de $f(t)$ est $f(t-a)$ dont les valeurs entre 0 et a ne sont pas forcément nulles, alors que la retardée de $f(t)H(t)$ est $f(t-a)H(t-a)$ qui est toujours nulle entre 0 et a . Ainsi, si l'on oublie le terme $H(t)$, la fonction retardée n'est pas la même.

PROPRIÉTÉ 49 (EFFET D'UNE DILATATION)

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } a > 0 \\ g(t) = f(at) \Rightarrow G(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \end{array} \right.$$

DÉMO

$$G(p) = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu/a} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \text{ en posant } u = at$$

□

Ex8: $f(t) = \sin(\omega t)H(t)$

$$F(p) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

PROPRIÉTÉ 50 (EFFET D'UN AMORTISSEMENT)

$$\left\| g(t) = e^{\alpha t} f(t) \Rightarrow G(p) = F(p - \alpha) \right.$$

DÉMO

$$G(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{\alpha t} e^{-pt} dt = F(p - \alpha)$$

□

Ex9: $g(t) = e^{\alpha t} \sin(\omega t) \Rightarrow G(p) = \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$

PROPRIÉTÉ 51 (EFFET D'UNE DÉRIVATION)

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet g(t) = f'(t) \Rightarrow G(p) = pF(p) - f(0) \\ \bullet g(t) = f''(t) \Rightarrow G(p) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \end{array} \right.$$

DÉMO

La démonstration qui suit est valable pour une fonction $f(t)$ de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Nous admettrons que dans certains cas où f n'est pas continue sur tout l'intervalle, on peut néanmoins l'appliquer. La démonstration se fait en utilisant une intégration par parties.

$$G(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

Dans le calcul ci-dessus, nous avons discrètement conclu que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-pt} = 0$ alors que rien ne le justifie. C'est le fait que f est supposée C^0 qui permet cette conclusion. Nous l'admettrons.

La démonstration est la même pour la dérivée seconde.

□

Ex10: $f(t) = \sinh(\omega t)H(t)$ et $g(t) = \cosh(\omega t)H(t)$

$$\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

Par linéarité de la transformation, on a $F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$

Maintenant, $g(t) = \frac{1}{\omega} f'(t) \Rightarrow G(p) = \frac{p}{\omega} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} = \frac{p}{p^2 - \omega^2}$

PROPRIÉTÉ 52 (PASSAGE À LA PRIMITIVE)

$$\left\| g(t) = \int_0^t f(u) du \Rightarrow G(p) = \frac{1}{p} F(p) \right.$$

DÉMO

Soit Φ la primitive de f qui s'annule en $t = 0$. $F(p) = p \times \mathcal{L}\Phi(p) - \Phi(0) \Rightarrow \mathcal{L}\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$ □

Ex11: $f(t) = tH(t)$ et $g(t) = t^2H(t)$

t est la primitive de 1 qui s'annule en 0. D'après la propriété, $F(p) = \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$

De la même façon, $t^2/2$ est la primitive de t qui s'annule en 0 donc $G(p) = \frac{2}{p} \times \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^3}$

PROPRIÉTÉ 53 (MULTIPLICATION PAR t^α)

$$\begin{aligned} \bullet g(t) = tf(t) &\Rightarrow G(p) = -F'(p) \\ \bullet g(t) = \frac{1}{t}f(t) &\Rightarrow G(p) = \int_p^{+\infty} F(u)du \\ \bullet g(t) = t^n f(t) &\Rightarrow G(p) = (-1)^n F^{(n)} \end{aligned}$$

DÉMO

Admis

□

Ex12: $f(t) = t \cos \omega t$

$$F(p) = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}(\cos \omega t) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

La notation $\mathcal{L}(\cos \omega t)$ n'est pas très rigoureuse car la transformée de $\cos(\omega t)$ est une fonction de p et non de t . Il vaut mieux écrire en ce cas $g(t) = \cos(\omega t)$ et parler de $G(p)$ pour sa transformée de Laplace.

PROPRIÉTÉ 54 (TRANSFORMÉE D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE)

$$\begin{aligned} &\text{Soit } f \text{ une fonction causale, périodique de période } T \text{ sur } \mathbb{R}_+: f(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \text{ et } f(t+T) = f(t) \text{ si } t > 0 \\ &\text{Soit } f_0(t) = f(t)\mathbb{1}_{[0,T[}(t): f_0(t) \text{ est obtenue en fenêtrant } f(t) \text{ sur la période } [0, T[. \\ &\text{Soit } F(p) \text{ la transformée de Laplace de } f(t) \text{ et } F_0(p) \text{ celle de } f_0(t). \text{ Alors:} \\ &F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}} \end{aligned}$$

DÉMO

La fonction $f_0(t - nT)$ est la translatée de f_0 d'un facteur nT par la droite (cf. figure). On peut ainsi

reconstituer $f(t)$ à partir de $f_0(t)$: $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0(t - nT)$

D'après la propriété de décalage dans le temps, la transformée de $f_0(t - nT)$ est $F_0(p)e^{-npT}$

Par ailleurs, la transformation étant linéaire:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_0(p)e^{-npT} \quad (\bullet)$$

On rappelle qu'on ne peut pas, en principe, permuter une intégrale avec une somme infinie; mais nous admettrons que ceci est licite dans ce cas précis, sous certaines hypothèses que nous supposons vérifiées...

Dans l'égalité (\bullet) , $F_0(p)$ ne dépend pas de n et donc $F(p) = F_0(p) \times \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-pT})^n$

Cette série est une série géométrique convergente car $0 \leq e^{-pT} < 1$: $\Rightarrow F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}$

□

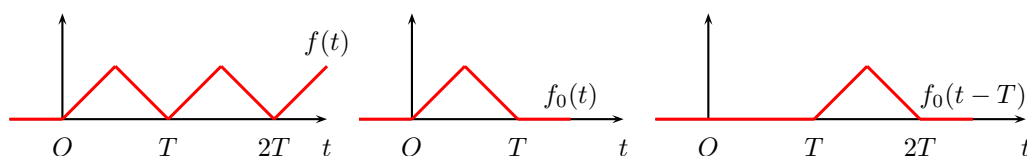


Figure 15.4: Fonction périodique causale

Ex13: Transformée du peigne de Dirac

Posons $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n(t)$

Cette formule définit le peigne de Dirac comme somme d'une infinité de masses de Dirac régulièrement espacées.



Figure 15.5: Peigne de Dirac

On sait que la transformée de la masse de Dirac en 0 est $L\delta_0(p) = 1$

D'après la formule ci dessus, on a $F(p) = \frac{1}{1 - e^{-p}}$ pour $p > 0$: $L \sqcup(p) = \frac{1}{1 - e^{-p}}$

Ex14: f T -périodique définie par $f(t) = 1$ sur $]0, T/2[$ et $f(t) = -1$ sur $]T/2, T[$

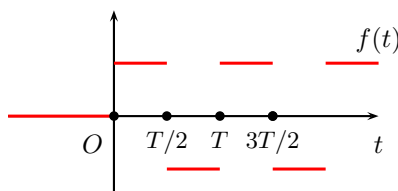


Figure 15.6: Fonction $f(t)$

La fonction $f_0(t) = 1_{]0, T/2[}(t) - 1_{]T/2, T[}(t)$ a pour transformée de Laplace

$$F_0(p) = \int_0^{T/2} e^{-pt} dt - \int_{T/2}^T e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \left[1 - e^{-pT/2} - e^{-pT/2} + e^{-pT} \right] = \frac{1}{p} (1 - e^{-pT/2})^2$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{p} \times \frac{(1 - e^{-pT/2})^2}{(1 - e^{-pT/2})(1 + e^{-pT/2})} = \frac{1}{p} \times \frac{1 - e^{-pT/2}}{1 + e^{-pT/2}} = \frac{1}{p} \times \tanh\left(\frac{pT}{4}\right)$$

15.1.4 Produit de convolution

Nous rappelons que si f et g sont deux fonctions absolument intégrables sur \mathbb{R} , leur produit de convolution est défini par $f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du$ et que ce produit de convolution représente un mélange ou un filtrage entre les deux fonctions. On se reportera à la leçon sur la transformation de Fourier pour plus de précisions.

Dans le cas où les deux fonctions sont causales, $f(t) = 0$ si $t < 0$ et l'intégrale est donc nulle en ce cas. De même, comme $g(t)$ est causale, $g(t-u) = 0$ si $u > t$. Finalement, l'intégration se fait simplement entre 0 et t .

DÉFINITION 51

Soient f et g deux fonctions causales admettant une transformée de Laplace.

Le produit de convolution de f et g est la fonction $f * g$ définie par:

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du \text{ si } t > 0$$

$$f * g(t) = 0 \text{ si } t \leq 0$$

On rappelle rapidement que le produit de convolution est commutatif, associatif, linéaire en f et g , et que la masse de Dirac en 0 est son élément neutre (lorsque l'on se place dans l'espace des distributions). La propriété principale du produit de convolution est la suivante:

Soient f et g deux fonctions causales de transformées de Laplace respectives $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \times \mathcal{L}g$$

La transformation de Laplace transforme un produit de convolution en produit normal.

Ex13: Produit de convolution de deux exponentielles causales.

Posons $f(t) = e^{\alpha t} H(t)$ et $g(t) = e^{\beta t} H(t)$

$$f * g(t) = \frac{e^{\beta t}}{\alpha - \beta} \left(e^{(\alpha - \beta)t} - 1 \right) H(t) \text{ si } \alpha \neq \beta$$

$$f * g(t) = te^{\alpha t} H(t) \text{ si } \alpha = \beta$$

Ex14: Soit f une fonction causale et H la fonction de Heaviside.

$$H * f(t) = \int_0^t H(t-u)f(u)du = \int_0^t f(u)du$$

Ainsi, le produit de convolution de H par une fonction f est égale à la primitive de f qui s'annule en 0.

Si nous calculons maintenant la transformée de Laplace de $H * f$, on obtient $\frac{1}{p} \times F(p)$ ce qui démontre d'une autre façon la formule qui permet de calculer la transformée de Laplace d'une primitive.

15.1.5 Les théorèmes limites

Il s'agit de deux théorèmes liant le comportement d'une fonction et de sa transformée de Laplace en 0 et l'infini.

THÉORÈME 59 (THÉORÈME DE LA VALEUR INITIALE)

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

DÉMO

Supposons f de classe C^1 et calculons la transformée de Laplace de f' :

$$\mathcal{L}f'(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

Prenons maintenant la limite, lorsque $p \rightarrow +\infty$, des deux membres de cette expression. Sous réserve de pouvoir permuter la limite avec le signe intégral (ce qui n'est valable que sous certaines conditions) et sous réserve que $f'(t)e^{-pt}$ tende vers 0 en l'infini (ce que nous admettons aussi), alors:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} f'(t)e^{-pt}dt = 0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

□

Ex15: $f(t) = e^{\alpha t} H(t)$

Si $p > \Re(\alpha)$ alors $F(p) = \frac{1}{p - \alpha}$

On constate alors que $\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = 1$ et par ailleurs que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$

THÉORÈME 60 (THÉORÈME DE LA VALEUR FINALE)

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

DÉMO

Nous effectuons une démonstration aussi peu rigoureuse que la précédente, en supposant que l'on peut permuter le signe \lim et le signe \int :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{L}f'(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \lim_{p \rightarrow 0} f'(t)e^{-pt}dt = [f(t)]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

$$\text{Par ailleurs, } \lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{L}f'(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(pF(p) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \right)$$

$$\text{En combinant les deux égalités, il vient } \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

□

Ex16: $f(t) = H(t)$

Pour $p > 0$, nous savons que $F(p) = \frac{1}{p}$ et l'on voit donc que $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = 1$
Par ailleurs, $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 1$ et le théorème est donc bien vérifié.

Ex17: $f(t) = \cos t \times H(t)$

Pour $p > 0$, nous savons que $F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$ et l'on voit donc que $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = 1$
Par contre, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ n'existe pas et le théorème ne s'applique donc pas.

15.1.6 Transformation inverse

Etant donné une fonction $F(p)$, nous admettons l'existence, pour les fonctions que nous utiliserons par la suite, d'une unique fonction $f(t)H(t)$ appelée transformée inverse de Laplace et définie par:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

f s'appelle l'original de F .

Le passage d'une fonction à sa transformée inverse est linéaire et, dans le cadre de notre étude, sera considéré comme bijectif, de sorte que le tableau des transformées servira aussi à déterminer les originaux.

Lorsque la fonction n'est pas dans le tableau, on essaiera de se ramener à une somme de fonctions dont chacune est d'original connu (en effectuant, par exemple, une décomposition en éléments simples).

Ex18: Original de $\frac{1}{p+1}$: par lecture directe du tableau, on a $f(t) = e^{-t}H(t)$

Ex19: Original de $F(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$

$$F(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \Rightarrow f(t) = e^{-t}H(t) - e^{-2t}H(t)$$

Ex20: Original de $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2 + 2p + 2)}$

$$F(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} \Rightarrow f(t) = e^{-t}(1 - \cos t)H(t)$$

15.2 Applications

15.2.1 Résolution d'équations différentielles

La technique est la même que pour la transformation de Fourier: on calcule les transformées de Laplace des deux membres de l'équation. Celle-ci devient alors une équation (non différentielle) dont l'inconnue est la transformée de Laplace de la fonction initiale. Après avoir résolu l'équation, on calcule l'original qui est la solution de l'équation différentielle.

Equations linéaires d'ordre 1

Soit $ay' + by = f(t)$ une équation que nous noterons (E)

où $y(t)$ est une fonction causale dérivable, admettant une transformée de Laplace $Y(p)$
et $f(t)$ est une fonction admettant une transformée de Laplace $F(p)$

En calculant la transformée de Laplace de part et d'autre de l'équation, on peut écrire, formellement,

$$Y(p) = \frac{F(p) + ay(0)}{ap + b} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(p)}{ap + b}\right] + y(0)e^{-bt/a} = y_1(t) + y(0)e^{-bt/a}$$

Le premier terme représente le régime permanent de la solution tandis que le second représente le régime transitoire qui devient négligeable pour des valeurs de t augmentant. Ce terme ne dépend que des conditions initiales.

Ex21: Résoudre $y' + 2y = 2t - 3$ avec $y(0) = 0$

On suppose évidemment la fonction du second membre causale, ie. égale à $(2t - 3)H(t)$

$$pY(p) + 2Y(p) = 2\mathcal{L}t - \mathcal{L}3 + y(0) \Rightarrow Y(p) = \frac{2 - 3p}{p^2(p + 2)} = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{2}{p + 2} \Rightarrow y(t) = (t - 2 + 2e^{-2t})H(t)$$

Equations linéaires d'ordre 2

Soit $ay'' + by' + cy = f(t)$ une équation que nous noterons (E)

où $y(t)$ est une fonction causale deux fois dérivable, admettant une transformée de Laplace $Y(p)$ et $f(t)$ est une fonction admettant une transformée de Laplace $F(p)$

Comme ci-dessus, en calculant la transformée de Laplace de part et d'autre de l'équation, on peut écrire, formellement,

$$ap^2Y(p) - apy(0) - ay'(0) + bpY(p) - by(0) + cY(p) = F(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{F(p) + (ap + b)y(0) + y'(0)}{ap^2 + bp + c}$$

On cherche alors l'original de cette fonction qui est l'unique solution de l'équation lorsque l'on impose deux conditions initiales.

Ex22: Résoudre $y'' - 2y' + y = te^t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

$$Y(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{1}{(p - 1)^2} + p - 2 \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{(p - 1)^4} - \frac{1}{(p - 1)^2} + \frac{1}{p - 1} \Rightarrow f(t) = e^t(1 - t + \frac{t^3}{6})H(t)$$

Nous verrons, en TD, beaucoup d'exemples et d'applications utilisant cette technique de résolution des équations différentielles.

15.2.2 Fonctions de transfert

Introduction

Ce paragraphe est identique à celui des fonctions de transfert vu dans la leçon sur la transformation de Fourier. Nous considérons des systèmes physiques qui possèdent en entrée un signal $x(t)$ et en sortie un signal $y(t)$.

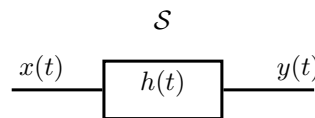


Figure 15.7: Système physique linéaire

On rappelle qu'un tel système est linéaire, causal et stationnaire et que dans ces conditions, il est caractérisé par une fonction $h(t)$ ne dépendant que des caractéristiques du système et telle que $y(t) = h * x(t)$: La sortie est toujours égale au produit de convolution de l'entrée par une fonction $h(t)$.

Si toutes les fonctions en jeu admettent des transformées de Laplace notées respectivement $X(p)$, $Y(p)$ et $H(p)$, alors les propriétés de la transformation de Laplace montrent que

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

La fonction $H(p)$ s'appelle fonction de transfert ou **transmittance** du système.

Parmi les systèmes possédant les propriétés décrites ci-dessus, on trouve ceux qui sont régis par des équations différentielles linéaires, c'est à dire ceux pour lesquels $y(t)$ et $x(t)$ sont liés par une équation du type

$$\sum_{i=1}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t)$$

En utilisant la propriété de dérivation de la transformée de Laplace, on voit alors que pour un tel système,

$$H(p) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

La fonction de transfert est donc une fraction rationnelle en la variable p . Les zéros et les pôles de cette fraction nous donnerons les propriétés du filtre. Nous reviendrons un peu plus loin sur ce point.

Exemple d'un filtre RC

Considérons une cellule RC avec une tension d'entrée $x(t)$ et une tension de sortie $y(t)$ mesurée aux bornes du condensateur.

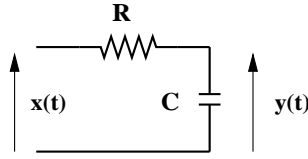


Figure 15.8: Filtre RC

Nous supposons que x et y admettent une transformée de Laplace. On rappelle que l'équation différentielle qui pilote ce système est $RCy'(t) + y(t) = x(t)$

$$RCy'(t) + y(t) = x(t) \Rightarrow RCp \times Y(p) + Y(p) = X(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{X(p)}{1 + RCp} \quad (\bullet)$$

La fonction de transfert du filtre est donc $H(p) = \frac{1}{1 + RCp}$ qui possède un pôle simple réel en $p = -1/RC$

Supposons que la tension d'entrée est une constante: $x(t) = E$.

$$\text{Alors } X(p) = \frac{E}{p} \text{ et l'on a } Y(p) = \frac{E}{p(1 + RCp)} = E \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{RC} + p} \right)$$

L'original de cette fonction est $y(t) = E \left(1 - e^{-t/(RC)} \right) H(t)$ qui représente la courbe de charge d'un condensateur.

L'application des théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale montre par ailleurs que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = E \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) = 0$$

Exemple d'un filtre RL

On considère une cellule RL montée en série dont on cherche l'intensité $i(t)$ en fonction du temps t . La force électromotrice $e(t)$ appliquée à ce circuit est une impulsion rectangulaire donnée par

$$e(t) = E \times \mathbb{1}_{[t_1, t_2]}(t) \text{ avec } E \in \mathbb{R}_+ \text{ et } 0 < t_1 < t_2.$$

On admet que i est alors une fonction causale, continue sur $]0, +\infty[$ et dérivable par morceaux et que l'équation régissant l'évolution du circuit est

$$L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t) = e(t)$$

Déterminons la transformée de Laplace de $e(t)$:

$$e(t) = E \times \mathbb{1}_{[t_1, t_2]}(t) \Rightarrow \mathcal{L}e(p) = \int_0^{+\infty} e(t)e^{-pt} dt = \frac{E}{p}(e^{-t_1 p} - e^{-t_2 p})$$

$$\text{Par ailleurs, } \frac{1}{p(Lp + R)} = \frac{1}{L} \frac{1}{p(p + R/L)} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + R/L} \right)$$

Ainsi, l'original de cette fraction est $\frac{1}{R}(1 - e^{-Rt/L})H(t)$

On en déduit que l'original de $\frac{e^{-\tau p}}{p(Lp + R)}$ est $\frac{1}{R}(1 - e^{-R(t-\tau)/L})H(t - \tau)$ pour $\tau > 0$.

Soit $I(p)$ la transformée de Laplace de $i(t)$.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e \Rightarrow L(pI - i(0)) + RI = \mathcal{L}e(p)$$

$$\Rightarrow I(Lp + R) = \frac{1}{p}(e^{-t_1 p} - e^{-t_2 p}) \Rightarrow I(p) = \frac{1}{p(Lp + R)}(e^{-t_1 p} - e^{-t_2 p})$$

$$\Rightarrow I(p) = \frac{1}{R} \left[1 - e^{-R(t-t_1)/L} \right] H(t-t_1) - \frac{1}{R} \left[1 - e^{-R(t-t_2)/L} \right] H(t-t_2)$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} \bullet & i(t) = 0 & \text{si } t < t_1 \\ \bullet & i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-R(t-t_1)/L}) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \bullet & i(t) = \frac{1}{R}e^{-Rt/L}(e^{Rt_2/L} - e^{Rt_1/L}) & \text{si } t \geq t_2 \end{cases}$$

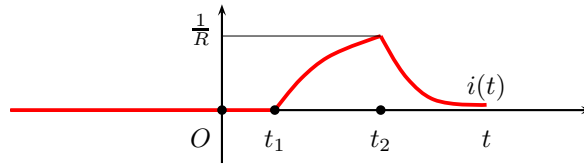


Figure 15.9: Fonction $i(t)$

15.2.3 Stabilité d'un système

Nous restons dans le cadre des fonctions de transfert. Considérons un système dont l'entrée est $x(t)$, la sortie $y(t)$ et la fonction de transfert $h(t)$. Notons par une lettre majuscule leur transformée de Laplace respective. Alors $Y(p) = H(p)X(p)$. Nous avons vu que $H(p)$ est une fraction rationnelle de la variable p , que l'on peut donc écrire

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}$$

avec $m < n$ et n est l'ordre du système (nous avons vu jusqu'ici des systèmes d'ordre 1 et 2). La forme de la réponse dépend des pôles de cette fraction rationnelle.

Supposons dans un premier temps que tous les pôles p_1, \dots, p_n soient simples (éventuellement dans \mathbb{C}).

$$\text{En décomposant en éléments simples, } H(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p - p_k}$$

Notons $p_k = u_k + iv_k$ la forme algébrique des pôles. En passant à l'original, on en déduit que la réponse impulsionnelle du système est de la forme $y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{u_k t} e^{iv_k t}$

Le terme $e^{u_k t}$ correspond à un amortissement de la réponse si et seulement si $\Re(p_k) = u_k < 0$, car alors l'exponentielle tend vers 0. Si $u_k > 0$, on a une amplification de la réponse. Le terme $\alpha_k e^{iv_k t}$ correspond à un signal sinusoïdal oscillant.

DÉFINITION 52

Un système est stable si l'une des 3 conditions équivalentes est vérifiée:

- Pour toute entrée bornée, la sortie est également bornée.
- La sortie tend vers 0 quand l'entrée devient nulle.
- Si $y(t)$ est la réponse impulsionnelle, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

THÉORÈME 61

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable est:

$$\forall k = 1, \dots, n, \Re(p_k) < 0$$

Passons maintenant au cas général d'une fraction avec des pôles éventuellement multiples.

Le dénominateur de $H(p)$ peut alors s'écrire sous la forme $\prod_{k=1}^n (p - p_k)^{n_k}$ avec $\sum n_k = n$. En ce cas, le

théorème de décomposition en éléments simples montre que la réponse impulsionnelle sera de la forme

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k t^{n_k-1} e^{p_k t}$$

On retrouve la condition de stabilité. $y(t)$ tend vers 0 si $\Re(p_k) < 0$ pour tout k .

Ex: $H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{1}{ap^2 + bp + c}$

Il s'agit de la fonction de transfert d'un filtre du second ordre. Soit Δ le discriminant de Q .

Si $c = 0$, 0 est un pôle et le système n'est pas stable. On suppose maintenant $c \neq 0$.

Si $\Delta > 0$, on a deux racines réelles qui doivent être < 0 , ce qui arrive si $c/a > 0$ et $b/a > 0$.

Si $\Delta = 0$, on a une racine double qui est négative si $b/a > 0$.

Si $\Delta < 0$, les deux racines complexes conjuguées ont une partie réelle $-b/2a$. Ainsi, le système est stable si $b/a > 0$.

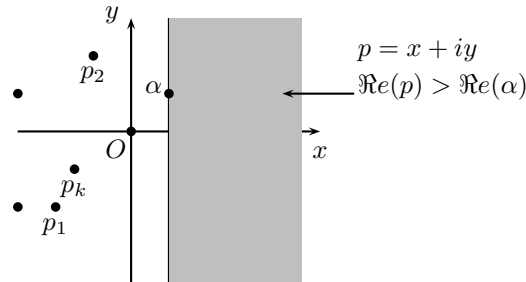


Figure 15.10: Condition de stabilité d'un système

Annexe: Tableau des transformées usuelles

$f(t)H(t)$	$F(p)$	$f(t)H(t)$	$F(p)$
$H(t)$	$\frac{1}{p}$	$tH(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$\delta_0(t)$	$\frac{1}{p}$	$t^2H(t)$	$\frac{2}{p^3}$
$e^{\alpha t}H(t)$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$t^n H(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin t \times H(t)$	$\frac{1}{p^2 + 1}$	$\sqcup \sqcup (t)$	$\frac{1}{1 - e^{-p}}$
$\cos t \times H(t)$	$\frac{p}{p^2 + 1}$	$f(t - a)H(t - a)$	$e^{-ap}F(p)$
$\sin(\omega t) \times H(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$f(at)H(t)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
$\cos(\omega t) \times H(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$e^{\alpha t}f(t)$	$F(p - \alpha)$
$e^{\alpha t} \sin(\omega t) \times H(t)$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$	$f'(t)H(t)$	$pF(p) - f(0)$
$e^{\alpha t} \cos(\omega t) \times H(t)$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$	$f''(t)H(t)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
$\sinh t \times H(t)$	$\frac{1}{p^2 - 1}$	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{p}F(p)$
$\cosh t \times H(t)$	$\frac{p}{p^2 - 1}$	$tf(t)H(t)$	$-F'(p)$
$\sinh(\omega t) \times H(t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{1}{t}f(t)H(t)$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
$\cosh(\omega t) \times H(t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$t^n f(t)H(t)$	$(-1)^n F^{(n)}$
$e^{\alpha t} \sinh(\omega t) \times H(t)$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 - \omega^2}$		
$e^{\alpha t} \cosh(\omega t) \times H(t)$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \omega^2}$		

Partie III

Semestres 3 & 4

Chapitre 16

Espaces vectoriels

Historique

Ce sont Arthur Cayley (1821-1895) et Hermann Grassmann (1809-1877) qui ont les premiers utilisé la notion d'espace vectoriel à n dimensions. En 1844, Grassmann parle "d'espace linéaire" et définit la notion de sous espace et de dimension. En 1862, il en connaît les propriétés principales. C'est Peano en 1888 qui donnera des espaces vectoriels la définition axiomatique que nous connaissons aujourd'hui.

16.1 Espace vectoriel

16.1.1 Définition

Un espace vectoriel sur \mathbb{K} (on notera $\mathbb{K}\text{ ev}$) est un ensemble E muni de deux opérations $+$ et \times qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication par un réel, dans l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace (commutativité de $+$ et \times , associativité, distributivité....).

La définition qui suit ne sera pas utilisée par la suite et il suffit de retenir que les éléments de E s'appellent des vecteurs et ont les mêmes propriétés que les vecteurs du plan ou de l'espace. Sauf mention contraire, nous travaillerons uniquement sur des espaces de dimension finie.

Dans toute la suite, \mathbb{K} (appelé ensemble des scalaires) représentera un corps commutatif, souvent \mathbb{R} , \mathbb{C} ou $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Nous ne mettrons pas (toujours) de flèches sur les vecteurs et il faudra faire très attention à ne confondre ceux-ci avec les éléments de \mathbb{K} .

DÉFINITION 53

Un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} est la donnée $(E, +, \times)$ d'un ensemble E muni d'une opération interne $+$ et d'une opération externe \times de $E \times \mathbb{K} \rightarrow E$ telles que:

- $(E, +)$ est un groupe commutatif
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x, y \in E, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x \in E, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x \in E, \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- $\forall x \in E, 1 \times x = x$

Exemples:

- **Ex1:** \mathbb{R}^2 ensemble des vecteurs du plan muni des opérations usuelles

Si u et v sont deux vecteurs du plan, il suffit d'utiliser la règle du parallélogramme ou la relation de Chasles pour construire $u + v$. Pour un réel λ , le vecteur λu a la même direction que u , le même sens si $\lambda > 0$ (le sens contraire sinon) et une norme multipliée par $|\lambda|$. On vérifie alors que ces deux opérations possèdent toutes les propriétés ci-dessus.

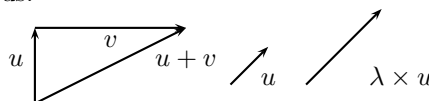


Figure 16.1: $+$ et \times dans \mathbb{R}^2

- **Ex2:** \mathbb{R}^3 ensemble des vecteurs de l'espace, muni des opérations usuelles.

Cet exemple prolonge le précédent.

- **Ex3:** \mathbb{R} ensemble des nombres réels, muni de $+$ et \times classiques.

Un nombre réel peut donc être considéré comme un vecteur. Sa représentation peut se faire sur une droite graduée Δ , un nombre x étant représenté par un vecteur dont la direction est celle de Δ , la norme est $|x|$ et le sens est donné par le signe de x .

- **Ex4:** $M_{n,p}(\mathbb{R})$ ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefs dans \mathbb{R} muni de $+$ et de la \times par un scalaire.

- **Ex5:** $\mathbb{R}_n[x]$ ensemble des polynômes de degré $\leq n$ muni des opérations usuelles.

Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ et $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$, alors

$$(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

De même, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_nx^n$

Ces opérations font de $\mathbb{R}_n[x]$ un \mathbb{R} ev.

- **Ex6:** \mathcal{F} ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni des opérations usuelles.

Soient $f : x \longrightarrow f(x)$ et $g : x \longrightarrow g(x)$ deux fonctions définies sur \mathbb{R} .

On définit la somme de ces deux fonctions comme étant la fonction $f + g$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à un réel x associe $f(x) + g(x)$. De la même façon, si $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est la fonction qui à un réel x associe le nombre $\lambda f(x)$. On vérifie facilement que ces deux opérations font de \mathcal{F} un \mathbb{R} ev.

- **Ex7:** \mathbb{C} ensemble des nombres complexes, muni de $+$ et \times , est un \mathbb{R} ev.

- **Ex8:** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites numériques muni des opérations usuelles, est un \mathbb{R} ev.

DÉFINITION 54

Un sous espace vectoriel F de E est un sous groupe commutatif stable par \times
 $F \neq \emptyset$ est un sous espace vectoriel de $E \iff \forall x, y \in F, \lambda \in \mathbb{K}, x + y \in F \text{ et } \lambda x \in F$

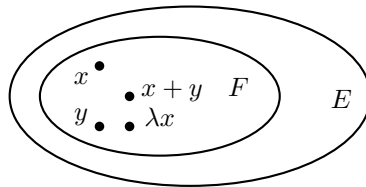


Figure 16.2: F Sous-espace vectoriel de E

Un sous-espace vectoriel est donc un sous-ensemble non vide stable par addition et multiplication par un réel. Nous noterons sev pour sous-espace vectoriel.

Exemples:

- **Ex1:** L'ensemble F des vecteurs du plan colinéaires à un vecteur a donné (différent du vecteur nul) est un sev de \mathbb{R}^2 .

- **Ex3:** L'ensemble réduit à $\{0\}$ est le seul sev de l'ensemble \mathbb{R} des réels (à part lui-même).

- **Ex4:** L'ensemble $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ des matrices symétriques de taille $n \times n$ est un sous-espace vectoriel sur \mathbb{R} de l'ensemble des matrices carrées $(M_n(\mathbb{R}), +, \times)$. En effet, il est non vide (la matrice identité y est), la somme de deux matrices symétriques est symétrique et le produit d'une matrice symétrique par un réel est symétrique.

De la même façon, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures, ou diagonales) est un sev de l'ensemble des matrices de même taille.

L'ensemble $(GL_n(\mathbb{R}), +, \times)$ des matrices inversibles de taille $n \times n$ **n'est pas** un sev de $(M_n(\mathbb{R}), +, \times)$ car la somme de deux matrices inversibles n'est pas forcément inversible.

- **Ex5:** $(\mathbb{R}_{n-1}[x], +, \times)$ ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$, est un sev de $(\mathbb{R}_n[x], +, \times)$.

- **Ex6:** L'ensemble $C^2(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R} est un sev de l'ensemble \mathcal{F} des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . L'ensemble des fonctions de classe C^2 qui sont nulles en 0 est un sev de $C^2(\mathbb{R})$ et donc aussi de \mathcal{F} .

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est un sev de $C^2(\mathbb{R})$

• **Ex7:** $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-espace vectoriel réel de $(\mathbb{C}, +, \times)$

16.1.2 Base et dimension d'un espace vectoriel

Nous commencerons ce paragraphe par quelques rappels sur la notion (fondamentale pour cette leçon) d'indépendance linéaire:

2 vecteurs du plan x et y sont linéairement indépendants (on dira également libres) s'ils sont non colinéaires:

$$y = \lambda x \Rightarrow \lambda = 0$$

3 vecteurs de l'espace x, y, z sont linéairement indépendants s'ils sont non coplanaires:

$$z = \lambda x + \mu y \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

n vecteurs x_1, x_2, \dots, x_n sont linéairement indépendants ssi:

$$x_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n-1$$

Autrement dit, des vecteurs sont libres si on ne peut exprimer l'un d'eux comme une combinaison linéaire des autres.

Une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n est une expression de la forme $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$

Une combinaison linéaire de n vecteurs de E est un vecteur de E .

L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs e_1, \dots, e_n est un sous-espace vectoriel de E noté $\text{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$. On dit qu'il est engendré par la famille e_1, \dots, e_n ou également que la famille e_1, \dots, e_n est génératrice de E .

DÉFINITION 55

e_1, e_2, \dots, e_n forment une base de E si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon **unique** sous la forme $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$

Les $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ s'appellent les coordonnées de x dans la base e_1, e_2, \dots, e_n

THÉORÈME 62 (DE LA DIMENSION)

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie E ont le même nombre de vecteurs:
C'est la dimension de E . On la notera $\dim E$.

DÉMO

C'est un théorème difficile que nous admettons. La dimension d'un ev peut se voir comme le nombre de coefficients indépendants nécessaires pour décrire un vecteur de l'espace en question, ou également comme le nombre de degrés de liberté dont on dispose dans cet espace.

□

Exemples:

• **Ex1:** \mathbb{R}^2 est de dimension 2; une base est donnée par n'importe quel couple $\{i, j\}$ de vecteurs non colinéaires et on a alors $i(1, 0)$ et $j(0, 1)$ de sorte que u a pour coordonnées (x, y) dans la base $\{i, j\}$ ssi $u = xi + yj$. On dit que $\{i, j\}$ est la base canonique.

• **Ex2:** \mathbb{R}^3 est de dimension 3; une base est donnée par n'importe quel triplet $\{i, j, k\}$ de vecteurs non coplanaires et on a alors $i(1, 0, 0)$, $j(0, 1, 0)$ et $k(0, 0, 1)$

• **Ex3:** \mathbb{R} est de dimension 1; une base est donnée par n'importe quel réel non nul x . Un réel non nul y aura pour coordonnée dans la base $\{x\}$ le nombre $\lambda = y/x$ car $y = y/x \times x$

• **Ex4:** $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 et une base est donnée par les quatre matrices $\{M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}\}$ avec $M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $M = aM_{11} + bM_{12} + cM_{21} + dM_{22}$

De façon plus générale, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels est de dimension $n \times p$; une base est donnée par l'ensemble des matrices élémentaires M_{ij} avec un seul 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et des 0 ailleurs.

- **Ex5:** $\mathbb{R}_n[x]$ est de dim $n + 1$; une base est formée des polynômes $1, x, x^2, \dots, x^n$ et tout polynôme s'écrit bien sûr de façon unique sous la forme $a_0 \times 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
- **Ex6:** \mathcal{F} n'a pas de base finie. On dit qu'il est de dimension infinie. De même, $C^2(\mathbb{R})$ est de dimension infinie. Par contre, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est un sev de dimension 2 de l'espace précédent. Une base est donnée par le couple de fonctions $\{\sin(\omega x), \cos(\omega x)\}$
- **Ex7:** \mathbb{C} est un \mathbb{R} -ev de dimension 2 et de base $\{1, i\}$, par exemple.

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Une famille de n vecteurs est une base de E si et seulement si elle est libre. Toute famille de plus de n vecteurs est liée.

On dit qu'une famille de vecteurs $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est génératrice d'un espace vectoriel si tout vecteur de cet espace s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille (cf. plus haut). Contrairement à la définition d'une base, on ne suppose plus que l'écriture est unique (on ne suppose pas, en outre, que la famille est libre). La proposition qui suit (admise) précise le lien entre famille libre et famille génératrice.

PROPRIÉTÉ 56

|| Une base de E est une famille à la fois libre et génératrice de E

Toute famille contenant le vecteur nul est liée. Si l'on ajoute un vecteur à une famille liée, on obtient encore une famille liée. Une base est une famille libre maximale pour la relation d'inclusion. C'est également une famille génératrice minimale pour la relation d'inclusion.

Considérons un espace E de dimension n . Alors toute famille libre a au plus n éléments et toute famille liée a au moins n éléments.

PROPRIÉTÉ 57

|| Soit F un sev de E
|| Si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$

16.1.3 Application linéaire

DÉFINITION 56

|| Soient E et F deux espaces vectoriels
|| Une application $u : E \longrightarrow F$ est linéaire si
|| $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u(x + y) = u(x) + u(y)$ et $u(\lambda x) = \lambda u(x)$

Une application linéaire est une application qui respecte les deux opérations $+$ et \times de l'ev. On peut dire aussi que $+$ et \times passent au travers » de l'application.

Exemples:

- **Ex1:** $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto u(x, y) = (x, 0)$
est linéaire; c'est la projection vectorielle sur l'axe (Ox)
- **Ex2:** $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto u(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$
est linéaire; c'est la rotation de centre O et d'angle θ

En effet, considérons l'image des vecteurs i et j par une rotation de centre O et angle θ . On a $u(i) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $u(j) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ de sorte qu'un vecteur $X(x, y) = xi + yj$ a pour image, par linéarité de u , $u(X) = xu(i) + yu(j)$ qui est donné par la formule ci-dessus.

- **Ex3:** $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto 2x$

est linéaire (et se représente d'ailleurs par une droite). Le terme application linéaire provient de cet exemple. Les lignes passant par 0 sont les seules applications linéaires de \mathbb{R} . Elles servent de support aux phénomènes de proportionnalité.

- **Ex4:** $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto u(x, y, z) = (kx, ky, kz)$
est linéaire; c'est l'homothétie de centre O et rapport k

- **Ex5:** $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto u(x, y, z) = (2x - y + z, x + y + z)$

est linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 . Ceci se démontre facilement en constatant que les coordonnées de l'image sont des combinaisons linéaires des coordonnées du vecteur initial.

• **Ex6:**
$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}_n[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x] \\ P &\longmapsto d(P) = P' \end{aligned}$$

qui à un polynôme associe sa dérivée, est linéaire.

• **Ex7:**
$$\begin{aligned} \tau : M_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{p,n}(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto \tau(M) = {}^t M \end{aligned}$$

qui à une matrice associe sa transposée, est linéaire;

• **Ex8:**
$$\begin{aligned} u : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = a + ib &\longmapsto (a, b) \end{aligned}$$

qui à un complexe associe son image dans le plan, est linéaire de l'ev \mathbb{C} vers l'ev \mathbb{R}^2 .

DÉFINITION 57

Si $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, on pose:

$\ker u = \{x \in E / u(x) = 0\}$ appelé noyau de u

$\text{Im } u = \{y \in F / \exists x \in E, y = u(x)\}$ appelé image de u

$\ker u$ et $\text{Im } u$ sont des sous espaces vectoriels respectivement de E et F

Le rang d'une application linéaire est $\boxed{\text{rg}(u) = \dim \text{Im}(u)}$

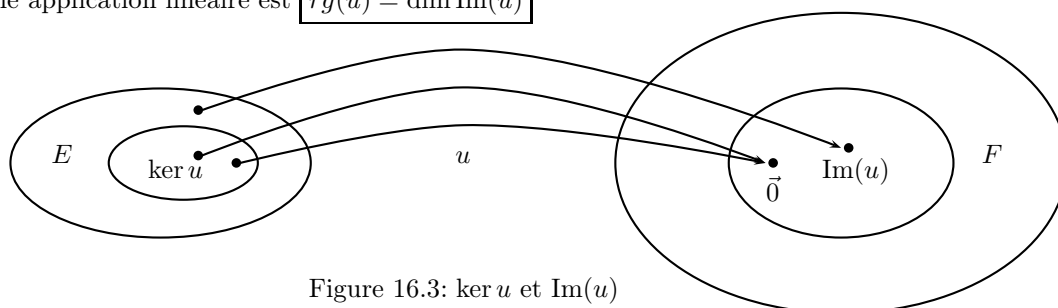


Figure 16.3: $\ker u$ et $\text{Im}(u)$

Exemples:

• **Ex1:** Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto u(x, y) = (x, 0)$

la projection sur l'axe (Ox)

$\ker u = \{(x, y) / x = 0\}$ est l'ensemble des vecteurs de direction (Oy)

$\text{Im } u = \{(x, y) / y = 0\}$ est l'ensemble des vecteurs de direction (Ox)

• **Ex2:** Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto u(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$

la rotation d'angle θ . $\ker u = \{\vec{0}\}$ et $\text{Im } u = \mathbb{R}^2$

• **Ex3:** $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto u(x, y, z) = (kx, ky, kz)$

$u(x, y, z) = 0 \iff x = y = z = 0$. $\ker u = \{\vec{0}\}$ et $\text{Im } u = \mathbb{R}^3$

• **Ex4:** Soit $d : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$
 $P \longmapsto d(P) = P'$

$d(P) = 0$ ssi $P' = k$, ie si P est une constante (un polynôme de degré 0). Ainsi, $\ker d = \mathbb{R}$ ensemble des polynômes de degré 0. De même, la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n - 1$ et n'importe quel polynôme de degré $n - 1$ est obtenu ainsi. On a donc $\text{Im } d = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

16.2 Matrice d'une application linéaire

16.2.1 Généralités

Soit E un ev de dimension p dont une base est $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$

Soit F un ev de dimension n dont une base est $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

$u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ sont des vecteurs de F et peuvent s'exprimer en fonction de e'_1, e'_2, \dots, e'_n .
Notons alors $(a_{ij})_{i=1, \dots, n}$ les coordonnées de $u(e_j)$ dans cette base:

$$y_j = u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i \text{ pour } j = 1, \dots, p$$

DÉFINITION 58

La matrice de u relativement aux bases \mathcal{E} et \mathcal{E}' est la matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p)$ exprimées dans la base \mathcal{E}' . C'est donc la matrice des images de la base de départ exprimées dans la base d'arrivée.

Considérons trois ev E, F, G munis de base respectives $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ et \mathcal{E}'' et considérons également trois applications linéaires u, v, w définies comme suit:

$u : E \longrightarrow F$ a pour matrice $A = (a_{i,j})$ relativement aux bases \mathcal{E} et \mathcal{E}'
 $v : E \longrightarrow F$ a pour matrice $A' = (a'_{i,j})$ relativement aux bases \mathcal{E} et \mathcal{E}'
 $w : F \longrightarrow G$ a pour matrice $B = (b_{i,j})$ relativement aux bases \mathcal{E}' et \mathcal{E}''

PROPRIÉTÉ 58

- $u + v$ a pour matrice $A + A'$
- λu a pour matrice λA , $\lambda \in \mathbb{R}$
- $w \circ u$ a pour matrice $B \times A$

DÉMO

De façon évidente, $(u + v)(e_j) = u(e_j) + v(e_j)$ et $(\lambda u)(e_j) = \lambda u(e_j) \forall j = 1, \dots, p$
 Ce qui démontre les deux premières assertions. Pour la troisième:

$$w \circ u(e_j) = w\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} e'_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w(e'_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^q a_{ij} b_{ik} e''_k$$

Ce qui correspond bien à la colonne j de la matrice $B \times A$
 \square

Exemples

• **Ex1:** Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto u(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

u est la rotation d'angle θ .

On a $u(i) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $u(j) = (-\sin \theta, \cos \theta) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

• **Ex2:** Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto u(x, y) = (x, 0)$$

u est la projection vectorielle sur (Ox).

On a $u(i) = i$ et $u(j) = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

• **Ex3:** Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto u(x, y) = (kx, ky)$$

u est l'homothétie de centre O et rapport k .

On a $u(i) = ki$ et $u(j) = kj \Rightarrow A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k \times \text{id}$

• **Ex4:**

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto u(x, y, z) = (2x + y + z, x - y + z, x + y - 2z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = AX$$

• **Ex5:** $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \longmapsto u(x, y, z) = (2x - y + z, x + y + z)$$

Le calcul de $u(i)$, $u(j)$ et $u(k)$ donne $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Fixons maintenant deux bases quelconques de E et F et examinons un cas particulier important de la propriété précédente.

PROPRIÉTÉ 59 (PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN VECTEUR)

Soit u une application linéaire de matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$
 Soit x un vecteur dont les coordonnées dans la base de E est donnée par la matrice $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$
 Alors $u(x)$ est un vecteur dont les coordonnées sont données par la matrice $AX \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

Notons $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . C'est un espace vectoriel pour les opérations $+$ et \times usuelles. C'est aussi un sous espace vectoriel des fonctions de E dans F .

Les résultats précédents montrent qu'à partir du moment où l'on a choisi des bases dans les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, se donner une application linéaire revient à se donner une matrice. A chaque application linéaire correspond donc une unique matrice. Dit autrement, ceci signifie que l'application

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto A \end{aligned}$$

qui à une application linéaire u associe sa matrice A relativement aux bases fixées, est bijective. C'est par ailleurs une application... linéaire entre l'espace des applications linéaires et l'espaces des matrices de taille $n \times p$.

application linéaire u	\longleftrightarrow	matrice A
vecteur x	\longleftrightarrow	matrice colonne X
image $u(x)$	\longleftrightarrow	matrice colonne AX
$u + v$	\longleftrightarrow	$A + A'$
λu	\longleftrightarrow	λA
$w \circ u$	\longleftrightarrow	BA
u^{-1} réciproque de u	\longleftrightarrow	A^{-1}

16.2.2 Sous espaces vectoriels et dimension

Une droite vectorielle est un ev de dimension 1. C'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur donné. Un plan vectoriel est un ev de dimension 2. C'est l'ensemble des vecteurs coplanaires à deux vecteurs donnés.

Exemples:

- **Ex1:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\ker A = \{0\}$ qui est un ev de dim 0
- **Ex2:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = xb$ avec $b(1, 1)$. C'est une droite vectorielle
- **Ex3:** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Posons $F = \{(x, y, z) / 2x + y - z = 0\} = \{(x, y, 2x + y)\}, x, y \in \mathbb{R}$
 F est un ev de dimension 2 dont une base est donnée par $a(1, 0, 2)$ et $b(0, 1, 1)$.
 Tout vecteur u de F s'écrit de façon unique $u = xa + yb$
 $\ker A = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) / x = y = z\}$ est une droite vectorielle

- **Ex4:** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Posons $F = \{(x, y, z) / 2x + y - z = 0\} = \{(x, y, 2x + y)\}, x, y \in \mathbb{R}$
 F est un ev de dimension 2 dont une base est donnée par $a(1, 0, 2)$ et $b(0, 1, 1)$.
 Tout vecteur u de F s'écrit de façon unique $u = xa + yb$
 $\ker A = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) / x = y = z\}$ est une droite vectorielle

Une droite se caractérise par une relation liant les 3 coordonnées, un plan par une relation liant 2 des 3 coordonnées. Une relation est une contrainte qui fait perdre un degré de liberté.

THÉORÈME 63 (THÉORÈME DU NOYAU IMAGE)

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors
 $\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im}(u)$

DÉMO

Admis

□

une application $u : E \longrightarrow F$ est :

injective ssi $\forall x, y \in E, u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$

surjective ssi $u(E) = F$

bijective ssi elle est à la fois injective et surjective

THÉORÈME 64

Soit u une application linéaire de E dans F
 u injective $\iff \ker u = \{0\}$
 u surjective $\iff \operatorname{rg}(u) = \dim F \iff \operatorname{Im} u = F$
 u bijective $\iff \dim E = \dim F$

DÉMO

$\ker u = \{0\} \Rightarrow \dim E = \dim \operatorname{Im}(u) \Rightarrow u(E) = F$ donc u est surjective

Par ailleurs, $u(x) = u(y) \Rightarrow u(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \ker(u) \Rightarrow x = y \Rightarrow u$ injective

La réciproque est évidente: u bijective $\Rightarrow u$ injective $\Rightarrow \ker(u) = \{0\}$

□

Si $\dim E = \dim F$ et u est linéaire, alors injective \iff surjective \iff bijective.

Une application linéaire bijective s'appelle un isomorphisme d'espace vectoriel. Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base par cette application est également une base.

la dimension d'un sous espace est inférieure ou égale à la dimension de l'espace ambiant:

$A \subset B$ et A sous espace vectoriel de $B \Rightarrow \dim A \leq \dim B$

16.2.3 Changement de base

Soit $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire dans un ev E de base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans \mathcal{E}

Soit $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ une autre base de E

THÉORÈME 65

La matrice B de u dans la base \mathcal{E}' est $B = P^{-1}AP$
 P est la matrice de passage de \mathcal{E} vers \mathcal{E}'
 Ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs e'_1, e'_2, \dots, e'_n exprimés dans la base \mathcal{E}

DÉMO

Admis

□

• **Ex1:** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et soient deux vecteurs $a(1, 1)$ et $b(1, -1)$

$\{a, b\}$ est une base de \mathbb{R}^2 de matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique $\{i, j\}$

La matrice de u dans cette nouvelle base est donc :

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• **Ex2:** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On pose $a(1, 1, 1)$, $b(1, 0, -1)$ et $c(0, 1, -1)$. Déterminer la matrice D de u dans la base $\{a, b, c\}$

Changement de coordonnées pour un vecteur

Soit $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n dont les coord sont donnés dans $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Soit $X'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ le même vecteur dont les coord sont exprimées dans $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$.

Soit $P = (p_{ij})$ la matrice de passage de la base \mathcal{E} vers la base \mathcal{E}' .

Alors on a $\boxed{X = PX'}$

DÉMO

On a, par définition, $x'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \quad \forall j = 1, \dots, n$ et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$

$$\sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_{ij} x'_j e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) e_i \Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \Rightarrow X = PX'$$

□

Ex: Soit $x(1, 0, 2)$ dans la base (i, j, k) de \mathbb{R}^3

Posons $e_1(1, 1, 0)$, $e_2(-1, 1, 0)$ et $e_3(1, 0, 1)$

Ces trois vecteurs forment une base de l'espace dont la matrice de passage vers $\{i, j, k\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ On a } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, x a pour coordonnées $(-1, 1, 4)$ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

16.3 Application à la mécanique du solide

A compléter.

Un mathématicien et un physicien assistent à une conférence sur la théorie des cordes en dimension 9.

Le physicien se tourne vers le mathématicien:

Je ne comprends rien, dit-il. Comment fais-tu pour visualiser des phénomènes en dimension 9 ?

Bien, c'est simple, tu le visualises en dimension n , et après tu poses n égal 9.

Qu'est-ce qu'un Kinder Surprise sans jouet dedans ?

C'est un Kinder lysitif, car son noyau est réduit à 0.

Chapitre 17

Systèmes linéaires - Résumé de cours

17.1 Aspect matriciel

Un système de n équations à p inconnues est la donnée de n équations à p inconnues !!!

Cela revient à résoudre une équation matricielle $AX = B$ avec $X(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $B \in \mathbb{R}^p$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Le système s'écrit aussi

$$\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dans toute la suite, nous nous intéresserons surtout à des systèmes ayant autant d'inconnues que d'équations, ie $A \in M_n(\mathbb{R})$

Nous avons vu que si $\det(A) \neq 0$, A est inversible et la solution du système est $X = A^{-1}B$

Si $\det(A) = 0$, A n'est pas inversible; il peut y avoir une infinité de solutions ou aucune.

Si $B = 0$, on dit que le système est homogène.

On dira que le système est compatible s'il admet au moins une solution.

17.2 Résolution

17.2.1 Système de Cramer

DÉFINITION 59

Un système est de Cramer s'il a autant d'inconnues que d'équations et si $\det(A) \neq 0$
En ce cas, il admet une unique solution $X = A^{-1}B$

THÉORÈME 66 (MÉTHODE DE CRAMER)

Soit $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la solution d'un système de Cramer.

Soit A_k la matrice obtenue à partir de A en remplaçant le k ème vecteur colonne par le vecteur B

Alors, $\forall k = 1, \dots, n$, $x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$

Ex: Soit $S \begin{cases} 2x + y - z = -6 \\ x - y + 2z = -2 \\ 2x + 5y + 3z = 2 \end{cases} \iff AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et}$

$$B = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -3, y = 1, z = 1$$

17.2.2 Remarques

Si le système est homogène (ie $B = 0$), alors $\forall k, A_k$ a une colonne nulle $\Rightarrow \det(A_k) = 0 \Rightarrow S = \{\vec{0}\}$
Ainsi, un système de Cramer homogène admet $\vec{0}$ comme unique solution.

Si l'on a déjà calculé A^{-1} , il suffit d'effectuer $A^{-1}B$

En règle générale, les "vieilles méthodes" (substitution, combinaison,...) sont plus rapides.

17.2.3 Systèmes pour lesquels $\det(A) = 0$

DÉFINITION 60

Le rang d'un système ou d'une matrice est la dimension de l'image de l'application linéaire associée
On note $\text{rg } A = \dim \text{Im } A$

Ex: Dans l'exemple ci dessus, $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ bijective $\Rightarrow \text{Im } A = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{rg } A = 3$

Un système est de Cramer si $\text{rg } A = n$

Lorsque $\text{rg } A < n$, le système peut avoir une infinité de solutions ou aucune. Lorsqu'il admet des solutions, celles ci forment un espace de dimension $r = n - \text{rg } A$.

Soit Δ_r un déterminant extrait de M d'ordre r . On dit que c'est un déterminant principal du système. Les équations correspondantes s'appellent équations principales et on peut montrer que la résolution du système est équivalente à la résolution des r équations principales en donnant des valeurs quelconques aux inconnues non principales.

Un tel système est compatible si et seulement si les $n - r$ relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix} = 0 \quad \forall k \in [r+1, n]$$

Chapitre 18

Diagonalisation

18.1 Introduction

Deux matrices carrées M et N sont semblables si elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes ou encore s'il existe P inversible telle que $N = P^{-1}MP$.

On cherche à caractériser ces matrices par des nombres permettant de dire si elles sont semblables ou non; ce sont les valeurs propres.

Lorsque plusieurs matrices sont semblables, on choisira la matrice ayant la forme la plus simple pour les calculs, par exemple la forme diagonale si celle ci existe.

Diagonaliser une matrice, c'est chercher une matrice diagonale qui lui est semblable

DÉFINITION 61

|| Une matrice M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale
|| $\iff \exists P$ inversible et $\exists D$ diagonale / $D = P^{-1}MP$

18.2 Valeurs et vecteurs propres

DÉFINITION 62

|| Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$
|| $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si $\exists X \in \mathbb{R}^n \neq 0 / AX = \lambda X$
|| X s'appelle alors un vecteur propre de A associé à λ

Si u est l'application linéaire que représente A dans la base canonique de \mathbb{R}^n , alors X est vecteur propre associé à λ si et seulement si $u(X) = \lambda X$. Un vecteur propre est donc un vecteur (non nul) colinéaire à son image et le coefficient de proportionnalité est la valeur propre correspondante.

L'ensemble des vp (valeurs propres) d'une matrice A s'appelle le spectre de la matrice. On note $\text{sp}(A)$. L'ensemble des VP (vecteurs propres) de A associé à une vp λ (auquel on adjoint le vecteur nul) s'appelle le sous espace propre E_λ . C'est un sev de \mathbb{R}^n :

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$$

On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $P(X) = \det(A - XI)$

0 est vp si et seulement si A n'est pas inversible.

On a le résultat important ci dessous:

THÉORÈME 67

|| Les valeurs propres de A sont les zéros du polynôme caractéristique

DÉMO

$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \exists X \neq 0 / AX = \lambda X \iff (A - \lambda I)X = 0 \iff X \in \ker(A - \lambda I) \iff \det(A - \lambda I) = 0$
 $\iff \lambda$ racine de P

□

La multiplicité $m(\lambda)$ d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que zéro de $P(X)$.

On a toujours $\dim E_\lambda \leq m(\lambda)$

Ex: Si $P(X) = (X - 2)^2(X + 1)$ alors 2 est vp de multiplicité 2 et -1 est vp de multiplicité 1 (on dit aussi vp simple)

Exemples

- **En dim 2:** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. $P(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ 2 & -2-X \end{vmatrix} = (X-2)(X+1)$

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) = \{2, -1\}$$

$$E_2 = \ker(A - 2I) = \{X \in \mathbb{R}^2 / AX = 2X\} = \left\{ X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x = 2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim E_2 = 1 \text{ et une base est donnée par le vecteur } v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \ker(A + I) = \{X \in \mathbb{R}^2 / AX = -X\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{-1} \text{ est de dimension 1 et une base est donnée par le vecteur } v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **En dim 3:** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $P(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(1+X^2)$

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) = \{1\}$$

Le spectre dépend du corps \mathbb{K} dans lequel on travaille. Nous pouvons choisir \mathbb{C} auquel cas les valeurs propres sont 1, i , $-i$ où bien \mathbb{R} (ce que nous ferons presque toujours par la suite) auquel cas on a le résultat ci-dessus.

$$E_1 = \ker(A - I) = \{X \in \mathbb{R}^3 / AX = X\} = \left\{ X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x = y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim E_1 = 1 \text{ et une base est donnée par le vecteur } k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **En dim 3:** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De façon évidente $P(X) = -X(3-X)^2$. 3 est donc vp de multiplicité 2 et 0 vp simple. La matrice étant déjà diagonale, on en déduit que E_3 est de dimension 2 avec comme base $\{i, j\}$ et $E_0 = \ker A$ est de dimension 1 avec comme base le vecteur k .

REMARQUE 16

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$ Les 2 sous espaces associés à 2 vp distinctes ont 0 comme seul élément commun.

• On peut décrire de deux façons les valeurs propres: soit distinctes, soit comptées avec multiplicité. En ce cas, une valeur propre apparaît autant de fois que sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

• Dans un espace de dimension n , le nombre de valeurs propres d'une matrice peut varier de 0 à n . Si le corps est algébriquement clos, il existe exactement n valeurs propres, lorsque celles-ci sont comptées avec multiplicité.

• Si x_1, x_2, \dots, x_k sont des VP associés à des vp $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 2 à 2 distinctes, alors ils sont linéairement indépendants.

• Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des vp de A comptées avec multiplicité, alors:

$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \\ \text{Det}(A) &= \lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_k \end{aligned}$
--

On rappelle que $\text{Tr}(A)$ est la trace de la matrice A et que cette trace, invariante par changement de base, est toujours égale à la somme des termes diagonaux de la matrice. Par contre, le déterminant de A n'est égal au produit des termes diagonaux que si la matrice est diagonale ou triangulaire.

18.3 Diagonalisation

DÉFINITION 63

Une matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale
 \iff il existe une base dans laquelle l'application linéaire u associée à A a une matrice diagonale

THÉORÈME 68 (IMPORTANT)

Soit $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire de vp $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 2 à 2 distinctes
 Soit A la matrice de u dans la base canonique de \mathbb{R}^n
 A diagonalisable $\iff \exists$ une base de \mathbb{R}^n formée de VP de $A \iff \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i} = n$
 $\iff \dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i) \forall i = 1, \dots, k$ et le polynôme caractéristique de A est scindé.

On rappelle qu'un polynôme est scindé dans un corps \mathbb{K} si et seulement si on peut l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré. Autrement dit, toutes ses racines appartiennent à ce corps.

DÉMO

• (1) \Rightarrow (2)

Si u est diagonalisable, alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Les vecteurs de cette base sont alors des vecteurs propres car $u(e_i) = \lambda_i e_i$

• (2) \Rightarrow (3)

S'il existe une base formée de vecteurs propres, alors dans cette base la matrice de u est diagonale.

Soit $\lambda \in Sp(u)$ et $m(u, \lambda)$ le nombre de fois que λ apparaît sur la diagonale.

Les vecteurs colonnes correspondants sont libres et appartiennent au sous espace propre associé à λ .

Ainsi, $\dim E_\lambda \geq m$. Par ailleurs on a toujours $\dim E_\lambda \leq m$ et donc $\dim E_\lambda = m \Rightarrow \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i} = n$

• (3) \iff (4)

Est évident.

• (3) \Rightarrow (1)

Choisissons une base de chacun des sous espaces propres de u .

Puisque les vecteurs choisis dans des sous espaces propres distincts sont linéairement indépendants, nous obtenons une famille de n vecteurs libres dans un espace vectoriel de dimension n . Il s'agit donc d'une base de E et cette base est formée de vecteurs propres de u , qui est donc diagonalisable.

□

Exemples:

• $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Sp(A) = \{2, -1\}$ et l'on a $E_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\dim E_2 + \dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^2$ donc A est diagonalisable et une base de VP est $\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

La matrice de passage à cette base est $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et la forme diagonale est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Forme que l'on peut retrouver en calculant $P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Il est inutile d'effectuer le calcul: Si u est l'application linéaire associée à A , $u(\alpha) = 2\alpha$ et $u(\beta) = -\beta$ par définition des vecteurs propres. Ainsi, la matrice de u dans cette base est forcément diagonale puisque les colonnes sont les coordonnées des images par u de α et β . On vérifie par ailleurs que $Tr(A) = Tr(D) = 1$.

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Sp(A) = \{1\}$ et $\dim E_1 = 1 < 3 \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ est déjà sous forme diagonale: $Sp(A) = \{1, 2\}$

E_1 a pour base i et E_2 a pour base (j, k) . Une matrice diagonalisable peut avoir moins de n vp distinctes.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $P(X) = -X^3 \Rightarrow 0$ est vp triple et $E_0 = \ker A$ est de $\dim 1 < 3 \Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable

\Rightarrow une matrice nilpotente n'est jamais diagonalisable (sauf 0).

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est $P(X) = (X+1)^2(2-X)$. -1 étant valeur propre simple, le sous-espace propre associé est de dimension 1. Ainsi, la matrice est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à 2 est de dimension 2.

En déterminant $E_2 = \ker(A - 2I)$, on trouve un espace de dimension 2 dont une base est $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

REMARQUE 17

- Si λ est une vp de multiplicité k , alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq k$
- A est diagonalisable dans les cas suivants:
 - Si A a n vp distinctes. Ce sont alors des vp simples.
 - Si A est symétrique
 - Si, ayant choisi une base dans chaque sous-espace propre, la réunion de toutes ces bases est une base de \mathbb{R}^n
- Le sous-espace propre associé à une vp simple est toujours de dimension 1
- $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont des sev de \mathbb{R}^n . Si leur réunion (somme) forme \mathbb{R}^n , alors la matrice est diagonalisable
- Lorsqu'une matrice n'est pas diagonalisable, on peut la triangulariser (on dit aussi trigonaliser) à condition que le polynôme caractéristique soit scindé dans \mathbb{R} (c'est à dire toutes les racines de ce polynôme appartiennent au corps de base). Ceci est toujours le cas lorsque l'on travaille par exemple dans \mathbb{C} .

18.4 Applications

18.4.1 Calcul de puissance

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le calcul de A^k est long et coûteux en opérations.

Si A est diagonalisable, on sait que $\exists P$ inversible et $\exists D$ diagonale / $D = P^{-1}AP$
 $\iff A = PDP^{-1} \iff A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

D étant diagonale, D^n se calcule facilement.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+2} - (-1)^n & -2^{n+1} + 2 \times (-1)^n \\ 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n & -2^n + 4 \times (-1)^n \end{pmatrix}$

18.4.2 Systèmes différentiels

On souhaite résoudre $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$ où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions de classe C^1 /

$$x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 3$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

On voit alors que le système est $\iff X' = AX$

A est symétrique et est donc diagonalisable (nous l'avons étudié précédemment). On a

$$P(X) = (X+1)^2(X-2) \Rightarrow \text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$$

E_2 est de dim 1 engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et E_{-1} est de dim 2 engendré par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans cette base, u a pour matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $Y = P^{-1}X$ les coord de X dans la nouvelle base et $Y' = P^{-1}X' \Rightarrow X = PY$ et $X' = PY'$

Ainsi, $X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY$

Notons $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ les coord de $Y \Rightarrow \begin{cases} u' = 2u \\ v' = -v \\ w' = -w \end{cases}$

Chacune des 3 équations est linéaire d'ordre 1 et s'intègre facilement:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{2t} \\ k_2 e^{-t} \\ k_3 e^{-t} \end{pmatrix} \text{ et donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v - w \\ u + v \\ u + w \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = k_1 e^{2t} - k_2 e^{-t} - k_3 e^{-t} \\ y = k_1 e^{2t} + k_2 e^{-t} \\ z = k_1 e^{2t} + k_3 e^{-t} \end{cases}$$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

Il y a donc une infinité de solutions dépendant de trois paramètres.

Parmi ces solutions, il en existe une unique qui vérifie les conditions initiales. Calculons les valeurs de k_1, k_2, k_3 correspondantes:

$$\begin{cases} k_1 = k_2 + k_3 \\ k_1 = -k_2 \\ k_1 + k_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{la solution est } \begin{cases} x = e^{2t} - e^{-t} \\ y = e^{2t} - e^{-t} \\ z = e^{2t} + 2e^{-t} \end{cases}$$

Chapitre 19

Suites numériques

19.1 Définitions, propriétés

19.1.1 Rappels

DÉFINITION 64

Une suite numérique est une fonction $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $n \longmapsto u(n) = u_n$
 u_n est appelé terme général de la suite et la suite se note $(u_n)_{n \geq 0}$

Une suite est donc une séquence discrète de termes

Ex: $u_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, \text{ etc.}$

Ex: $u_n = e^{-n}, n \geq 0 \Rightarrow u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{e}, \text{ etc.}$

Ex: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ est la suite s'appelle suite de Fibonacci
Elle est définie non pas par une formule explicite de n mais par une relation de récurrence qui lie un terme à un ou plusieurs termes précédents.

Une suite peut être indexée sur \mathbb{Z} (ex: $u_n = e^{-n}, n \in \mathbb{Z}, u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{e}, u_{-1} = e, \dots$)

DÉFINITION 65

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est:

- croissante si $u_{n+1} \geq u_n \forall n \geq n_0$
- décroissante si $u_{n+1} \leq u_n \forall n \geq n_0$
- monotone si elle est croissante ou décroissante
- constante si $u_{n+1} = u_n \forall n \geq 0$
- stationnaire si $u_{n+1} = u_n \forall n \geq n_0$
- majorée si $\exists M / u_n \leq M \forall n \geq 0$
- minorée si $\exists m / u_n \geq m \forall n \geq 0$
- bornée si $\exists K > 0 / |u_n| \leq K \forall n \geq 0$

Une suite n'est ni plus ni moins qu'une fonction.

Soit Φ une fonction bijective croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N}

On dit que $(u_{\Phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

Ex: $u_n = \frac{1}{n}$

Si $\Phi(n) = 2n$ alors $u_{\Phi(n)} = \frac{1}{2n}$ est la suite des termes pairs

Si $\Phi(n) = 2n + 1$ alors $u_{\Phi(n)} = \frac{1}{2n + 1}$ est la suite des termes impairs

DÉFINITION 66

Deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes si

- l'une est croissante et l'autre est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

Ex: $u_n = \frac{n}{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes

19.1.2 Propriétés

PROPRIÉTÉ 60

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite telle $u_n = f(n) \forall n \in \mathbb{N}$

- Si f est croissante $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante
- Si f est décroissante $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante
- Si f est bornée alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée

Les réciproques de ces propriétés sont fausses

Ex: $f(x) = e^{-x}$ est décroissante donc $u_n = e^{-n}$ est décroissante

Cette même fonction est bornée (majorée par 1 et minorée par 0) dont $(u_n)_{n \geq 0}$ aussi

PROPRIÉTÉ 61

$(u_n)_{n \geq 0}$ croissante $\iff u_{n+1} - u_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$
 Et si $\boxed{u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}}$ $(u_n)_{n \geq 0}$ croissante $\iff \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$

Ex: La suite de Fibonacci est croissante car par récurrence, on $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Ex: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ n'est ni croissante ni décroissante (considérer $u_{n+1} - u_n$ pour n pair et n impair)

Cependant, si l'on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ce rapport est de signe constant (d'où l'importance de l'hypothèse $u_n > 0$)

19.2 Convergence et limite

19.2.1 Définition

DÉFINITION 67

On dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 / \forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$

REMARQUE 18

On dit alors que la suite converge vers l

On généralise de la même façon à une limite égale à $\pm\infty$ (cf. leçon sur les limites)

Une suite qui ne converge pas diverge et lorsqu'elle existe la limite est unique

Les propriétés et techniques de calculs sur les suites sont les mêmes que sur les fonctions.

Nous ne les rappellerons pas (se reporter à la leçon sur les limites)

19.3 Suites récurrentes

19.3.1 Suites arithmético géométriques

DÉFINITION 68

$(u_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison $r \iff u_{n+1} - u_n = r \quad \forall n \geq 0 \iff u_n = u_0 + nr \quad \forall n \geq 0$

DÉFINITION 69

$(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $q \iff u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq 0 \iff u_n = u_0 q^n \quad \forall n \geq 0$

Ex: $u_n = 3n + 2$ est arithmétique de raison 3

Ex: $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison -1

Ces suites sont caractérisées par un terme et la raison

Sommes de termes: On rappelle les formules suivantes

PROPRIÉTÉ 62

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet \text{ Soit } (u_n)_{n \geq 0} \text{ une suite arithmétique de raison } r \text{ Alors} \\ S_{k,n} = u_k + \dots + u_n = (n - k + 1) \frac{u_k + u_n}{2} \\ \bullet \text{ Soit } (u_n)_{n \geq 0} \text{ une suite géométrique de raison } q \text{ Alors} \\ S_{k,n} = u_k + \dots + u_n = u_k \frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q} \end{array} \right.$$

Cas particulier:

Si l'on note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

Dans le cas d'une suite arithmétique, $S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$

Dans le cas d'une suite géométrique, $S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

19.3.2 Suites homographiques

Ce sont les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ avec $ad - bc \neq 0$

La méthode de résolution est la suivante (elle n'est qu'esquissée)

On construit l'équation aux points fixes: $f(x) = x \iff x^2 + (d-a)x - b = 0$

On a alors deux cas de figures:

- Si cette équation a deux solutions distinctes (réelles ou complexes) α et β

Alors on pose $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$

On peut démontrer que cette suite est arithmétique et donc exprimer v_n en fonction de n

A partir de là, en inversant la relation ci dessus, on peut exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n

- Si cette équation a une solution double α

Alors on pose $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$

On peut montrer que cette suite est arithmétique et conclure comme ci dessus.

19.3.3 Récurrence générale du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans le cas où f n'est pas une homographie mais une fonction continue d'un intervalle I dans $f(I) \subset I$ (on dit alors que I est stable par f)

Lorsque la suite converge, ce ne peut être que vers un point fixe de f ie une solution de $f(\alpha) = \alpha$

- Si f est croissante:

Il y a la encore deux cas de figures:

- Si $f(x) \leq x$, alors la suite est décroissante. Si elle est minorée, elle converge vers un point fixe.
- Si $f(x) \geq x$, alors la suite est croissante. Si elle est majorée, elle converge vers un point fixe.

- Si f est décroissante:

Alors en ce cas $f \circ f$ est croissante:

On étudie les suites des termes pairs et des termes impairs.

L'une est croissante et l'autre est décroissante.

Si elles sont adjacentes alors la suite initiale converge vers un point fixe, sinon elle diverge.

Un cas particulier intéressant est celui où la fonction f est contractante:

$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ avec $k \in]0, 1[$

ceci qui se produit si la fonction est dérivable et vérifie $|f'(x)| \leq k$ avec $k < 1$ sur I

En ce cas, le théorème des accroissements finis assure la convergence de la suite:

Si f est dérivable sur un intervalle I fermé, borné et stable par f
 Si f est contractante sur I
 Alors $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers l'unique point fixe de f sur I

Ex: $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ u_0 fixé

$f :]-1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique point fixe de f sur $[-1, \alpha]$ qui est un intervalle stable par f

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f$ est contractante sur l'intervalle ci dessus

D'après le théorème précédent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

On a de même $]\alpha, +\infty[$ stable par f et on a donc la même conclusion sur tout intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$ avec $\beta > \alpha$

19.3.4 Récurrences linéaires doubles

Ce sont les suites de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, u_0, u_1 fixés

La résolution de ce problème est analogue à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

On construit l'équation caractéristique qui est $r^2 = ar + b$

Il s'agit d'une équation du second degré. Trois cas se présentent:

- Si $\Delta > 0$

Soient r_1 et r_2 les deux solutions

Alors la solution générale est de la forme $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Si $\Delta = 0$

Soit r la solution double

Alors la solution générale est de la forme $u_n = (\alpha n + \beta)r^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Si $\Delta < 0$

Soit $\rho e^{i\theta}$ les deux solutions complexes conjuguées

Alors la solution générale est de la forme $u_n = \rho^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ex: $6u_n - 5u_{n-1} + u_{n-2} = 0$

L'équation caractéristique est $6r^2 - 5r + 1 = 0$

On a deux solutions $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2} \Rightarrow u_n = \frac{\alpha}{3^n} + \frac{\beta}{2^n}$, $\forall n \geq 0$

Chapitre 20

Notions sur les séries entières et transformées en z

20.1 Rayon de convergence d'une série entière

20.1.1 Définition

DÉFINITION 70

Une série entière est une série dont le terme général est de la forme $a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$
On note $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

Une série entière (on notera SE par la suite) est donc une série dont le terme général est un monôme. On peut la voir comme un polynôme ayant une infinité de coefficients (cf. analogie avec les développements limités).

Comme toute série numérique, se pose le problème de la convergence.

Ex: $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$

En effet, $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ si $z \neq 1$. La limite existe si et seulement si $|z| < 1$ auquel cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$

Ex: $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$

En effet, fixons z et posons $u_n = \frac{z^n}{n!}$. Appliquons le critère de D'Alembert à la série numérique de terme général u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z}{n+1} \rightarrow 0 < 1$ quand $n \rightarrow +\infty$.

D'après le critère, la série converge $\forall z \in \mathbb{C}$.

PROPRIÉTÉ 64 (LEMME D'ABEL)

Soit z_0 un complexe tel que la suite de terme général $a_n z_0^n$ est bornée.
Alors la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge $\forall z \in \mathbb{C} / |z| \leq |z_0|$

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ converge si $z_0 = 1$ (série alternée) \Rightarrow la série entière converge $\forall z / |z| \leq 1$

Interprétation géométrique: Si la série converge en un point z_0 du plan complexe, alors elle converge en tout point strictement inclus dans le disque de centre 0 et de rayon $|z_0|$. De même, si elle diverge en un point z_0 , elle diverge en tout point de module supérieur à $|z_0|$.

Dans toute la suite, CV indiquera « converge » et DV indiquera « diverge ».

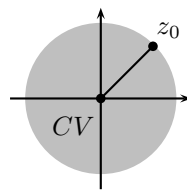


Figure 20.1: $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge

DÉFINITION 71

Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est le plus grand réel $R > 0$ tel que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge $\forall z / |z| < R$.

- Si $|z| < R$ la série converge (on est alors dans le disque de convergence)
- Si $|z| > R$ la série diverge
- Si $|z| = R$ on ne peut rien conclure (on est alors sur le cercle de convergence)

Si $R = 0$, la série entière ne converge que si $z = 0$.

Si $R = +\infty$, la série entière converge $\forall z \in \mathbb{C}$.

La région de convergence d'une série entière est toujours un disque de centre O et de rayon R . A l'intérieur de ce disque, la série converge, à l'extérieur du disque, elle diverge et sur le bord du disque, il existe des points où la série converge et des points où la série diverge.

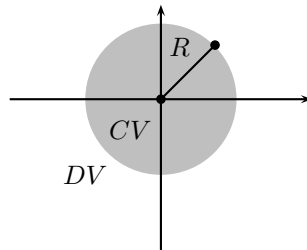


Figure 20.2: Disque de convergence

Ex: $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $z = 1 \Rightarrow R = 1$

Ex: $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow R = +\infty$

Le calcul pratique du rayon de convergence se fait grâce à la formule de Hadamard:

PROPRIÉTÉ 65 (FORMULE DE HADAMARD)

$$\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

On a aussi, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, $\boxed{R = \frac{1}{L}}$ avec pour convention $\frac{1}{0} = +\infty$

On remarquera l'analogie avec les critères de Cauchy et de D'Alembert pour les séries numériques.

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. On a $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \Rightarrow R = 1$

Cex: $\sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n}}{n}$. On a $a_n = \frac{1}{n}$ si n est pair et 0 sinon. Un coefficient sur deux est nul et par conséquent,

on ne peut pas appliquer la formule ci-dessus. Dans ce cas, pour déterminer le rayon de convergence, il est nécessaire de revenir à la définition. Si $|z| < 1$, il est clair que la série converge. De même, si $|z| > 1$, elle diverge. Le rayon de convergence vaut donc $R = 1$

20.2 Fonction définie par une série entière

20.2.1 Propriétés de la somme

On se limite ici aux séries entières réelles ($a_n \in \mathbb{R}$) et nous prendrons donc x comme variable au lieu de z . Néanmoins, les théorèmes restent valables dans \mathbb{C} .

DÉFINITION 72

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle dont le rayon de convergence est $R > 0$
 Alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction définie sur $] -R, R[$ et de classe C^∞ sur cet intervalle

Ex: $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1, 1[$. Il s'agit de la somme d'une série géométrique de raison x .

Ex: Nous savons déjà que $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

THÉORÈME 69

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$
 • f est dérivable et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in]-R, R[$
 • f est intégrable et $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x \in]-R, R[$

C'est à dire que l'on peut dériver et intégrer terme à terme une série entière dans tout intervalle fermé inclus dans le disque de convergence (ce qui n'est pas possible, **en général**, pour un autre type de série car on ne peut permuter une somme infinie avec une intégrale ou une limite).

La série entière obtenue a même rayon de convergence que la série initiale.

On peut généraliser à $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$

Ex: $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ valable si et seulement si $|x| < 1$.

$\forall x / |x| < 1, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \dots, f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} C_n^p x^{n-p}$

De même, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Ex: $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$

Les opérations d'intégration et de dérivation sont particulièrement utiles sur le bord du disque de convergence, où l'on ne peut pas appliquer le théorème précédent. Par contre, on a le:

THÉORÈME 70 (THÉORÈME D'ABEL)

Si x_0 est sur le cercle de convergence et si $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ converge, alors $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Ex: $\ln(1-x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ avec $R=1$. $x_0 = -1$ est sur le cercle et la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(1-x) = -\ln 2$

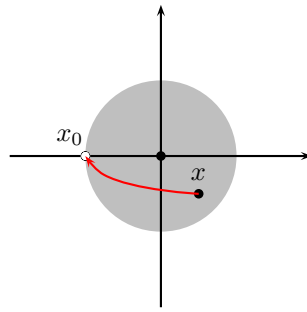


Figure 20.3: Théorème d'Abel

20.2.2 Fonction développable en série entière

DÉFINITION 73

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 et f une fonction définie sur I

On dit que f est développable en série entière autour de 0

s'il existe une série de rayon de convergence R non nul dont f est la somme, ie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \forall x \in]-R, R[$$

Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ admette un ∂ SE est que:

$$\boxed{\exists A > 0 / \forall x \in]-R, R[, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| < A}$$

Nous n'irons pas plus loin sur ces questions théoriques.

L'analogie avec les développements limités va nous simplifier la tâche: la formule de Taylor donne les développements des séries usuelles (cf tableau des ∂ SE usuels) et les formules sont donc les mêmes.

Ex:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ dont le rayon de convergence est } R = 1.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ dont le rayon de convergence est } R = +\infty.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ dont le rayon de convergence est } R = +\infty.$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} \text{ dont le rayon de convergence est } R = 1.$$

20.3 Opérations sur les séries entières

Soient $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries de rayon de convergence respectifs R et R'

Ces deux séries convergent lorsqu'on se place sur l'intersection des disques de convergence. On peut alors parler de somme, produit, composition et même quotient de séries entières. A chaque fois, il faut faire attention à étudier le rayon de convergence.

• La série somme est la série $(A+B)(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ dont le rayon de convergence est

$$\geq \inf(R, R')$$

Lorsque $R \neq R'$, alors le rayon de la somme vaut exactement $\inf(R, R')$

Ex: $\sum_{n \geq 0} z^n$ a un rayon de convergence de 1 et $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^n}$ a un rayon de convergence de 2. La somme de ces

deux séries entières est la série $\sum_{n \geq 0} (1 + \frac{1}{2^n}) z^n$ dont le rayon de convergence est 1.

Ex: Considérons une série entière de rayon de convergence R et la série opposée (qui a pour rayon de convergence R également). La somme de ces deux séries est nulle et son rayon de convergence est donc $+\infty$.

- La série produit est la série entière définie par $A \times B(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n = (\sum_{n \geq 0} a_n z^n) \times (\sum_{n \geq 0} b_n z^n)$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Cette opération s'appelle produit de Cauchy des deux séries. Le rayon de convergence du produit est $\geq \inf(R, R')$. Lorsque $R \neq R'$, le rayon de convergence de la série produit est exactement $\geq \inf(R, R')$.

Ex: $\sum_{n \geq 0} z^n \times \sum_{n \geq 0} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$

Les rayons de convergence de ces trois séries sont égaux à 1.

Ex: Soient $e^{\alpha x} = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n x^n}{n!}$ et $e^{\beta x} = \sum_{n \geq 0} \frac{\beta^n x^n}{n!}$. Calculons $e^{\alpha x} e^{\beta x}$

$$e^{\alpha x} e^{\beta x} = (\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n x^n}{n!}) (\sum_{n \geq 0} \frac{\beta^n x^n}{n!}) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n \text{ avec } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^k \beta^{n-k} = \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!}$$

$\Rightarrow e^{\alpha x} e^{\beta x} = e^{(\alpha + \beta)x}$. On s'en doutait....

- Supposons maintenant que $a_0 = 0$. On peut alors définir la série entière $B \circ A(z) = B(A(z))$ en remplaçant dans $B(z)$ la variable z par $A(z)$. L'expression obtenue est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est non nul. Nous n'essayerons de calculer les coefficients de $B \circ A$ que sur des cas très simples.

20.4 Transformées en z

20.4.1 Définition

DÉFINITION 74

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique. La transformée en z de cette suite est la fonction $F(z)$ donnée par:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{z^n}$$

Il s'agit de l'analogue de la transformée de Laplace mais appliquée à des signaux discrets (inventée en 1947 par Hurewicz); le signal discret est représenté par la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Par ailleurs, si l'on remplace z par $1/z$ dans la définition, on obtient:

$$F(1/z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \text{ qui est la somme d'une série entière.}$$

On peut donc voir une transformée en z comme une série entière en la variable $1/z$.

F étant définie comme somme d'une série, se pose le problème de la convergence: En utilisant la remarque précédente, notons R le rayon de convergence de $F(1/z)$. La série entière converge pour les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ telles que $|z| < R$, de sorte que la transformée en z va converger si et seulement si $|1/z| < R \iff |z| > R$.

Le domaine de convergence d'une transformée en z sera toujours l'extérieur d'un disque de centre O et rayon R (en anglais on dit ROC pour region of convergence).

Commençons par donner quelques exemples de transformées:

Ex: $u_n = 1$ si $n = 0$ et $u_n = 0$ si $n \geq 1$

Il s'agit de l'analogue discret de la masse de Dirac en 0; nous noterons souvent cette suite

$$\delta_0 = (\delta_0(n))_{n \geq 0} = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

En appliquant la définition, on voit facilement que $F(z) = 1$ et cette fonction constante est définie sur \mathbb{C} tout entier.

Ex: $u_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$

Cette suite représente l'analogue de la fonction de Heaviside dans le cas discret.

On la notera souvent $h = (h_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 1, 1, \dots)$

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^n} = \frac{z}{z-1} \text{ qui est définie si } |z| > 1.$$

Ex: $u_n = e^{-\alpha n}$ avec $\alpha > 0$

$$\Rightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha}}{z} \right)^n = \frac{z}{z - e^{-\alpha}} \text{ qui n'existe que si } |z| > e^{-\alpha}$$

Le domaine de convergence est l'extérieur du disque centré en O et de rayon $e^{-\alpha}$.

Ex: $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{C}$

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{a}{z} \right)^n = \frac{z}{z - a}$$

Le domaine de convergence est l'extérieur du disque de centre O et rayon $|a|$.

On peut être amené à définir une transformée en z bilatérale pour les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dont les indices peuvent être négatifs. On pose alors

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{u_n}{z^n}$$

Nous avons déjà rencontré cette situation avec les séries de Fourier: Tandis que les coefficients de Fourier réels a_n et b_n ne sont définis que pour des valeurs de $n \geq 0$, les coefficients de Fourier complexes c_n sont définis pour $n \in \mathbb{Z}$ et prennent des indices positifs et négatifs.

$$\text{La transformée en } z \text{ bilatère peut s'écrire } F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{-n}$$

Le premier terme est la somme d'une série entière et le second est une transformée en z unilatère. De telles séries s'appellent aussi séries de Laurent. Se pose encore le problème de la convergence: La partie série entière converge dans un disque de rayon R_1 tandis que la partie transformée en z converge à l'extérieur d'un disque de rayon R_2 . Au final, une transformée en z bilatère va converger dans une couronne circulaire de rayon compris entre R_2 et R_1 . Sauf mention contraire, nous traiterons essentiellement des transformées en z unilatères et l'on pourra donc considérer que toutes les suites vérifient $u_n = 0$ lorsque n est négatif. Comme pour les transformées de Laplace, si une suite ne vérifie pas cette propriété, il suffira de la multiplier par le signal de Heaviside ($h_n = 1$ si $n \geq 0$ et $h_n = 0$ sinon) pour se ramener à un signal discret unilatère. On utilisera également le terme **causal** analogue à celui des transformées de Laplace.

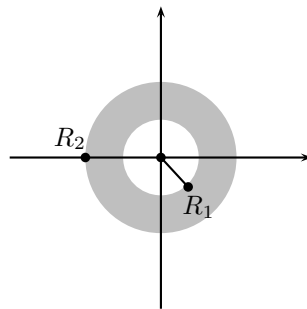


Figure 20.4: Couronne de convergence d'une transfo en z bilatère.

20.4.2 Echantillonnage et transformée en z

Examinons maintenant le rapport entre la transformée en z d'un signal, la transformée de Laplace et le développement en série de Fourier d'une fonction:

Partons d'un signal analogique $u(t)$. Mathématiquement, c'est une fonction qui dépend continument de la variable t représentant le temps. Lorsque t varie de façon continue dans \mathbb{R} , $u(t)$ prend une infinité de

valeurs. Échantillonner ce signal, c'est prélever à intervalle régulier de période T les valeurs de $u(t)$. On dit également que l'on a discrétisé le signal. La fréquence d'échantillonnage est la quantité $F = 1/T$ et l'échantillon obtenu à partir de $u(t)$ est une suite numérique dont les termes sont:

$$u(0), u(T), u(2T), \dots, u(nT), \dots$$

Si l'on effectue un changement d'échelle afin de choisir $T = 1$, on obtient comme signal échantillonné la suite u_0, u_1, \dots, u_n , etc.

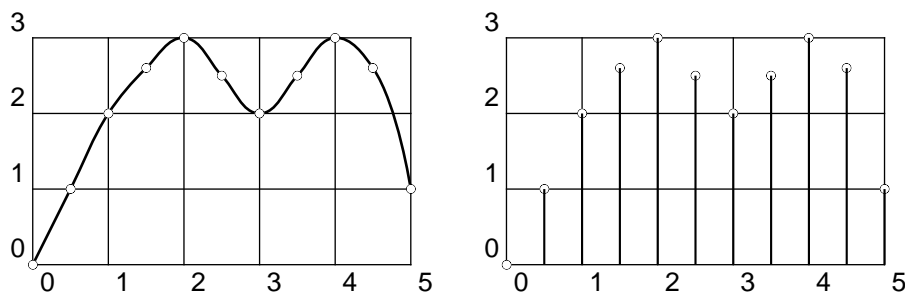


Figure 20.5: Signal analogique et échantillonné

La fonction d'échantillonnage associée à une fonction continue $u(t)$ est une suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$. Mathématiquement, l'opération d'échantillonnage s'effectue à l'aide du peigne de Dirac que nous avons déjà défini dans le chapitre sur la théorie du signal. Nous rappelons que le peigne de Dirac est une

distribution définie comme somme infinie de masses de Dirac régulièrement espacées: $\sqcup = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$

$$u(t) \times \sqcup(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t) \delta_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) \delta_n(t)$$

puisque $\delta_n(t) = 0$ si $t \neq n$. La fonction ci-dessus représente donc le signal échantillonné (le calcul effectué ci-dessus n'est valable que dans l'espace des distributions).

Supposons maintenant que $u(t)$ soit un signal causal et admette une transformée de Laplace

$$U(p) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt. \text{ La transformée de Laplace du signal ci-dessus est:}$$

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \delta_n(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \int_0^{+\infty} \delta_n(t) e^{-pt} dt$$

D'après les propriétés de la masse de Dirac, cette intégrale vaut e^{-np} . Ainsi, en posant $z = e^p$, la transformée de Laplace du signal échantillonné est $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n z^{-n}$.

On retrouve bien l'expression de la transformée en z de $u(t)$.

Il faut bien faire attention que le calcul précédent se fait "au sens des distributions" et n'est pas très rigoureux; en particulier, nous avons (encore) permuté une intégrale avec une somme infinie. Néanmoins, cela permet de comprendre le lien entre la transformée de Laplace et la transformée en z .

Posons maintenant $z = re^{i\theta}$ dans l'expression de la transformée en z :

$$F(z) = F(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n r^n e^{-in\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{u_n}{r^n} \right) e^{-in\theta}$$

Fixons r ; la fonction $\theta \rightarrow F(re^{i\theta})$ est périodique de période 2π et intégrable dans le domaine de convergence; elle est donc développable en série de Fourier. D'après ce qui précède, ses coefficients de Fourier complexes $c_n(F)$ sont donc donnés par $c_{-n}(F) = u_n r^{-n}$ ou encore $c_n(F) = u_{-n} r^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Si l'on pose enfin $r = 1$, on retrouve exactement l'expression d'une série de Fourier dont les coefficients sont les u_n . Ainsi, le développement en série de Fourier est un cas particulier de transformée en z : il s'agit de la transformée en z évaluée sur le cercle unité du plan complexe. Par ailleurs, une transformée en z peut exister alors que la série de Fourier diverge.

Supposons maintenant que le nombre d'échantillons soit fini (par exemple si la suite est nulle avant $n = 0$ et à partir d'un rang N) et posons $z = e^{2\pi i/N}$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^N u_n z^{-n} = \sum_{n=0}^N u_n e^{-2n\pi i/N}$$

On retrouve alors l'expression de la transformée rapide de Fourier (FFT) d'un vecteur (u_0, u_1, \dots, u_n)

20.4.3 Propriétés usuelles

PROPRIÉTÉ 66 (LINÉARITÉ)

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de transformées respectives $F(z)$ et $G(z)$

- $(u_n + v_n)_{n \geq 0}$ admet pour transformée en z la fonction $F(z) + G(z)$
- $(\lambda u_n)_{n \geq 0}$ admet pour transformée en z la fonction $\lambda F(z)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

DÉMO

C'est une conséquence directe de la linéarité du passage à la limite.

□

Ex: Soit $u_n = e^{in\omega}$ pour $\omega > 0$ et $n \geq 0$

Nous avons déjà vu que la transformée en z correspondante est $\frac{z}{z - e^{i\omega}}$

De la même façon, la transformée en z de la suite de terme général $u_n = e^{-in\omega}$ est $\frac{z}{z - e^{-i\omega}}$

En remarquant que $\sin(n\omega) = \frac{1}{2i}(e^{in\omega} - e^{-in\omega})$ et $\cos(n\omega) = \frac{1}{2}(e^{in\omega} + e^{-in\omega})$, on en déduit, par linéarité, les transformées $S(z)$ et $C(z)$ de $\sin(n\omega)$ et $\cos(n\omega)$:

$$S(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z - e^{i\omega}} - \frac{z}{z - e^{-i\omega}} \right) = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$$

$$C(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{i\omega}} + \frac{z}{z - e^{-i\omega}} \right) = \frac{z(z - \cos(\omega))}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$$

Les propriétés ci dessous sont les analogues, dans le cas discret, des propriétés des transformées de Laplace. La suite initiale est notée $(u_n)_{n \geq 0}$ et sa transformée $F(z)$; la suite modifiée est notée $(v_n)_{n \geq 0}$ et sa transformée $G(z)$ et dans chaque cas, on cherche à exprimer $G(z)$ en fonction de $F(z)$.

Nous supposons la suite initiale causale.

PROPRIÉTÉ 67 (EFFET D'UN RETARD)

• $v_n = u_{n-1} \Rightarrow G(z) = F(z)/z$

• $v_n = u_{n-k} \Rightarrow G(z) = F(z)/z^k$

Si la suite initiale n'est pas causale et possède des termes u_n non nuls pour $n < 0$, il faut en tenir

compte. La formule devient alors $G(z) = \frac{F(z)}{z^k} + \sum_{i=1}^k \frac{u_{-i}}{z^{k-i}}$.

Si l'on utilise la transformée bilatère, la formule encadrée reste valable: $G(z) = F(z)/z^k$

DÉMO

Etablissons la formule pour $k = 1$, la généralisation est immédiate:

$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n-1} z^{-n} = u_{-1} + z^{-1} \times \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1} z^{-n-1}$. Posons $k = n - 1$ dans la série. Il vient:

$G(z) = u_{-1} + z^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k} = u_{-1} + zF(z)$. Si la suite est causale, u_{-1} est nul et $G(z) = F(z)/z$

□

Cette propriété est très importante: pour retarder un signal numérique, il suffit de diviser par z sa transformée. Dans les montages, le schéma bloc correspondant à un retard unitaire sera souvent dessiné par un bloc $\boxed{z^{-1}}$

Ex: Soient $u_n = 2^n$ $n \geq 0$, $v_n = 2^{n-1}$ $n \geq 1$ et $v_0 = 0$.

La transformée en z de $(u_n)_n$ est $F(z) = \frac{z}{z-2}$

On constate que $v_n = u_{n-1} \forall n \geq 1 \Rightarrow$ la transformée en z de $(v_n)_n$ est $G(z) = \frac{1}{z-2}$

PROPRIÉTÉ 68 (EFFET D'UNE AVANCE)

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet v_n = u_{n+1} \Rightarrow G(z) = zF(z) - zu_0 \\ \bullet v_n = u_{n+k} \Rightarrow G(z) = z^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-i} u_i \end{array} \right.$$

DÉMO

Etablissons la formule pour $k = 1$:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} z^{-n} = z \times \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} z^{-n-1} = z(F(z) - u_0)$$

□

Autrement dit, les décalages d'indices sont transformés en produit.

Ex: Soient $u_n = 2^n$ et $v_n = 2^{n+1}$ pour $n \geq 0$, de transformées respectives $F(z)$ et $G(z)$.

$$F(z) = \frac{z}{z-2} \Rightarrow G(z) = z \times \frac{z}{z-2} - z = \frac{z^2 - z + 2}{z}$$

Ex: La suite de Fibonacci.

C'est une suite récurrente définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$

Soit $F(z)$ la transformée en z de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. D'après la propriété ci-dessus:

$$z[z(F(z) - 1) - 1] = z(F(z) - 1) + F(z) \Rightarrow F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

$$\text{Posons } z_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } z_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{En décomposant en éléments simples } F(z), \text{ il vient } F(z) = \frac{z_0}{z_0 - z_1} \times \frac{z}{z - z_0} + \frac{z_1}{z_0 - z_1} \times \frac{z}{z - z_1}$$

$$\text{Et l'on en déduit alors que } u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [z_0^{n+1} - z_1^{n+1}] \text{ pour } n \geq 0$$

PROPRIÉTÉ 69 (MULTIPLICATION PAR n)

$$\left\| \bullet v_n = n \times u_n \Rightarrow G(z) = -zF'(z) \right.$$

DÉMO

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{-n} \Rightarrow F'(z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} n \times u_n z^{-n-1} \Rightarrow -zF'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^{-n} = G(z)$$

□

Ex: Soit $v_n = n$ pour tout $n \geq 0$

On a $v_n = n \times h_n$ où $h_n = 1 \forall n$; la transformée de h étant $\frac{z}{z-1}$, celle de v sera

$$G(z) = -z \times \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

PROPRIÉTÉ 70 (MULTIPLICATION PAR q^n)

$$\left\| \bullet v_n = q^n \times u_n \Rightarrow G(z) = F(z/q) \right.$$

DÉMO

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n u_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n (z/q)^{-n} = F(z/q)$$

□

Ex: Soit $\omega > 0, a \in \mathbb{C}$ et $u_n = a^n \sin(n\omega)$ si $n \geq 0$

En appliquant la propriété ci-dessus à la transformée de $\sin(n\omega)$ calculée précédemment, on a:

$$G(z) = F(z/a) = \frac{az \sin(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$$

Ex: Soit $\omega > 0, a \in \mathbb{C}$ et $u_n = a^n \cos(n\omega)$ si $n \geq 0$

En appliquant la propriété ci-dessus à la transformée de $\cos(n\omega)$ calculée précédemment, on a:

$$G(z) = F(z/a) = \frac{z(z - a \cos(\omega))}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$$

PROPRIÉTÉ 71 (CONVOLUTION)

Considérons deux suites causales $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ de transformées respectives $F(z)$ et $G(z)$.

La suite $s = u * v$ est la suite causale dont l'élément d'indice n est donné par $s_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$

Si $S(z)$ est la transformée en z de $(s_n)_{n \geq 0}$, on a $S(z) = F(z) \times G(z)$

Autrement dit, la transformation en z change le produit de convolution en produit normal.

Lorsque l'on travaille avec des suites bilatères $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, la convolution se définit de la façon suivante: $s = u * v$ est une suite bilatère et $s_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k v_{n-k}$

DÉMO

Nous admettons ce théorème.

□

La formule analogue en fréquence nous permet de trouver la transformée en z d'un produit $u_n v_n$ de deux signaux échantillonnés (on dit que u_n est modulé par v_n). En ce cas, le produit a pour transformée en z la fonction $(F * G)(z)$. Cette fonction est un produit de convolution entre deux fonctions de variable complexe et nous n'irons pas plus loin dans ce calcul.

Ex:

Considérons deux suites $u_n = a^n$ et $v_n = b^n$ avec $|a| < |b| < 1$. Nous cherchons l'expression de $s = u * v$:

La transformée en z de u_n est $F(z) = \frac{z}{z-a}$ et celle de v_n est $G(z) = \frac{z}{z-b}$

D'après la propriété de convolution, celle de s_n sera $S(z) = F(z) \times G(z) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{za}{z-a} - \frac{zb}{z-b} \right)$

et l'on en déduit que $s_n = \frac{1}{a-b} (a^{n+1} - b^{n+1})$, $n \geq 0$

Enfin, les deux résultats suivants relient le comportement de la transformée en z en l'infini et sur le bord de la couronne de convergence à la suite initiale:

THÉORÈME 71 (THÉORÈME DE LA VALEUR INITIALE ET FINALE)

• $u_0 = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$

Ces théorèmes sont valables si les limites en question existent et si $u_n = 0 \ \forall n < 0$.

20.4.4 Transformée en z inverse

On admet que la transformation en z est une opération bijective sur l'ensemble des suites "usuelles". A une transformée donnée $F(z)$ correspond alors une unique suite initiale admettant $F(z)$ comme transformée. Cette suite s'appelle **l'original** de $F(z)$ et son calcul se fera par lecture dans un tableau et utilisation de la linéarité ou des autres propriétés ci dessus. Là encore, nous supposons les suites causales.

A l'instar de la transformée de Laplace, la décomposition en éléments simples des fractions va être très utile.

Ex: Calculer l'original de $\frac{z}{z-2}$

Une lecture directe du tableau donne $u_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$

Ex: Calculer l'original de $F(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$

On pose $u = \frac{1}{z} \Rightarrow F(z) = \frac{2}{1-2u} - \frac{1}{1-u} = \frac{2}{1-2/z} - \frac{1}{1-1/z}$

On a alors facilement $u_n = 2 \times 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$

On constate qu'il est plus facile de travailler avec des fractions dont la variable est $1/z$ pour trouver les originaux. Une autre technique consiste également à décomposer en éléments simples, non pas $F(z)$, mais $F(z)/z$, puis de multiplier le résultat final par z avant la lecture dans le tableau.

Ex: Calculer l'original de $\frac{z}{(z-2)(z+3)}$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z}{(z-2)(z+3)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3} \right) \Rightarrow u_n = \frac{1}{5}(2^n - (-3)^n), n \in \mathbb{N}$$

Ex: Calculer l'original de $\frac{1}{(z-2)(z+3)}$

En utilisant l'exemple ci-dessus et la propriété de retard, on a $u_n = \frac{1}{5}(2^{n-1} - (-3)^{n-1}), n \geq 1$.

Il existe une formule permettant de calculer l'original en toute généralité: La formule de Cauchy; elle utilise la notion d'intégrale dans le plan complexe, qui sort du cadre de notre programme. On peut néanmoins contourner le problème et présenter rapidement cette technique:

La notation $\oint_{\gamma} f(z)dz$ signifie que l'on intègre la fonction $f(z)$ sur un contour fermé γ du plan complexe. En pratique, γ sera souvent un cercle centré à l'origine et l'on pourra donc poser $z = re^{i\theta}$, ce qui permettra de transformer cette intégrale en une intégrale simple par rapport à θ entre $-\pi$ et π .

PROPRIÉTÉ 72 (FORMULE DE CAUCHY)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ un signal numérique et $F(z)$ sa transformée en z .

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz = \frac{r^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta$$

On a également $u_n = \frac{1}{n!} \times \frac{d^n}{dz^n} (F(z^{-1}))|_{z=0}$

Par ailleurs, si $F(z)$ est une fraction rationnelle en z et que ses pôles sont connus, les résidus des pôles peuvent également permettre le calcul des u_n . Nous admettons aussi la formule suivante, dans laquelle la somme est effectuée sur l'ensemble des pôles p_i de la fraction se trouvant à l'intérieur du contour γ :

$$u_n = \sum_i \text{Res}(F(z)z^{n-1}; p_i)$$

et $\text{Res}(F(z)z^{n-1}; p_i) = [(z - p_i)F(z)z^{n-1}]_{z=p_i}$ pour un pôle simple.

20.4.5 Applications

Equations aux différences.

Les transformées en z peuvent être utilisées pour résoudre des équations de récurrence linéaire. Une équation aux différences est une équation de la forme av_n

Ex:

On cherche toutes les suites réelles vérifiant $u_{n+1} - 2u_n = 2n$ et $u_0 = 1$

Soit $U(z)$ la transformée en z de la suite (qui peut être vue comme un signal discret). On a:

$$z(U(z) - 1) - 2U(z) = \frac{2z}{(z-1)^2} \Rightarrow U(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2} + \frac{z}{z-2} = \dots = -\frac{2z}{z-2} - \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{3z}{z-2}$$

On en déduit l'original de cette expression: $u_n = -2 - 2n + 3 \times 2^n$

Fonction de transfert d'un filtre numérique.

Un signal discret est appliqué à l'entrée d'un système physique linéaire et en ressort sous la forme d'une autre signal discret. Le lien entre les deux est donné par la fonction de transfert du système (cette fonction de transfert est également la réponse impulsionnelle du filtre). Dans le cas de filtres numériques discrets, la fonction de transfert est une suite numérique.

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ le signal en entrée, $(v_n)_{n \geq 0}$ le signal en sortie et $(h_n)_{n \geq 0}$ la fonction de transfert du filtre. Soient $U(z)$, $V(z)$ et $H(z)$ les transformées en z respectives de $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(h_n)_{n \geq 0}$

THÉORÈME 72

$$V(z) = H(z) \times U(z)$$

DÉMO

On a déjà vu dans les chapitres précédents que la sortie d'un système physique linéaire était liée à l'entrée par une équation de convolution: $v = u * h$ où h est par définition la fonction de transfert du système. En passant à la transformée en z , il vient, d'après la propriété de convolution, $V(z) = H(z)U(z)$. Dans le cas d'un système numérique discret, la fonction $H(z)$ s'appelle la transmittance.
□

Le calcul de l'original de $V(z)$ donne donc la réponse du filtre pour une entrée $(u_n)_n$

DÉFINITION 75 (STABILITÉ D'UN FILTRE NUMÉRIQUE)

Un filtre numérique de fonction de transfert $(h_n)_{n \geq 0}$ est stable si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h_n| < \infty$$

Autrement dit, un système est stable ssi sa fonction de transfert est le terme général d'une série

absolument convergente. Par ailleurs, $|H(z)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} h_n/z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |h_n/z^n|$

Si z se trouve sur le cercle unité, $|z| = 1$ et l'inégalité précédente donne:

$$|H(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |h_n|$$

Ainsi, si le système est stable, le cercle unité doit être inclus dans le disque de convergence (ou la couronne s'il s'agit d'une suite bilatère). En particulier, tous les pôles de $H(z)$ doivent être contenus dans le disque de rayon unité du plan complexe.

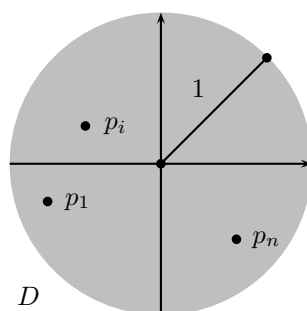


Figure 20.6: Stabilité et position des pôles p_1, \dots, p_n

Chapitre 21

Dénombrement

21.1 Opérations sur les ensembles

21.1.1 réunion, intersection, produit cartésien

On rappelle les définitions suivantes (pour plus de précisions, se reporter à l'annexe « théorie des ensembles ») :

Un ensemble est une collection d'objets (qui sont appelés les éléments de l'ensemble).

$x \in A$ indique que l'élément x appartient à l'ensemble A .

\emptyset est le seul ensemble ne contenant aucun élément. On l'appelle ensemble vide.

Etant donné un ensemble Ω note $\mathfrak{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

Un élément de $\mathfrak{P}(\Omega)$ est donc un sous ensemble A de Ω .

Dans toute la suite, A et B seront des sous ensembles de Ω .

DÉFINITION 76

- $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- $\bar{A}^\Omega = \{x \in \Omega / x \notin A\}$
- $A/B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- $A \Delta B = (A \cup B) / (A \cap B) = \{x \in A \cup B / x \notin A \cap B\}$
- $A/B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

$A \cup B$ est la réunion de A et B . C'est l'ensemble des éléments qui sont ou dans A ou dans B .

$A \cap B$ est l'intersection de A et B . C'est l'ensemble des éléments communs à A et B .

\bar{A}^Ω est le complémentaire de A dans Ω . C'est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .

A/B est l'ensemble A moins B (éléments de A qui ne sont pas dans B). On a aussi $A/B = \bar{A}^B$.

$A \Delta B$ s'appelle la différence symétrique de A et B . Il s'agit de l'ensemble $A \cup B$ dont on a retiré les éléments communs à A et B .

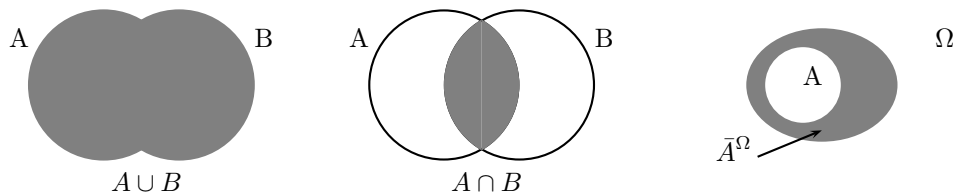


Figure 21.1: Union, intersection, complémentaire

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints (ils n'ont pas d'éléments communs).

$A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

DÉFINITION 77

Une famille non vide A_1, A_2, \dots, A_n de sous ensembles de Ω est une **partition** de Ω si:

- les A_i sont deux à deux disjoints: $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$
- leur réunion forme Ω : $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

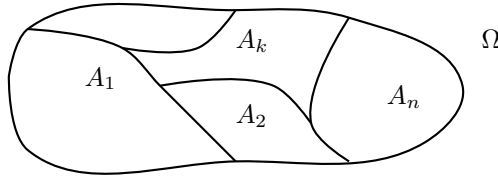


Figure 21.2: Partition d'un ensemble

Ex $\Omega = \{ 1, 2, 3 \}$ $A = \{ 1, 3 \}$ $B = \{ 2, 3 \}$

$\mathfrak{P}(\Omega) = \{ \emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} \}$

$A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \{ 3 \}$, $A \Delta B = \{1, 2\}$, $A/B = \{1\}$ et $\bar{A} = \{ 2 \}$

PROPRIÉTÉ 73 (LOIS DE DE MORGAN)

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

DÉMO

- Soit $x \in \overline{A \cup B}$, alors $x \notin A \cup B$ donc $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. La réciproque est la même.

- Soit $x \in \overline{A \cap B}$, alors $x \notin A \cap B$ donc $x \notin A$ ou $x \notin B$ donc $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Là encore, la réciproque est identique.

□

PROPRIÉTÉ 74 (DISTRIBUTIVITÉ DE \cup ET \cap)

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

DÉMO

Elle se fait exactement de la même façon que ci-dessus (en exercice).

□

DÉFINITION 78

On appelle **produit cartésien** de A par B l'ensemble noté $A \times B$ défini par:

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ on peut généraliser ce produit à $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) / a_i \in A_i\}$

En particulier, $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \times}$ se note A^n

Ex: $A = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ a, b \} \Rightarrow A \times B = \{ (1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b) \}$

Ex: $A = \{ 7, 8, 9, 10, V, D, R, A \}$ $B = \{ \clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit \} \Rightarrow A \times B$ est un jeu de 32 cartes.

Ex: $A = B = \mathbb{R} \Rightarrow A \times B = \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points du plan

Ex: $H = \{ \text{Marcel, Lucien, Honoré} \}$ $F = \{ \text{Huguette, Juliette, Cunégonde} \}$

$\Rightarrow H \times F$ est l'ensemble de tous les couples possibles.

21.1.2 Cardinal d'un ensemble

DÉFINITION 79

Le **cardinal** d'un ensemble Ω est le nombre de ses éléments. On le note $\text{Card } \Omega$ ou $|\Omega|$

- $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$
- $\text{Card } A \times B = \text{Card } A \times \text{Card } B$
- $\text{Card } \Omega = n \Rightarrow \text{Card } \mathfrak{P}(\Omega) = 2^n$

DÉMO

• Le nombre d'éléments dans $A \cup B$ est égal au nombre d'éléments dans A plus le nombre d'éléments dans B moins le nombre d'éléments communs que l'on a compté deux fois !!!

• Il s'agit du principe multiplicatif.

Pour chaque choix d'un élément de A , on a $\text{Card } B$ choix d'un élément de B , d'où la formule.

• Soit A une partie de Ω . A chaque élément $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ de Ω , nous pouvons associer 0 ou 1 selon qu'il appartient ou non à A . Ainsi, il y a autant de parties de Ω que de choix 0 ou 1 possibles.

Autrement dit $\phi : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow \{0, 1\}^n$ avec $\epsilon_k = 1 \Leftrightarrow \omega_k \in A$ est une fonction bijective.
 $A \longmapsto \phi(A) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$

□

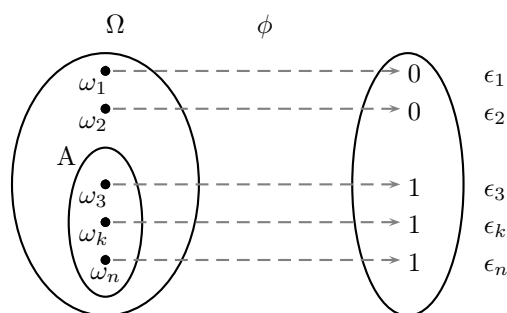


Figure 21.3: Cardinal d'un ensemble

Ex: $\Omega = \{ a, b, c \}$ $\text{Card } \Omega = 3$, $\text{Card } \mathfrak{P}(\Omega) = 8$.

21.2 Listes, arrangements, combinaisons

21.2.1 Définition

DÉFINITION 80

- Une p -liste de Ω est un élément de Ω^p .
- Un p -arrangement de Ω est une p -liste d'éléments distincts.
- Une permutation de Ω est un n -arrangement.
- Une combinaison à p éléments est un sous ensemble de cardinal p de Ω .

Exemple: $\Omega = \{ a, b, c \}$

Listes:

$(a, b), (b, c), (a, a)$ sont des 2-listes.

$(a, b, c), (a, c, b), (a, a, b), (c, c, c)$ sont des 3-listes.

$(a, a, a, b, c, b, a, c, c, b)$ est une 10-liste.

Arrangements:

$(a, b), (b, c)$ sont des 2-arrangements mais (a, a) n'en est pas un.

$(a, b, c), (c, b, a), (a, c, b)$ sont des 3-arrangements.

Il ne peut pas exister de 4-arrangements ou de p -arrangements pour $p > n$ car les éléments doivent être distincts.

Permutations:

$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ et (c, b, a) sont les 6 permutations de Ω

Combinaisons:

$\{a, b\}, \{b, c\}$ et $\{c, a\}$ sont les combinaisons à 2 éléments de Ω .

$\{a, b, c\}$ est la seule combinaison à 3 éléments de Ω .

Les combinaisons et permutations sont, par définition, sans répétition des éléments. Nous serons amenés à définir également des combinaisons et des permutations à répétition.

DÉFINITION 81

Une combinaison avec répétition de p éléments choisis parmi les n éléments de Ω est un sous-ensemble non ordonné de cardinal p dont les éléments sont choisis dans Ω .

Par exemple, si $\Omega = \{a, b, c\}$, alors $\{a, a\}$, $\{a, b\}$, $\{c, a\}$, $\{c, c\}$ sont des combinaisons (à répétition) de 2 éléments de Ω .

DÉFINITION 82

Considérons un ensemble Ω dont les n éléments sont regroupés en k catégories, contenant respectivement n_1, n_2, \dots, n_k éléments (avec $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$). Une permutation avec répétition de Ω est une liste ordonnée de n éléments, dans laquelle figure n_i éléments de la catégorie i pour tout $i = 1, \dots, k$.

Par exemple, le nombre d'anagrammes (avec ou sans signification) du mot LIVRE est $5!$. Par contre, le mot TRALALA contient 2 L et 3 A. En ce cas, les 7 lettres se décomposent en 4 catégories de lettres distinctes et un anagramme du mot est une permutation à répétition.

21.2.2 Propriétés

THÉORÈME 73 (PRINCIPE MULTIPLICATIF)

Si $\text{Card } \Omega = n$:

- Le nombre de p -listes de Ω est n^p
- Le nombre de p -arrangements est $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$
- Le nombre de permutations est $n!$
- Le nombre de combinaisons à p éléments est $C_n^p = A_n^p/p!$
- Le nombre de combinaisons à répétition de p éléments est $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$

Si Ω est formé de k catégories n_1, \dots, n_k , le nombre de permutation à répétition de Ω est

$$\binom{n}{n_1; n_2; \dots; n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

On rappelle que la factorielle d'un entier n est $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ et que par convention, $0! = 1$.

DÉMO

- Une p -liste étant un élément du produit cartésien Ω^p , il en existe $(\text{Card } \Omega)^p = n^p$

- On applique encore le principe multiplicatif:

On a n choix pour le premier élément de la liste, puis pour chaque choix effectué il reste $n-1$ choix possibles pour le second (qui doit être différent du premier), puis $n-2$ choix pour le troisième, etc....

- Pour le nombre de permutations, il suffit d'appliquer la formule ci dessus avec $n = p$:

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1) = n!$$

- Etant donné un p -arrangement de Ω , on peut effectuer $p!$ permutation de ses éléments qui conduisent à un p -arrangement distinct. A ces $p!$ p -arrangements, est associée une unique combinaison formée des éléments des p -arrangements. Il y a donc $p!$ fois moins de p -arrangements que de combinaisons.

- On place les n éléments de Ω en ligne. Entre chaque élément, on place une boule noire (on a donc $n-1$ boules noires). Une combinaison à répétition est définie par le nombre de fois que chaque élément de Ω apparaît. A la place de chaque élément, on met autant de boules blanches que le nombre de fois où cet élément apparaît dans la combinaison. On se retrouve alors avec $n+p-1$ boules dont p sont blanches et $n-1$ sont noires et pour chaque combinaison à p éléments, il existe une unique configuration des boules. Définir une combinaison est donc équivalent à définir la position de $n-1$ boules noires parmi $n+p-1$, c'est à dire $C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^p$.

- On considère que l'on peut numéroter tous les objets de Ω pour les distinguer. Le nombre de permutations possibles est $n!$. Lorsque l'on efface les numéros d'une catégorie i , toutes les boules de cette catégorie deviennent identiques et l'on peut donc regrouper les permutations en $n_i!$ paquets qui contiennent tous les mêmes mots. En opérant de la même façon pour toutes les catégories, on voit donc qu'il faut diviser $n!$ par $n_1! \times \dots \times n_k!$ pour avoir le nombre de permutations à répétition.

□

Exemple de référence: Le modèle de l'urne

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .

On effectue successivement p tirages d'une boule de l'urne, en remettant la boule après chaque tirage, et l'on observe la suite des numéros sortis en tenant compte de l'ordre. Un tirage correspond alors à une p -liste de l'ensemble des boules.

On effectue successivement p tirages d'une boule de l'urne, sans remise, et l'on observe la suite des numéros sortis en tenant compte de l'ordre. Un tirage correspond alors à une p -arrangement de l'ensemble des boules.

On effectue successivement n tirages d'une boule de l'urne, sans remise, et l'on observe la suite des numéros sortis en tenant compte de l'ordre. Un tirage correspond alors à une permutation (sans répétition) de l'ensemble des boules.

On effectue le tirage simultané de p boules et l'on observe les numéros sortis, sans tenir compte de l'ordre. Il s'agit alors d'une combinaison (sans répétition) à p éléments.

On tire p successivement dans l'urne, en les remettant dans l'urne après chaque tirage. On observe les numéros sortis, mais sans tenir compte de l'ordre. Il s'agit alors d'une combinaison à répétition.

Si l'urne contient n_i boules de couleur C_i pour $i = 1, \dots, k$, que l'on effectue n tirages successifs et sans remise et que l'on observe la couleur de la séquence obtenue, alors cette séquence correspond à une permutation à répétition.

Résumons ces situations par un tableau:

	avec ordre	sans ordre
avec répétition	n^p	Γ_n^p
sans répétition	A_n^p	C_n^p

REMARQUE 19

Le principe multiplicatif indique qu'un ET se traduit en terme de dénombrement par une $\boxed{\times}$ et un OU par une $\boxed{+}$ (si les ensembles correspondants sont disjoints).

Exemples de dénombrement:

- On lance n fois de suite une pièce pour jouer à pile ou face. On note à chaque lancer le résultat (π ou ϕ). L'ensemble des configurations est $\{\pi, \phi\}^n$. Un résultat est une n -liste de $\{\pi, \phi\}$ et il y en a en tout 2^n .

- Combien existe-t-il de tiercé différents dans l'ordre avec 20 chevaux au départ?

$A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18$ car un tiercé est un 3-arrangement de l'ensemble des chevaux.

Dans le désordre, il existe C_{20}^3 possibilités.

- Combien y a-t-il de réponses possibles au loto sportif: 3^{16} . Une réponse est une 16-liste de $\{1, N, 2\}$

- Au poker, l'ensemble des mains de 5 cartes est une combinaison à 5 éléments. Il y en a C_{32}^5

- Un message binaire contient n bits égaux à 0 ou 1. 3 erreurs se sont glissées parmi les bits. De combien de façon peuvent se placer ces 3 erreurs ?

On doit choisir la place de 3 cases parmi n , ce qui se fait de C_n^3 façons.

- Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot « MATHS » ?

Un anagramme (sans sens particulier) correspond à une permutation des lettres de MATHS. Il y a donc $5! = 120$ possibilités.

- De combien de façons peut-on répartir 7 personnes sur 7 chaises, si les chaises sont alignées ? Si elles sont en cercle ?

Une configuration est une permutation des 7 personnes: Il y en a $7!$ et $6!$ si les chaises sont en cercle.

- De combien de façons peut-on répartir 12 étudiants en 3 groupes de telle sorte que chaque groupe comprenne 4 personnes ?

Une configuration est une permutation à répétition. Il en existe $\frac{12!}{4!4!4!}$

Propriétés des C_n^p et des A_n^p :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}} \quad \boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

En particulier: $A_n^0 = 1$, $A_n^n = n!$, $A_n^1 = n$, $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$ et $C_n^2 = n(n-1)/2$

DÉMO

Première démonstration:

Choisir p éléments de Ω pour former une combinaison, c'est aussi rejeter les $n-p$ éléments que l'on ne prend pas. Il y a donc autant de choix de p éléments que de choix de $n-p$ éléments.

Seconde démonstration:

Dans la formule, la substitution de p en $n-p$ donne immédiatement la même formule.

□

THÉORÈME 74 (TRIANGLE DE PASCAL)

$$\boxed{C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p \quad \forall 0 \leq p < n}$$

DÉMO

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{p+1} + C_n^p &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p-1)!} \left\{ \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n-p} \right\} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \frac{n-p+p+1}{(p+1)(n-p)} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = C_{n+1}^{p+1} \end{aligned}$$

Seconde démonstration:

On fixe un élément ω d'un ensemble Ω à $n+1$ éléments. Nous allons décomposer en deux l'ensemble de toutes les parties à $p+1$ éléments de Ω . Considérons les parties à $p+1$ éléments qui contiennent ω . Il en existe C_n^p , puisque l'on ne doit choisir que les p éléments qui ne sont pas égaux à ω . Maintenant, les parties à $p+1$ éléments qui ne contiennent pas ω sont au nombre de C_n^{p+1} car on doit choisir $p+1$ éléments parmi les n qui ne sont pas égaux à ω . Finalement, l'ensemble de toutes les parties à $p+1$ éléments est la réunion disjointe de celui des parties à $p+1$ éléments dont ω et celui des parties à $p+1$ éléments sans ω . Son cardinal est la somme des cardinaux des deux ensembles et l'on en déduit la formule de Pascal. □

Cette formule permet le calcul de proche en proche des valeurs des C_n^p et permet de les ranger dans un tableau appelé triangle de Pascal:

TRIANGLE DE PASCAL

$n \quad p$	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Sauf sur la diagonale ou sur la première colonne, un élément est égal à la somme de l'élément au dessus de lui et de l'élément à gauche de celui du dessus.

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \text{colonne } p+1 & \\ C_n^p & C_n^{p+1} & \longrightarrow \text{ligne } n \\ & C_{n+1}^{p+1} & \end{array}$$

THÉORÈME 75 (FORMULE DU BINÔME DE NEWTON)

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \\ &(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \end{aligned}}$$

DÉMO

- Première démo par récurrence sur n :

La formule est vraie si $n = 1$. Supposons là exacte au rang n .

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1} = \alpha + \beta$$

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs, } \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n-k+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k a^k b^{n-k+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^{k+1} a^{k+1} b^{n-k} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (C_n^{k+1} + C_n^k) a^{k+1} b^{n-k} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} \\ &= \alpha + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k+1} a^{k+1} b^{n-k} = \alpha + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^k b^{n-k+1} = \alpha + \beta \end{aligned}$$

Les deux expressions coïncident, d'où la formule.

- Seconde démo par des arguments de dénombrement:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \times}$$

Le développement de $(a+b)^n$ est donc une somme de termes de la forme $a^k b^i$. Puisqu'il y a en tout n facteurs, lorsque k facteurs a sont présents dans l'un des terme, le reste du terme est formé de $n-k$ facteurs b . Le développement est donc formé de $a^k b^{n-k}$ pour k variant de 0 à n .

Considérons tous les termes ayant k facteurs a et donc $n-k$ facteurs b . Dénombrer ces termes revient à choisir la place des k a parmi les n termes possibles. Il y a donc C_n^k positions possibles.

$$\text{Ainsi, } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

□

$$\text{Ex: } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

21.2.3 Exemples d'applications

Linéarisation d'expression trigonométriques

Soit $F(x) = \cos^4 x \times \sin^2 x$ que nous souhaiterions écrire sous la forme d'une somme de sinus et de cosinus.

$$F(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \times \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{2^6} (e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6 + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) = \text{etc....}$$

Une autre démonstration de Card $\mathfrak{P}(\Omega) = 2^n$

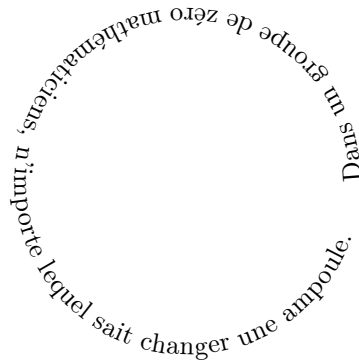
Les parties de Ω se décomposent en une partition formée des parties de cardinal k , k variant de 0 à n , autrement dit:

$$\mathfrak{P}(\Omega) = \coprod_{k=0}^n \left(\coprod_{A \in \Omega / |A|=k} A \right)$$

Le nombre de parties de Ω à k éléments est par définition C_n^k . Ainsi:

$$\text{Card } \mathfrak{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^n C_n^k = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

□



Un mathématicien, un physicien et un biologiste sont dans un train en Irlande. Par la fenêtre, ils aperçoivent un mouton noir.

- Comme c'est intéressant, dit le biologiste, en Irlande, les moutons sont noirs !
- La seule chose que l'on peut dire, réplique le physicien, c'est qu'il existe au moins un mouton noir en Irlande.
- Non, dit le mathématicien, on peut juste affirmer qu'en Irlande, il existe au moins un mouton dont une face est noir.

Le mathématicien, le physicien et le biologiste sont attablés à la terrasse d'un café lorsqu'ils voient deux personnes entrer dans l'immeuble en face. Quelques instants plus tard, trois personnes en sortent :

- Le biologiste : « Oh! Ils se sont reproduits! »
- Le physicien : « Mais non, il y a une erreur d'expérience ! »
- Le mathématicien : « Si une personne entre dans l'immeuble, il sera à nouveau vide. »

Le Livre de sable (Jorge Luis Borges).

La ligne est composée d'un nombre infini de points ; le plan, d'un nombre infini de lignes ; le volume, d'un nombre infini de plans ; l'hypervolume, d'un nombre infini de volumes... Non, décidément, ce n'est pas là, *more geometrico*, la meilleure façon de commencer mon récit. C'est devenu une convention aujourd'hui d'affirmer de tout conte fantastique qu'il est véridique ; le mien, pourtant, est véridique.

Je vis seul, au quatrième étage d'un immeuble de la rue Belgrano. Il y a de cela quelques mois, en fin d'après-midi, j'entendis frapper à ma porte. J'ouvris et un inconnu entra. C'était un homme grand, aux traits imprécis. Peut-être est-ce ma myopie qui me les fit voir de la sorte. Tout son aspect reflétait une pauvreté décente. Il était vêtu de gris et il tenait une valise à la main. Je me rendis tout de suite compte que c'était un étranger. Au premier abord, je le pris pour un homme âgé ; ensuite je constatai que j'avais été trompé par ses cheveux clairsemés, blonds, presque blancs, comme chez les Nordiques. Au cours de notre conversation, qui ne dura pas plus d'une heure, j'appris qu'il était originaire des Orcades. Je lui offris une chaise. L'homme laissa passer un moment avant de parler. Il émanait de lui une espèce de mélancolie, comme il doit en être de moi aujourd'hui.

- Je vends des bibles, me dit-il.

Non sans pédanterie, je lui répondis :

- Il y a ici plusieurs bibles anglaises, y compris la première, celle de Jean Wiclef. J'ai également celle de Cipriano de Valera, celle de Luther, qui du point de vue littéraire est la plus mauvaise, et un exemplaire en latin de la Vulgate. Comme vous voyez, ce ne sont pas précisément les bibles qui me manquent.

Après un silence, il me rétorqua :

- Je ne vends pas que des bibles. Je puis vous montrer un livre sacré qui peut-être vous intéressera. Je l'ai acheté à la frontière du Bikanir.

- Il ouvrit sa valise et pose l'objet sur la table. C'était un volume in-octavo, relié en toile. Il avait sans aucun doute passé par bien des mains. Je l'examinai ; son poids insolite me surprit. En haut du dos je lus *Holy Writ* et en bas *Bombay*.

- Il doit dater du dix-neuvième siècle, observai-je.

- Je ne sais pas. Je ne l'ai jamais su, me fut-il répondu.

Je l'ouvris au hasard. Les caractères m'étaient inconnus. Les pages, qui me parurent assez abîmées et d'une pauvre typographie, étaient imprimées sur deux colonnes à la façon d'une bible. Le texte était serré et disposé en versets. A l'angle supérieur des pages figuraient des chiffres arabes. Mon attention fut attirée sur le fait

qu'une page paire portait, par exemple, le numéro 40514 et l'impair, qui suivait, le numéro 999. Je tournai cette page; au verso la pagination comportait huit chiffres. Elle était ornée d'une petite illustration, comme on en trouve dans les dictionnaires : une ancre dessinée à la plume, comme par la main malhabile d'un enfant.

L'inconnu me dit alors :

- Regardez-la bien. Vous ne la verrez jamais plus.

Il y avait comme une menace dans cette affirmation, mais pas dans la voix.

Je repérai sa place exacte dans le livre et fermai le volume. Je le rouvris aussitôt. Je cherchai en vain le dessin de l'ancre, page par page. Pour masquer ma surprise, je lui dis :

- Il s'agit d'une version de l'Écriture Sainte dans une des langues hindoues, n'est-ce pas ?

- Non, me répondit-il.

Puis, baissant la voix comme pour me confier un secret :

- J'ai acheté ce volume, dit-il, dans un village de la plaine, en échange de quelques roupies et d'une bible. Son possesseur ne savait pas lire. Je suppose qu'il a pris le Livre des Livres pour une amulette. Il appartenait à la caste la plus inférieure; on ne pouvait, sans contamination, marcher sur son ombre. Il me dit que son livre s'appelait le livre de sable, parce que ni ce livre ni le sable n'ont de commencement ni de fin.

Il me demanda de chercher la première page.

Je posai ma main gauche sur la couverture et ouvris le volume de mon pouce serré contre l'index. Je m'efforçai en vain : il restait toujours des feuilles entre la couverture et mon pouce. Elles semblaient sourdre du livre.

- Maintenant cherchez la dernière.

Mes tentatives échouèrent de même; à peine pus-je balbutier d'une voix qui n'était plus ma voix :

Cela n'est pas possible.

Toujours à voix basse le vendeur de bibles me dit :

- Cela n'est pas possible et pourtant cela est. Le nombre de pages de ce livre est exactement infini. Aucune n'est la première, aucune n'est la dernière. Je ne sais pourquoi elles sont numérotées de cette façon arbitraire.

Peut-être pour laisser entendre que les composants d'une série infinie peuvent être numérotés de façon absolument quelconque.

Puis, comme s'il pensait à voix haute, il ajouta :

- Si l'espace est infini, nous sommes dans n'importe quel point de l'espace. Si le temps est infini, nous sommes dans n'importe quel point du temps.

Ses considérations m'irritèrent.

- Vous avez une religion, sans doute? lui demandai-je.

- Oui, je suis presbytérien. Ma conscience est tranquille. Je suis sûr de ne pas avoir roulé l'indigène en lui donnant la Parole du Seigneur contre son livre diabolique.

Je l'assurai qu'il n'avait rien à se reprocher et je lui demandai s'il était de passage seulement sous nos climats. Il me répondit qu'il pensait retourner prochainement dans sa patrie. C'est alors que j'appris qu'il était écossais, des îles Orcades. Je lui dis que j'aimais personnellement l'Écosse, ayant une véritable passion pour Stevenson et pour Hume.

- Et pour Robbie Burns, corrigea-t-il.

Tandis que nous parlions je continuais à feuilleter le livre infini.

- Vous avez l'intention d'offrir ce curieux spécimen au British Museum ? lui demandai-je, feignant l'indifférence.

- Non. C'est à vous que je l'offre, me répliqua-t-il, et il énonça un prix élevé.

Je lui répondis, en toute sincérité, que cette somme n'était pas dans mes moyens et je me mis à réfléchir. Au bout de quelques minutes, j'avais ourdi mon plan.

- Je vous propose un échange, lui dis-je. Vous, vous avez obtenu ce volume contre quelques roupies et un exemplaire de l'Écriture Sainte; moi, je vous offre le montant de ma retraite, que je viens de toucher, et la bible de Wicief en caractères gothiques. Elle me vient de mes parents.

- A black letter Wicief ! murmura-t-il.

J'allai dans ma chambre et je lui apportai l'argent et le livre. Il le feuilleta et examine la page de titre avec une ferveur de bibliophile.

- Marché conclu, me dit-il.

Je fus surpris qu'il ne marchandât pas. Ce n'est que par la suite que je compris qu'il était venu chez moi décidé à me vendre le livre. Sans même les compter, il mit les billets dans sa poche.

Nous parlâmes de l'Inde, des Orcades et des jarls norvégiens qui gouvernèrent ces îles. Quand l'homme s'en alla, il faisait nuit. Je ne l'ai jamais revu et j'ignore son nom.

Je comptais ranger le livre de sable dans le vide qu'avait laissé la bible de Wicief, mais je décidai finalement de le dissimuler derrière des volumes dépareillés des Mille et Une Nuits.

Je me couchai mais ne dormis point. Vers trois ou quatre heures du matin, j'allumai. Je repris le livre impossible et me mis à le feuilleter. Sur l'une des pages, je vis le dessin d'un masque. Le haut du feuillet portait un chiffre, que j'ai oublié, élevé à la puissance 9.

Je ne montrai mon trésor à personne. Au bonheur de le posséder s'ajouta la crainte qu'on ne me le volât, puis le soupçon qu'il ne fût pas véritablement infini. Ces deux soucis vinrent accroître ma vieille misanthropie. J'avais encore quelques amis ; je cessai de les voir. Prisonnier du livre, je ne mettais pratiquement plus le pied dehors.

J'examinai à la loupe le dos et les plats fatigués et je repoussai l'éventualité d'un quelconque artifice. Je constatai que les petites illustrations se trouvaient à deux mille pages les unes des autres. Je les notai dans un répertoire alphabétique que je ne tardai pas à remplir. Elles ne réapparurent jamais. La nuit, pendant les rares intervalles que m'accordait l'insomnie, je rêvais du livre.

L'été déclinait quand je compris que ce livre était monstrueux. Cela ne me servit à rien de reconnaître que j'étais moi-même également monstrueux, moi qui le voyais avec mes yeux et le palpais avec mes dix doigts et ongles. Je sentis que c'était un objet de cauchemar, une chose obscène qui diffamait et corrompait la réalité. Je pensai au feu, mais je craignis que la combustion d'un livre infini ne soit pareillement infinie et n'asphyxie la planète par sa fumée. Je me souvins d'avoir lu quelque part que le meilleur endroit où cacher une feuille c'est une forêt. Avant d'avoir pris ma retraite, je travaillais à la Bibliothèque nationale, qui abrite neuf cent mille livres; je sais qu'à droite du vestibule, un escalier en colimaçon descend dans les profondeurs d'un sous-sol où sont gardés les périodiques et les cartes. Je profitai d'une inattention des employés pour oublier le livre de sable sur l'un des rayons humides. J'essayai de ne pas regarder à quelle hauteur ni à quelle distance de la porte. Je suis un peu soulagé mais je ne veux pas même passer rue Mexico.

© Jorge Luis Borges in « Le livre de sable. »

Chapitre 22

Probabilité sur un ensemble fini

Historique

La première tentative pour appliquer les mathématiques à un jeu de hasard remonte à 1654 lorsque le chevalier de Méré expose à Pascal (1623-1662) son célèbre problème de lancer de dés. De la correspondance qui va suivre entre Pascal et Pierre de Fermat est né le calcul des probabilités. Hasard provient de l'arabe "az-zahr" (dé à jouer). Depuis le XVIIème siècle, de nombreux mathématiciens ont contribué au développement de cette théorie: De Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Laplace (1749-1827), Condorcet, Denis Poisson, Emile Borel, etc.

La théorie actuelle des probabilités doit beaucoup aux mathématiciens russes: Pafnouti Tchebychev (1821-1894), Andreï Markov (1856-1922) ou encore Andreï Kolmogorov (1903-1987) qui a axiomatisé la théorie des probabilités dans les années 1920 en faisant le lien avec la théorie des ensembles. Kolmogorov était par contre un proche du pouvoir (son père a été ministre en URSS) qui a co-signé en 1974 un article dans la Pravda où il se félicitait de l'expulsion du prix Nobel de littérature Alexandre Soljenitsyne (celui-ci fût d'ailleurs professeur de mathématiques durant plusieurs années).

Paul Levy (1886-1971) s'intéressa également beaucoup aux probabilités; il publia en 1925 un traité de calcul des probabilités célèbre et étudia en 1948 le mouvement brownien dont Einstein avait découvert l'origine. Ce mouvement brownien permettra à Ito de définir, après la seconde guerre mondiale, l'intégrale stochastique et les équations différentielles stochastiques. Ces outils sont très utilisés aujourd'hui dans les problèmes de physique et d'économie, par exemple pour la modélisation des marchés financiers.

22.1 Expérience aléatoire

22.1.1 Introduction

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue dépend du hasard. On choisit un aspect du phénomène observé sous la forme d'un caractère que l'on va étudier pour prévoir les différentes valeurs qu'il peut prendre.

L'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience (c'est à dire l'ensemble de toutes les valeurs possibles du caractère étudié) est appelé ensemble univers ou univers des possibles. On le notera généralement Ω .

Une éventualité de l'expérience (appelée aussi évènement élémentaire ou épreuve) est une des issues possibles. C'est donc un élément ω de Ω . A chaque éventualité va être associé un nombre compris entre 0 et 1 qui va mesurer sa vraisemblance, sa capacité à se réaliser ou non. Ce sera la probabilité de cette éventualité.

Un évènement de l'expérience aléatoire est un sous ensemble de Ω ; c'est donc un ensemble de plusieurs éventualités.

22.1.2 Quelques exemples d'expériences aléatoires.

Ex1: Epreuve de Bernoulli.

L'expérience consiste en un jeu de pile ou face. Le caractère étudié est le dessin de la face supérieure de la pièce. Nous pourrions les noter π et ϕ ou encore 1 et 0.

L'ensemble univers est donc $\Omega = \{\text{pile, face}\} = \{\pi, \phi\} = \{0, 1\}$.

Les éventualités sont "pile" ou "face". De façon plus générale, toute expérience avec deux issues possibles (1 ou 0, un succès ou un échec, etc.) s'appellera une épreuve de Bernoulli.

Ex2: Lancer d'un dé à six faces normal.

On étudie le numéro de la face supérieure: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Une éventualité est l'un des six numéros qui compose Ω .

L'évènement "le numéro sorti est pair" est formé par $A = \{2, 4, 6\}$.

Ex3: Loi équirépartie.

On tire au hasard dans une urne contenant n objets numérotés de 1 à n . On a $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$.

L'évènement "l'objet tiré est inférieur ou égal à 2" est formé par le sous ensemble $A = \{1, 2\}$ de Ω .

Cette expérience généralise les deux précédentes qui en sont des cas particuliers (avec $n = 2$ et $n = 6$).

Ex4: Lancer de deux dés à six faces.

On lance deux dés (un vert et un rouge, mettons) et l'on observe les numéros des faces supérieures.

Une éventualité de cette expérience est un couple (i, j) où $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ est le numéro du dé vert et j celui du dé rouge. Ainsi, $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{1, 2, \dots, 6\} = \{(i, j) / i, j = 1, 2, \dots, 6\}$

Dans cette expérience, l'ordre a de l'importance (on peut distinguer les deux dés) et les 36 issues possibles sont également probables.

Ex5: Expérience composée.

On dispose d'une pièce et de deux urnes contenant des boules blanches et noires. On tire à pile ou face (avec la pièce). Si pile apparaît, on choisit une boule dans la première urne. Si face apparaît, on fait de même dans la seconde. On s'intéresse au résultat du pile ou face et à la couleur de la boule obtenue.

Une éventualité est donc un couple de la forme (ϵ, C) où ϵ est le résultat du lancer de la pièce et appartient à l'ensemble $\{\pi, \phi\}$ et C est la couleur de la boule et appartient à l'ensemble $\{B, N\}$.

On a alors $\Omega = \{\pi, \phi\} \times \{B, N\}$

L'ensemble univers d'une expérience composée sera représenté par un produit cartésien.

Ex6: Succession de tirages à pile ou face.

On effectue des tirages successifs à pile ou face. On s'intéresse au numéro du lancer où apparaît pile pour la première fois, de sorte que $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$

Il y a dans cette expérience une infinité d'éventualités (il se peut même que pile n'apparaisse jamais, auquel cas le caractère étudié vaut $+\infty$). Cet exemple sort du cadre de la leçon puisque Ω y est infini.

Ex7: Tirage aléatoire entre 0 et 1.

La touche random d'une calculatrice peut à priori donner n'importe quel nombre entre 0 et 1 (en réalité cela est inexact car une machine ne peut représenter qu'un nombre fini de nombres et ceux-ci ne peuvent être générés que de façon pseudo-aléatoire). En ce cas, $\Omega = [0, 1]$ est un ensemble infini et même non dénombrable.

Ex8: Aiguille de Buffon.

On trace sur une feuille des droites parallèles séparées d'une distance L . On lance sur cette feuille une aiguille de longueur L et l'on s'intéresse à l'angle formé par l'aiguille et l'une des droites.

Cet angle est aléatoire et peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Là encore, Ω est un ensemble infini non dénombrable.

Ex9: Désintégration d'un atome.

La durée entre deux désintégrations dans un atome radioactif est un phénomène parfaitement aléatoire qui prend ses valeurs dans l'intervalle $\Omega = [0, +\infty[$.

22.1.3 Lien avec la théorie des ensembles

Le point essentiel du cours est le lien entre la description d'une expérience aléatoire et la théorie des ensembles. C'est Kolmogorov dans les années 1930 qui a utilisé cette modélisation des phénomènes aléatoires. Elle permet de décrire en termes ensemblistes les notions d'ensemble univers, d'évènement,

d'éventualité.

DESCRIPTION DE L'EXPÉRIENCE	VOCABULAIRE ENSEMBLISTE
Expérience aléatoire	Ensemble Ω
Eventualité	Elément $\omega \in \Omega$
Evènement	Sous ensemble $A \subset \Omega$
Evènement contraire de A	Complémentaire \bar{A}^Ω
Evènement A et B	$A \cap B$
Evènement A ou B	$A \cup B$
Evènement impossible	\emptyset
Evènement certain	Ω

Evènement de l'expérience \Leftrightarrow sous ensemble de Ω

22.2 Probabilité sur un ensemble

22.2.1 Mesure de probabilité

DÉFINITION 83 (AXIOMES DE KOLMOGOROV)

Une probabilité sur un ensemble Ω est une fonction $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant:

$$A \longmapsto \mathbb{P}(A)$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'évènements de Ω 2 à 2 disjoints, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

$\mathfrak{P}(\Omega)$ représente l'ensemble des parties de Ω . Cet ensemble possède une structure de tribu (cf. annexes).

Une probabilité est donc une collection de nombres positifs dont la somme est 1.

\mathbb{P} est une fonction qui à un ensemble associe un nombre mesurant sa **vraisemblance** ou son **poids**.

Le second axiome, dans le cas de deux évènements **disjoints** A et B , indique que

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ et porte le nom de propriété d'additivité.

La donnée d'une expérience aléatoire modélisée par Ω et d'une probabilité \mathbb{P} sur cet ensemble s'appelle un espace probabilisé et se note (Ω, \mathbb{P}) .

PROPRIÉTÉ 76

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

DÉMO

• Nous pouvons écrire sous la forme d'une réunion disjointe $(A \cup B) = (A/B) \cup (A \Delta B) \cup (B/A)$. On peut donc appliquer la propriété d'additivité et conclure que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A/B) + \mathbb{P}(A \Delta B) + \mathbb{P}(B/A)$.

Mais on a également $A = (A/B) \cup (A \Delta B)$ et $B = (B/A) \cup (A \Delta B)$, donc:

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B) + \mathbb{P}(A \Delta B)$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(A \Delta B)$. Ainsi, $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \Delta B)$ et $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \Delta B)$. En recoupant les trois équations, on obtient l'égalité recherchée.

• Supposons $A \subset B$. Alors $B = A \cup \bar{A}^B$ et cette réunion est disjointe. Donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}^B)$. Puisqu'une probabilité est positive, on en déduit que $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

• On a $\Omega = \Omega \cup \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset)$ et le résultat en découle.

• Là encore, $\Omega = A \cup \bar{A} \Rightarrow 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

□

Ex1: Epreuve de Bernoulli

Considérons deux nombres p et q positifs tels que $p + q = 1$.

Nous définissons une mesure de probabilité en posant $\mathbb{P}(\pi) = p$ et $\mathbb{P}(\phi) = q$.

Cette loi est appelée loi de Bernoulli de paramètre p . Elle représente un tirage à pile ou face dans lequel la probabilité de faire pile est p et celle de faire face est $q = 1 - p$.

Ex3: Loi équiprobable

Soit $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$ un ensemble de n objets. En posant $\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{n}$ on définit une loi appelée loi équiprobable qui représente une expérience équitale dans laquelle toutes les éventualités ont la même probabilité d'apparaître. Cette loi est très importante car elle modélise les expériences équitales. Le lancer d'un pile ou face honnête (avec $p = q = 1/2$) est un cas particulier de loi équiprobable. Le lancer d'un dé à six face normal aussi: on a alors $n = 6$ et toute issue a pour probabilité $1/6$.

Lorsque l'on veut calculer la probabilité d'un événement quelconque avec la loi équiprobable, il suffit de calculer son cardinal. La probabilité de cet événement est alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

que l'on peut également traduire par la formule bien connue

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Ex4: Lancer de deux dés

On s'intéresse à la somme des deux lancers. Les valeurs possibles vont de 2 à 12 et l'on pourrait choisir comme probabilité l'équiprobabilité sur $\{2, \dots, 12\}$. Ce serait une erreur, car on s'aperçoit assez vite qu'un 7 se produit beaucoup plus souvent qu'un 12: Il n'y a pas équiprobabilité dans cet ensemble (c'est d'ailleurs sur cet exemple que le chevalier de Méré a questionné Pascal). En fait, pour pouvoir poser l'équiprobabilité (qui simplifie grandement les calculs), il faut modéliser l'expérience aléatoire sous la forme suivante $\Omega = \{(i, j); i, j = 1..6\}$; Chacun des 36 couples possibles se produit manifestement avec la même probabilité et l'on peut donc choisir l'équiprobabilité sur cet ensemble. L'événement A ="la somme des lancers vaut 7" a alors pour probabilité $\mathbb{P}(A) = 6/36 = 1/6$ tandis que l'événement B ="la somme des lancers vaut 12" a pour probabilité $\mathbb{P}(B) = 1/36$

22.2.2 Probabilité conditionnelle

Considérons une expérience aléatoire sur laquelle a été définie un ensemble univers Ω et une mesure de probabilité \mathbb{P} . Soit B un événement de Ω tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

L'événement A/B s'appelle "A sachant B" et sa probabilité est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé. On pose:

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

A/B représente le résidu d'information sur A contenu dans l'événement B.

La formule ci-dessus s'appelle formule des probabilités conditionnelles. On peut l'exprimer sous la forme suivante qui ne nécessite plus de supposer $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B)$$

La fonction $\mathbb{P}(. / B)$ qui à un événement A associe $\mathbb{P}(A/B)$ est une mesure de probabilité appelée probabilité conditionnelle sachant B. L'ensemble Ω sur lequel elle est définie est B et non plus l'ensemble univers initial de l'expérience.

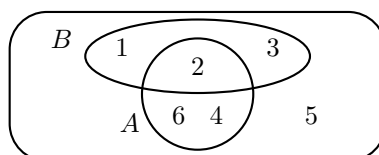


Figure 22.1: Lancer de dés et probabilité conditionnelle

Ex8:

Considérons le lancer d'un dé normal à 6 faces. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

Soit A l'évènement "le résultat est pair" et B l'évènement "le résultat est inférieur ou égal à 3"

La probabilité d'un évènement sachant B définit un nouvel espace de probabilité qui est $\Omega' = \{1, 2, 3\}$

dans lequel la probabilité de A est modifiée en $\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}$

Ex9:

Une famille a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que le 2nd enfant soit un garçon ?

$\Omega = \{ (G, G), (F, F), (F, G), (G, F) \}$ est l'ensemble univers sur lequel nous choisissons l'équiprobabilité.

Soit $A =$ " l'un des enfant est une fille " et $B =$ " l'un des enfant est un garçon ".

$A = \{ (F, G), (G, F), (F, F) \}$ et $B = \{ (G, G), (F, G), (G, F) \}$. Ainsi, $A \cap B = \{ (F, G), (G, F) \}$

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{2}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

On remarquera que $\overline{A/B} = \bar{A}/B$ et qu'il ne faut pas confondre $A \cap B$ et A/B .

PROPRIÉTÉ 77 (FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES)

Soit A_1, A_2, \dots, A_n une partition de Ω et $B \subset \Omega$.

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B/A_i)$$

DÉMO

Ce théorème montre que l'on peut calculer la probabilité d'un évènement en le "découpant" dans les différents ensembles d'une partition et en considérant l'influence de chaque ensemble sur cet évènement.

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n B \cap A_i \text{ d'après les lois de De Morgan.}$$

Pour i variant de 1 à n , les ensembles $B \cap A_i$ sont tous disjoints et l'on a donc:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B/A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

□

PROPRIÉTÉ 78 (FORMULE DE THOMAS BAYES (1702-1761))

Si A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de Ω , alors $\forall B \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B/A_i)}{\mathbb{P}(B)}$$

En utilisant la formule des probabilités totales, cette formule peut aussi s'écrire:

$$\mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B/A_i)}$$

DÉMO

$$\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_i/B) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A_i) \mathbb{P}(A_i)$$

□

La formule de Bayes s'appelle aussi **formule des causes** et peut s'exprimer comme suit:

Supposons connus $\mathbb{P}(B)$ et B dont les causes possibles de réalisation sont A_1, A_2, \dots, A_n .

Supposons connue l'influence de A_1, A_2, \dots, A_n sur la réalisation de B : $\mathbb{P}(B/A_1), \mathbb{P}(B/A_2), \dots, \mathbb{P}(B/A_n)$

Supposons enfin que B se réalise. Alors la formule donne la probabilité que A_i en soit la cause.

On peut voir cette formule comme une sorte de formule d'inversion des probabilités.

Ex10:

Dans un élevage, on effectue un test de dépistage sur une maladie M . Le test n'est pas fiable à 100%.

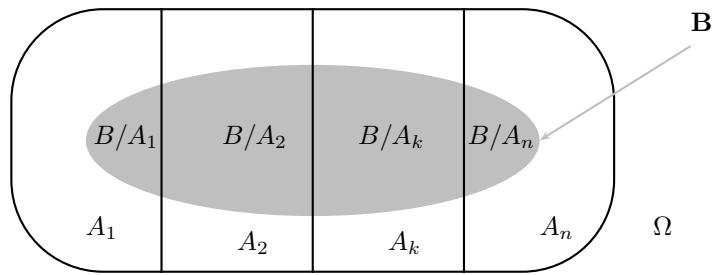


Figure 22.2: Formule de Bayes

Il peut ne pas détecter la maladie ou la détecter à tort (on appelle ces probabilités la spécificité et la sensibilité du test). On cherche la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif (ce qui caractérisera l'efficacité du test).

On donne $\mathbb{P}(M) = 0.3$, $\mathbb{P}(-/\bar{M}) = 0.9$, $\mathbb{P}(+/M) = 0.8$ et l'on cherche $\mathbb{P}(M/+)$.

$$\mathbb{P}(M/+) = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(+/M)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(+/M) + \mathbb{P}(\bar{M})\mathbb{P}(+/M)} = \frac{0.3 \times 0.8}{0.24 + 0.7 \times 0.1} = 0.77$$

Ex:10

On considère un appareil électronique possédant trois organes A , B , C indispensables à son fonctionnement. L'appareil tombe en panne. On cherche l'organe responsable de la panne. On note P l'évènement "l'appareil tombe panne" et l'on donne $\mathbb{P}(P/A) = 0.1$, $\mathbb{P}(P/B) = 0.1$ et $\mathbb{P}(P/C) = 0.2$. En notant I l'évènement "l'organe I tombe en panne", on sait par ailleurs que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 0.1$.

$$\text{D'après la formule de Bayes, } \mathbb{P}(A/P) = \frac{\mathbb{P}(P/A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(P/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(P/B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(P/C)\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{De même, } \mathbb{P}(B/P) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbb{P}(C/P) = \frac{1}{2}$$

Le plus probable est donc que la panne provienne de C (on pouvait s'en douter).

PROPRIÉTÉ 79 (FORMULE DE LA MULTIPLICATION)

|| Pour une famille d'évènements A_1, A_2, \dots, A_n :
 || $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

DÉMO

Il s'agit d'une application directe de la formule des probabilités conditionnelles.

□

Ex: 11

Une urne contient 3 boules rouges et 1 boule verte. On tire successivement et sans remise une boule dans l'urne. On cherche la probabilité de tirer trois boules rouges lors des trois premiers tirages. Nous noterons évidemment R_i l'évènement "on a tiré une boule rouge" au tirage n° i et V_i l'évènement "on a tiré une boule verte" au tirage numéro i . On a:

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2/R_1)\mathbb{P}(R_3/R_1 \cap R_2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

22.2.3 Indépendance stochastique

DÉFINITION 84

|| On dit que deux évènements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

En ce cas, $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$. Autrement dit, la connaissance de l'un n'influe pas sur l'autre.

Ex12:

On lance deux dés (un vert et un rouge, comme d'habitude). On note A l'évènement "le dé vert fait six" et B l'évènement "le dé rouge donne un résultat pair". On modélise l'expérience par l'ensemble des 36 couples de résultats possibles, qui sont équiprobables. On a alors:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \mathbb{P}(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Par suite $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ et les événements sont bien indépendants.

On peut généraliser à plusieurs événements:

DÉFINITION 85

Soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$
 Des événements A_1, A_2, \dots, A_n sont indépendants dans leur ensemble
 (ou mutuellement indépendants) si $\forall J \subset I$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Par exemple, pour 3 événements, A, B, C indépendants \Leftrightarrow

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) & (1) \\ \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) & (2) \\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) & (3) \\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) & (4) \end{cases}$$

En particulier, la condition (1) ne suffit pas à prouver l'indépendance. L'indépendance deux à deux n'est pas non plus suffisante pour démontrer l'indépendance mutuelle.

Ex2: Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{1, 2, 4, 5\}$

Les événements A, B, C ne sont pas indépendants car $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$
 et pourtant la condition (1) est vérifiée. Qu'en est-il de l'indépendance de A et B , de A et C , de B et C
 et de A, B, C ?

 **ATTENTION**

Disjoints et indépendants sont deux notions différentes:

Dans l'exemple 9, M et \bar{M} sont disjoints sans être indépendants.

De même, des événements peuvent être indépendants sans être disjoints: $\mathbb{P}(\Omega \cap A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\Omega)$

Vous pouvez également comparer ces deux notions sur l'exemple précédent.

PROPRIÉTÉ 80

Soient A et B deux événements indépendants. Alors les événements suivants sont indépendants:

- \bar{A} et \bar{B} .
- A et \bar{B} .
- \bar{A} et B .

DÉMO


Montrons par exemple la première assertion:

$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ par indépendance de A et B .

Par ailleurs, $\mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B}) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B))$.

En développant cette dernière expression, on retrouve l'égalité du dessus.

□

 Il faut faire attention à la notion d'indépendance. Même si celle-ci correspond à une absence d'influence entre la réalisation de deux événements, il ne faut pas se contenter de cette notion vague. Seul le calcul permet de démontrer l'indépendance. Par exemple, on peut construire des espaces probabilisés dans lesquels un événement est indépendant de lui-même !

Serfois-moi, seuls ceux qui n'attendent
rien du hasard maîtrisent leur
destin. (M. Arnold)

Chapitre 23

Variables aléatoires discrètes

23.1 Loi d'une variable discrète

23.1.1 Introduction et définition

Ex0: Le jeu de pile ou face.

Considérons un lancer à pile ou face dans lequel le joueur gagne 1 si pile apparaît et 0 sinon. Soit X le gain du joueur après une partie. X peut prendre deux valeurs 0 ou 1, mais on ne peut prédire laquelle avant le lancer. La valeur de X dépend du hasard, on dit qu'il s'agit d'une variable aléatoire.

On note $[X = 0]$ l'évènement "la pièce est tombée sur face."

On note $[X = 1]$ l'évènement "la pièce est tombée sur pile."

La loi de X est la donnée des probabilités des deux évènements ci-dessus ($\frac{1}{2}$ si la pièce est normale).

Ex1: L'épreuve de Bernoulli.

Il s'agit d'une généralisation du lancer à pile ou face:

On considère que la variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0 ou 1 avec probabilité $p \in [0, 1]$ et $q = 1 - p$.

Pour indiquer que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , nous noterons $X \sim b(p)$.

Ex2: La loi équiprobable.

Considérons le lancer d'un dé ordinaire et notons X le numéro de la face supérieure.

X peut prendre comme valeur 1,2,3,4,5 ou 6 de façon équiprobable (si le dé est normal).

La loi de X est donnée par le tableau ci-dessous:

k	1	2	3	4	5	6
$P[X = k]$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Ex3: Loi géométrique.

On effectue une série de lancers à pile ou face indépendants modélisés par des épreuves de Bernoulli de paramètre p et l'on s'arrête lorsque le premier pile apparaît. Soit X le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir ce premier pile. X est une variable aléatoire discrète mais pouvant prendre une infinité de valeurs (1, 2, ... et éventuellement $+\infty$).

Sa loi est la donnée de $P[X = k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

L'évènement $[X = k]$ se lit "le premier pile apparaît au k ème lancer", ce que nous pourrions aussi écrire $(\underbrace{\phi, \phi, \dots, \phi}_{k-1 \times}, \pi, \dots)$

Par indépendance des lancers, on a donc $\mathbb{P}[X = k] = q^{k-1}p$ avec $k \geq 1$ et $q = 1 - p$

Nous devons encore vérifier que cette formule définit bien une probabilité. Nous avons vu dans la leçon précédente qu'une loi de probabilité est une collection de nombres positifs dont la somme est 1. Nous avons clairement $0 \leq q^{k-1}p \leq 1$ et par ailleurs

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = p \times \frac{1}{1-q} = 1$$

Pour indiquer que X une loi géométrique de paramètre p , nous noterons $X \sim \mathcal{G}(p)$.

DÉFINITION 86

On considère une expérience aléatoire sur un espace Ω .

Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction mesurable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\omega \longmapsto X(\omega)$

qui à une éventualité ω associe le réel $X(\omega)$.

On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X .

A chaque résultat de l'expérience aléatoire la fonction X associe un nombre.

Pour un réel $k \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(k)$ est l'image réciproque (l'antécédent) de k par X . Nous la noterons également

$$[X = k] = X^{-1}(k) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = k\} = \text{“}X \text{ a pris la valeur } k\text{”}$$

De même, si $[a, b]$ est un intervalle de \mathbb{R} , nous noterons son image réciproque $X^{-1}([a, b])$ sous la forme:

$$\begin{aligned} [a \leq X \leq b] &= X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega / a \leq X(\omega) \leq b\} \\ &= \text{“}X \text{ a pris une valeur comprise entre } a \text{ et } b\text{”}. \end{aligned}$$

De façon générale, si $A \subset \mathbb{R}$, l'évènement $[X \in A] \subset \Omega$ signifie

$$\begin{aligned} [X \in A] &= X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\} \\ &= \text{“}X \text{ a pris une valeur dans } A\text{.”} \end{aligned}$$

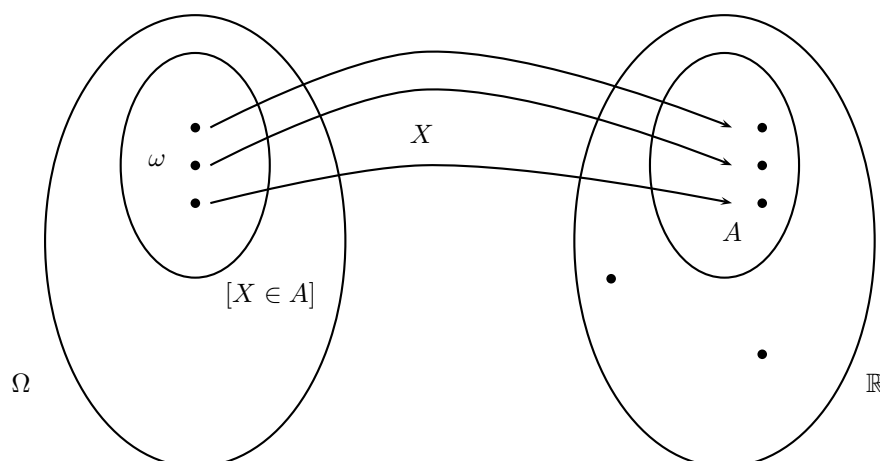


Figure 23.1: Variable aléatoire.

Nous dirons qu'une fonction X est mesurable si $X^{-1}(k) \in \mathcal{P}(\Omega) \forall k$, c'est à dire si l'ensemble $[X = k]$ est un évènement de Ω . Dans le cas d'une probabilité finie ou dénombrable, cette condition sera toujours vérifiée et nous n'aurons donc pas à nous préoccuper de cette notion de mesurabilité et, pour nous, une VA sera simplement une fonction de Ω dans \mathbb{R} (pour plus de précisions, on pourra consulter le cours de licence / master sur l'intégrale de Lebesgue).

Ex1: Loi de Bernoulli.

Le jeu a deux issues possibles: pile ou face que nous noterons π et ϕ .

On a donc $\Omega = \{\pi, \phi\}$ et $X(\Omega) = \{0, 1\}$

X est définie par $X(\pi) = 1$ et $X(\phi) = 0$

Ex4: Lancer de deux dés.

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer simultanément deux dés discernables (un bleu et un vert) et à noter le n° du bleu puis celui du vert. Une issue de l'expérience est donc un couple d'entiers compris entre 1 et 6. Ainsi $\Omega = \{(i, j) / i, j = 1, 2, \dots, 6\}$ est l'ensemble des 36 couples possibles et l'on peut poser l'équiprobabilité sur cet ensemble.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des 2 dés. On a $X(i, j) = i + j$

X est donc définie par
$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega = (i, j) &\longmapsto X(\omega) = i + j \end{aligned}$$

$X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$ et l'on a, par exemple,

$[X = 4] = \text{“la somme des numéros vaut 4”} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ ou

$[10 \leq X \leq 11] = \text{“la somme des numéros est comprise entre 10 et 11”} = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5)\}$

La loi de X est la donnée du tableau ci-dessous:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[X = k]$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Nous pourrions également définir la variable aléatoire S égale au maximum des deux lancers. De la même façon que ci-dessus, la loi de cette variable serait donnée par le tableau ci-dessous:

k	1	2	3	4	5	6
$P[X = k]$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Enfin, on pourrait définir des variables aléatoires comme le produit ou le quotient des deux lancers, l'inverse du premier lancer, le sinus du second, etc.

Nous retiendrons des exemples précédents le fait que:

La loi d'une variable aléatoire discrète est la donnée de $\mathbb{P}[X = k]$ pour $k \in X(\Omega)$

C'est la définition que nous prendrons de la loi d'une VA; on peut la définir de façon plus rigoureuse:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}[X \in A] \end{aligned}$$

Nous avons en fait “transporté” sur \mathbb{R} la probabilité \mathbb{P} initialement définie sur Ω .

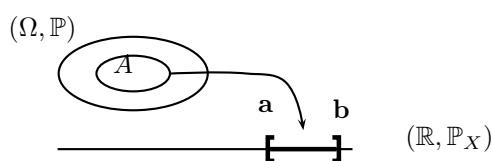


Figure 23.2: Loi d'une variable aléatoire

23.1.2 Caractéristique d'une loi

Espérance (ou valeur moyenne)

DÉFINITION 87

Soit X une variable aléatoire sur Ω . On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

L'espérance de X est le réel noté $\mathbb{E}[X]$ et défini par $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n x_k \times \mathbb{P}[X = x_k]$

$\mathbb{E}[X]$ représente la valeur moyenne de la variable aléatoire pondérée par les probas.

Ex0: Pile ou face équitale.

$\mathbb{E}[X] = 0 \times \mathbb{P}[X = 0] + 1 \times \mathbb{P}[X = 1] = 1/2$ qui représente le gain moyen après un tirage.

Ex1: Loi de Bernoulli de paramètre p .

$\mathbb{E}[X] = 0 \times \mathbb{P}[X = 0] + 1 \times \mathbb{P}[X = 1] = p$

Ex2: Lancer d'un dé normal à six faces.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^6 k \times \mathbb{P}[X = k] = 1 \times \mathbb{P}[X = 1] + \dots + 6 \times \mathbb{P}[X = 6] = 7/2$$

Rappelons au passage que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

PROPRIÉTÉ 81

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω , soit $\lambda \in \mathbb{R}$
 Alors $X + Y$ et λX sont des variables aléatoires et l'on a :

- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[\lambda] = \lambda$

DÉMO

La linéarité de l'espérance est une conséquence immédiate de la linéarité de la somme.

Par ailleurs, $\mathbb{E}[\lambda] = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda \mathbb{P}[X = \omega] = \lambda \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}[X = \omega] = \lambda \times 1 = \lambda$

□

Moments, variance et écart type.

Nous commencerons par un théorème très important qui permet de déterminer la loi de la variable aléatoire $f(X)$ pour n'importe quelle fonction (mesurable) f .

THÉORÈME 76 (THÉORÈME DE TRANSFERT)

Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathbb{P})
 Soit f une fonction mesurable.

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{k=1}^n f(x_k) \mathbb{P}[X = x_k]$$

En particulier, si $f(x) = x^k$, $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[X^k]$ s'appelle le moment d'ordre k de la variable aléatoire.

Si $k = 1$, le moment d'ordre 1 n'est rien d'autre que l'espérance.

Si $k = 2$, $\mathbb{E}[X^2]$ est le moment d'ordre 2:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^n x_k^2 \times P[X = x_k]$$

Cette quantité va nous servir à calculer la variance à l'aide d'une formule plus utile.

DÉFINITION 88

$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
 $\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$

La variance $\text{var}(X)$ est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne et caractérise la dispersion de la variable aléatoire. L'écart type $\sigma(X)$ mesure le même phénomène mais avec une valeur homogène aux quantités de départ ($\text{var}(X)$ et $\sigma(X)$ sont toujours ≥ 0).

PROPRIÉTÉ 82

$\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

DÉMO

$\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$ En effet, $\mathbb{E}[X]$ est un nombre réel et son espérance est donc égal à lui-même. On en déduit la formule.

□

Soient X et Y deux variables aléatoires et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

- $\text{var}(X + \lambda) = \text{var}(X)$
- $\text{var}(\lambda X) = \lambda^2 \times \text{var}(X)$
- $\text{var}(X) \geq 0$
- $\text{var}(\lambda) = 0$
- X et Y indépendants $\Rightarrow \text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$

Les propriétés de l'écart type découlent du fait qu'il s'agit de la racine carrée de la variance.

DÉMO

- $\text{var}(X + \lambda) = \mathbb{E}[(X + \lambda)^2] - \mathbb{E}[(X + \lambda)]^2 = \mathbb{E}[X^2] + 2\lambda\mathbb{E}[X] + \lambda^2 - \mathbb{E}[X]^2 - 2\lambda\mathbb{E}[X] - \lambda^2 = \text{var}(X)$
- $\text{var}(\lambda X) = \mathbb{E}[(\lambda X)^2] - \mathbb{E}[\lambda X]^2 = \lambda^2(\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2) = \lambda^2\text{var}(X)$
- $\text{var}(\lambda) = \mathbb{E}[\lambda^2] - \mathbb{E}[\lambda]^2 = \lambda^2 - \lambda^2 = 0$
- $\text{var}(X + Y) = \mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}[X + Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] + 2\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Mais si X et Y sont indépendants, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \Rightarrow \text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$

□

Ex1: Loi de Bernoulli de paramètre p . $\mathbb{E}[X^2] = p \Rightarrow \text{var}(X) = p - p^2 = p(1 - p) = pq$ et $\sigma(X) = \sqrt{pq}$

Ex2: Lancer d'un dé.

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^6 k^2/6 = 6 \times 7 \times 13/36 = 91/6 \Rightarrow \text{var}(X) = 91/6 - (7/2)^2 = 35/12$$

Fonction de répartition

DÉFINITION 89

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble Ω .

On note F la fonction de répartition de X . Elle est définie par:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \end{aligned}$$

Notons x_1, x_2, \dots, x_k les valeurs possibles de X et p_1, p_2, \dots, p_k leur proba respective.

Si les x_k sont rangés par ordre croissant, $X \leq x_k \iff X = x_1 \text{ ou } X = x_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } X = x_k$

de sorte que $[X \leq x_k] = [X = x_1] \cup [X = x_2] \cup \dots \cup [X = x_k]$ et donc

$$F(x_i) = \mathbb{P}[X \leq x_i] = p_1 + p_2 + \dots + p_i$$

Ex1: Loi de Bernoulli

X ne peut prendre que deux valeurs 0 et 1. X ne peut donc être négatif donc $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$

De même, X est forcément plus petit que 1 donc $F(x) = 1$ si $x \geq 1$

Enfin, si $0 \leq x < 1$, la seule valeur que peut prendre X est 0 donc $F(x) = \mathbb{P}[X = 0] = q$

F est donc une fonction en escalier à trois paliers.

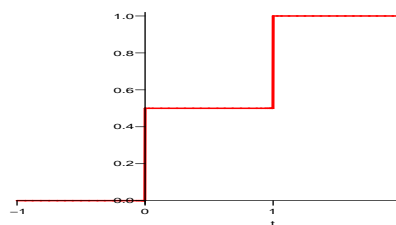


Figure 23.3: Fonction de répartition d'une loi de Bernoulli

Ex2: Lancer d'un dé à six faces

De même que dans l'exemple précédent, $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$.

$$F(x) = 0 \text{ si } x < 1, F(x) = 1/6 \text{ si } x \in [1, 2[, F(x) = 2/6 \text{ si } x \in [2, 3[, \dots, F(x) = 5/6 \text{ si } x \in [5, 6[$$

là encore, il s'agit d'une fonction en escalier avec sept paliers.

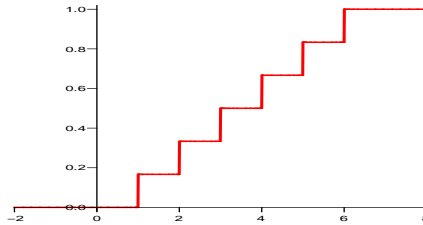


Figure 23.4: Fonction de répartition d'une loi équiprobable

PROPRIÉTÉ 84

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X :

- F est croissante sur \mathbb{R}
- F est continue à droite
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

DÉMO

- Il s'agit de montrer que si $x < y$ alors $F(x) < F(y)$

Si $X \leq x$ alors $X \leq y$ donc $[X \leq x] \in [X \leq y]$ d'après les propriétés des probabilités.

Puisque $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$ et $F(y) = \mathbb{P}[X \leq y]$ on a bien $F(x) < F(y)$ et F est croissante.

- $\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[X \leq x+h] = \mathbb{P}[X \leq x]$ d'où la continuité à droite

- On se limite au cas où la variable ne prend qu'un nombre fini de valeurs x_1, x_2, \dots, x_n

Si $x < x_1$, alors $[X \leq x] = \emptyset$

Si $x \geq x_n$, alors $[X \leq x] = \Omega$

Donc, lorsque x tend vers $-\infty$, $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$ tend vers $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Lorsque x tend vers $+\infty$ $F(x)$ tend vers $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

□

PROPRIÉTÉ 85 (PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE)

$$\mathbb{P}[X = k] = \lim_{x \rightarrow k^+} F(x) - \lim_{x \rightarrow k^-} F(x)$$

Autrement dit, les points de discontinuité k de la fonction de répartition sont ceux où la probabilité de X est non nulle et cette proba est égale à la "hauteur" du palier.

DÉMO

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}[X \leq k] - \mathbb{P}[X \leq k-1] = \lim_{x \rightarrow k^+} F(x) - \lim_{x \rightarrow k^-} F(x)$$

□

23.2 Loi binomiale et loi de Poisson

23.2.1 Loi binomiale

Considérons n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n de même loi de Bernoulli de paramètre p . Cela revient à considérer n lancers à pile ou face indépendants les uns des autres pour lesquels la probabilité de faire pile est p (et celle de faire face est $q = 1 - p$).

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus au cours de ces n tirages.

X est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $0, 1, 2, \dots, n$ et l'on voit que

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

L'évènement $[X = k]$ se lit "au cours des n expériences, on a obtenu k fois pile". Cherchons sa loi de probabilité:

La probabilité d'obtenir pile au cours d'un lancer est p .

Celle d'obtenir k fois pile est donc p^k par indépendance des lancers (cf. cours de l'anne passée).

Si pile est apparu k fois, alors face est apparu $n - k$ fois ce qui se produit avec une probabilité $(1 - p)^{n-k}$

Maintenant, les k piles peuvent être placés de C_n^k façons différentes (place de k objets parmi n).
On obtient ainsi le résultat suivant:

DÉFINITION 90

On appelle variable aléatoire binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$,
une variable aléatoire X dont la loi est:
 $\mathbb{P}[X = k] = C_n^k p^k q^{n-k}$ si $k = 0, 1, \dots, n$
 $\mathbb{P}[X = k] = 0$ sinon
 Nous noterons $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

On a donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Ex5: Loi binomiale $p = 1/2$ et $n = 4$

$\mathbb{P}[X = 1] = C_4^1 (1/2)(1/2)^3 = 1/8$ et $\mathbb{P}[X = 4] = C_4^4 (1/2)^4 = 1/16$

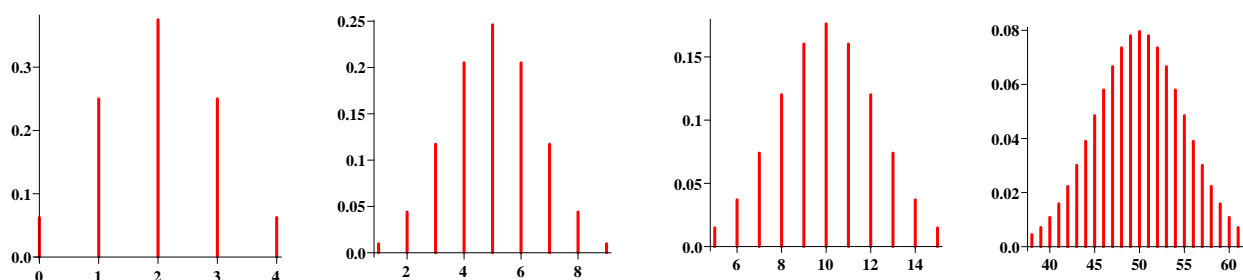


Figure 23.5: Distributions binomiales avec $p = 0.5$ et $n = 4, 10, 20$ et 100 .

⚠ Remarque importante:

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ est égal au nombre de succès au cours de n tirages à pile ou face indépendants avec probabilité de succès p à chaque tirage.

PROPRIÉTÉ 86

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $q = 1 - p$

- $\mathbb{E}[X] = np$
- $\text{var}(X) = npq$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

DÉMO

- Si X est une VA binomiale alors on peut écrire $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$
où les X_k sont des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p .
Par linéarité de l'espérance on a donc:
 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = np$
 - de même, par indépendance de ces variables, on a aussi:
 $\text{var}(X) = \text{var}(X_1) + \dots + \text{var}(X_n) = npq$
-

23.2.2 La loi de Poisson

DÉFINITION 91

On appelle variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ une variable X telle que:
 $\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$
 $\mathbb{P}[X = k] = 0$ sinon

Cette loi est (très) utilisée pour modéliser les phénomènes de files d'attente ou le nombre d'apparitions d'un phénomène dans un laps de temps donné (λ représente alors la fréquence du phénomène).

Par exemple, le nombre d'appels reçus dans un central ou le nombre d'utilisateurs dans un réseau durant une période de l'année. Il s'agit d'une loi discrète, mais contrairement aux précédentes, elle peut prendre une infinité de valeurs puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$

PROPRIÉTÉ 87

|| Si X suit une loi de Poisson alors $\mathbb{E}[X] = \text{var}(X) = \lambda$

DÉMO

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 0} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k \geq 2} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$$

Ainsi, $\mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = \lambda^2 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda \square$

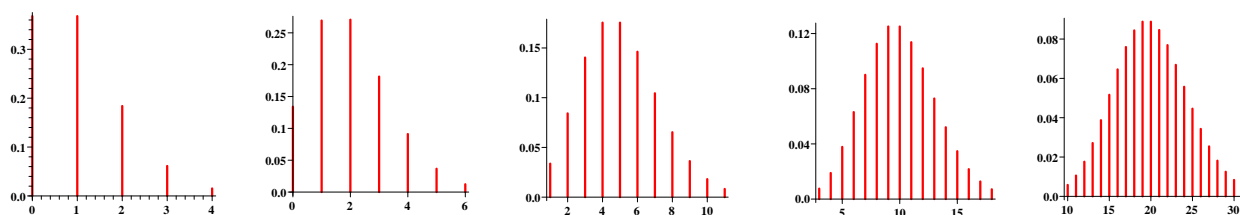


Figure 23.6: Distributions de Poisson avec $\lambda = 1, 2, 5, 10$ et 20 .

Nous admettons le fait que la loi de Poisson est la seule loi discrète dont l'espérance est égale à la variance.

Ex6:

Le nombre de personnes X faisant la queue à une caisse de supermarché à un instant donné est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 4$.

On a $\mathbb{P}[X = 1] = e^{-4} \times 4^1/1! \approx 0,07$

23.2.3 Approximation entre lois discrètes

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,04$.

Soit Y une variable suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

Comparons leurs probabilités respectives pour quelques valeurs de k :

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[X = k]$	0,13	0,271	0,276	0,184	0,090	0,0035
$\mathbb{P}[Y = k]$	0,135	0,271	0,271	0,18	0,09	0,0036

Le tableau montre que ces lois sont très voisines (cf. figure).

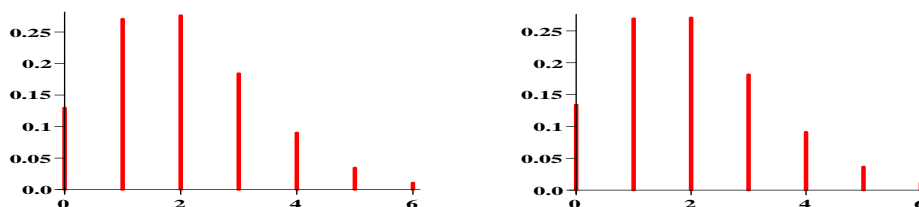


Figure 23.7: Distributions binomiale $n = 50$, $p = 0.04$ et poissonnienne $\lambda = 2$

Pour de grandes valeurs de n , le calcul des coefs binomiaux est complexe et coûteux en temps de calcul et il peut être avantageux d'approcher la loi binomiale par une loi de Poisson plus facile à implémenter.

La loi de Poisson a d'ailleurs été découverte comme approximation de la binomiale lorsque n est grand et p est petit devant n . Le théorème précisant cette approximation s'appelle la loi des événements rares.

THÉORÈME 77 (LOI DES ÉVÈNEMENTS RARES)

Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres de $]0, 1[$
 Soit S_n une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$
 Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[S_n = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

DÉMO

$$\mathbb{P}[S_n = k] = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{(np)^k}{n^k} q^{-k} q^n \sim \frac{\lambda^k}{k!} q^n$$

$$\text{avec } \ln(q^n) = n \ln(1-p) \sim n \frac{-p}{1} = -\lambda \Rightarrow \mathbb{P}[S_n = k] \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

□

Une autre démonstration sera effectuée en TD.

On peut même préciser la vitesse de convergence vers la loi de Poisson grâce à l'inégalité suivante (admise):

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}[S_n = k] - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}| \leq \frac{2\lambda}{n} \min(2, \lambda)$$

Dans la pratique, on appliquera ce théorème pour p petit et n grand. On retiendra donc le théorème d'approximation suivant:

THÉORÈME 78

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p
 Soit Y une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$
 Si $n \geq 50$ et $np \leq 5$ alors on peut approcher la loi de X par celle de Y , ie:
 $\mathbb{P}[X = k] \approx \mathbb{P}[Y = k] \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

Les probabilités de la loi de Poisson sont données par des tables pour différentes valeurs de λ .

23.3 Lois conjointes

23.3.1 Vecteur aléatoire, loi conjointe et loi marginale

On souhaite examiner simultanément deux aspects d'une même expérience aléatoire. On définit un vecteur aléatoire comme un couple de variables aléatoires sur un même espace de probabilité Ω

DÉFINITION 92

Soient X et Y deux v.a. réelles sur un espace de probabilité Ω
 On suppose que $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_i, i \in \mathbb{N}\}$ et l'on pose $Z = (X, Y)$
 Z est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 dont la loi est appelée loi conjointe de X et Y
 Les lois des coordonnées X et Y s'appellent lois marginales de Z

La loi conjointe est caractérisée par la donnée de $\mathbb{P}[X = x_k, Y = y_i] = \mathbb{P}([X = x_k] \cap [Y = y_i]) \quad \forall k, i \in \mathbb{N}$

de telle sorte que $\sum_{k \geq 0} \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[X = x_k, Y = y_i] = 1$

Si Ω est fini, X et Y prennent un nombre fini de valeurs et la loi peut être donnée par un tableau à deux dimensions.

Les lois marginales s'obtiennent grâce à la formule des probabilités totales.

Ex: $\Omega = \{0, 1\}$

$X \setminus Y$	0	1	TOT
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
TOT	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

On a ainsi $\mathbb{P}[X = 0, Y = 1] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}[X = 1, Y = 1] = \frac{1}{4}$.

Les lois marginales en X et Y sont données par la dernière ligne et la dernière colonne.

On a $\mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}[Y = 1] = \frac{3}{4}$.

Ex2: Sur $\Omega = \mathbb{N}$ on pose $\mathbb{P}[X = k, Y = i] = \frac{1}{e^2} \frac{1}{i!k!}$

Cette formule définit bien une loi de probabilité car $\sum_{k \geq 0} \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[X = k, Y = i] = \frac{1}{e^2} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \right) \left(\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \right) = 1$

La loi marginale en X est donnée par $\mathbb{P}[X = k] = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{e^2 k! i!} = \frac{1}{e \times k!}$ (loi de Poisson)

23.3.2 Covariance

DÉFINITION 93

La covariance de deux variables aléatoires (X, Y) est le réel

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

avec $\mathbb{E}[XY] = \sum_{i, k \geq 0} x_k x_i \mathbb{P}[X = k, Y = i]$

la covariance est un terme qui mesure la dépendance, la corrélation entre les deux variables.

Ex1: $\text{cov}(X, Y) = -\frac{1}{8}$

PROPRIÉTÉ 88

Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable

- $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$
- $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$

DÉFINITION 94 (RAPPELS SUR L'INDÉPENDANCE)

Deux évènements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Deux variables aléatoires sont indépendantes si $\mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}[X \in A] \times \mathbb{P}[Y \in B] \quad \forall A, B \subset \mathbb{R}$

Lorsque deux évènements sont indépendants, la réalisation de l'un n'influe pas sur l'autre.

PROPRIÉTÉ 89

X et Y stochastiquement indépendants $\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y]$ et $\text{cov}(X, Y) = 0$

La réciproque est fausse

DÉMO

$\mathbb{E}[XY] = \sum_{i, k \geq 0} x_k x_i \mathbb{P}([X = x_k, Y = x_i]) = \sum_{i, k} x_k x_i \mathbb{P}[X = x_k] \times \mathbb{P}[Y = x_i]$ par indépendance

$= \sum_{k \geq 0} x_k \mathbb{P}[X = x_k] \sum_{i \geq 0} x_i \mathbb{P}[Y = x_i] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$

□

Chapitre 24

Variables aléatoires continues

24.1 Densité d'une loi continue

24.1.1 Introduction

La touche rand d'une calculatrice ou la commande random de Matlab permettent d'obtenir un nombre aléatoire X compris entre 0 et 1. En principe, n'importe quelle valeur de $[0, 1]$ a, à priori, même probabilité d'apparaître (en pratique un ordinateur ne peut représenter qu'un nombre fini de nombres qui ne sont même pas réellement aléatoires. Nous reviendrons plus tard là-dessus). Puisque $[0, 1]$ contient une infinité non dénombrable de réels, X n'est pas discrète. On dit qu'il s'agit d'une variable aléatoire continue dont la loi sera caractérisée non plus par un tableau mais par une fonction appelée densité.

De la même façon, si l'on observe les désintégrations dans un atome radioactif, la durée entre deux désintégrations successives est aléatoire et prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty[$. Elle se représente également à l'aide d'une variable aléatoire continue (dont la loi est exponentielle).

Si l'on choisit au hasard une personne dans une population donnée et que l'on note X sa taille en cm, on obtient une variable aléatoire continue puisqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle, par exemple $[150, 200]$, avec une plus forte probabilité de se trouver aux alentours de 167. Les statistiques montrent que X suit une loi normale dont la densité est une fonction gaussienne que nous étudierons.

24.1.2 Définition

DÉFINITION 95

Une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est la densité de probabilité d'une loi continue si elle vérifie:

- $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- f est intégrable.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Le support de la fonction de densité est l'ensemble des x pour lesquels $f(x) \neq 0$

Ex1: Loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \times \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(x)$$

Cette loi modélise le tirage d'un nombre compris entre α et β , tous les nombres ayant même probabilité d'apparaître. Le support de la fonction est l'intervalle $[\alpha, \beta]$

Ex2: Loi exponentielle

On dit que X est une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ notée $\mathcal{E}(\lambda)$ si sa densité est

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$$

Cette loi est à support dans \mathbb{R}_+ . Elle modélise par exemple la durée entre deux appels successifs dans un central téléphonique ou bien la durée entre deux désintégrations dans un atome.

Ex3: Loi de Laplace

X suit une loi de Laplace si sa densité est $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$
 Il s'agit d'une loi définie sur \mathbb{R} tout entier.

Ex4: Loi de Cauchy

Sa densité est $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ et son support est donc aussi \mathbb{R}

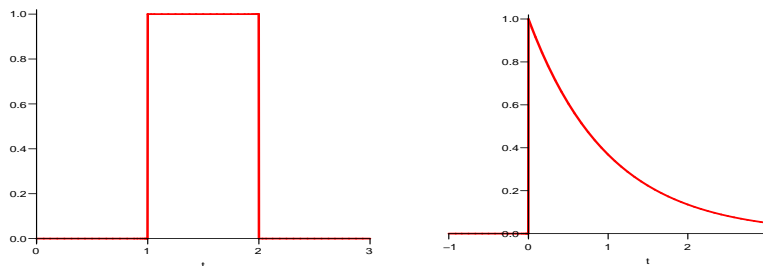


Figure 24.1: Densité uniforme et exponentielle

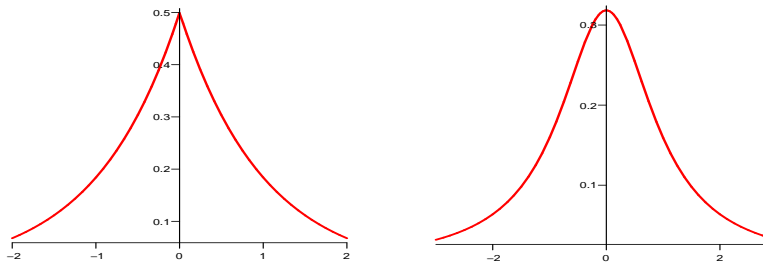


Figure 24.2: Densité de Laplace et de Cauchy

Ex5: Loi triangulaire

C'est une loi définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ de densité $f(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$
 A titre d'exercice, démontrer que cette loi définit bien une densité de probabilité.

REMARQUE 20

Pour qu'une fonction positive et continue par morceaux soit une densité de probabilité, il est nécessaire qu'elle soit intégrable sur \mathbb{R} (ce qui arrive, par exemple, lorsqu'elle est nulle à l'extérieur d'un intervalle donné). Si l'intégrale ne converge pas, on peut tout de même construire une loi de probabilité avec la fonction en la tronquant à un intervalle donné sur lequel son intégrale vaut 1.

PROPRIÉTÉ 90

Soit X une variable aléatoire de densité f et soient a et b deux réels avec $a < b$
 On pose $\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$
 La probabilité est égale à l'aire comprise sous la courbe entre les droites $x = a$ et $x = b$

Ainsi, on aura $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{P}[X \leq \alpha] = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$

En posant $a = b$ dans l'intégrale on en déduit le résultat paradoxal suivant:

Si X est une loi continue de densité f , alors $\mathbb{P}[X = \alpha] = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Ex1: Loi uniforme

Soit X suivant une loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$. Calculons la probabilité que $X \in [0, \beta]$

$$\mathbb{P}[0 < X < \beta] = \int_0^{\beta} f(x)dx = \frac{\beta}{\beta - \alpha}$$

Ex2: Loi de Cauchy

Soit X suivant une loi de Cauchy. Calculons $I = \mathbb{P}[X > 1]$ et $J = \mathbb{P}[-1 < X < 1]$

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} [\arctan(x)]_1^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$J = \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2}{\pi} [\arctan(x)]_{-1}^1 = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

On peut aussi écrire $J = 1 - \mathbb{P}[X > 1] - \mathbb{P}[X < -1] = 1 - 2\mathbb{P}[X > 1] = \frac{1}{2}$

24.1.3 Sommes de deux variables continues**THÉORÈME 79**

Soient X et Y deux variables aléatoires continues et indépendantes de densité f et g

Soit $Z = X + Y$

La densité h de Z est la convolée de f et g : $h(s) = f * g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-x)g(x)dx$

Rappels sur le produit de convolution

On pourra se reporter à la fin du chapitre sur les transformées de Fourier pour les propriétés du produit de convolution. Rappelons simplement que:

- Si f et g sont des densités, alors $f * g$ existe et est aussi une densité de probabilité
- Le produit de convolution est linéaire en f et en g , commutatif et associatif
- $f * g$ représente un mélange entre f et g , plus régulière que f et g et correspondant à une sorte de filtrage entre les deux fonctions.

Ex:

Soient X et Y deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ et soit $Z = X + Y$

La densité de Z est la fonction h définie par

$$\begin{aligned} h(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(s-x)} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(s-x) \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)dx \\ &= \lambda^2 \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(s) \int_0^s e^{-\lambda s} ds = \lambda^2 s e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(s) \end{aligned}$$

24.2 Caractéristiques d'une loi continue**24.2.1 Espérance et variance**

Les formules et propriétés ci dessous sont les mêmes que pour des variables discrètes mais en remplaçant les sommes par des intégrales

DÉFINITION 96

Si X est une loi de densité f

- $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$
- $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$
- $\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)dx$

Ex1: Loi uniforme sur $[\alpha, \beta]$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta - \alpha} (\beta^3 - \alpha^3) = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3} \Rightarrow \text{var}(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Ex2: Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Par une double intégration par parties, on obtient $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$ et donc $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Ex3: Loi de Cauchy

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \text{ mais cette fonction n'est pas intégrable: } \mathbb{E}[X] \text{ et } \text{var}(X) \text{ n'existent pas}$$

24.2.2 Fonction de répartition

DÉFINITION 97

La fonction de répartition d'une variable continue X de densité f est la fonction F définie par:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ s &\longmapsto F(s) = \mathbb{P}[X \leq s] = \int_{-\infty}^s f(x) dx \end{aligned}$$

Dans le cas d'une variable continue, $\mathbb{P}[X \leq s] = \mathbb{P}[X < s]$

Les propriétés sont les mêmes que pour une variable discrète. En outre,

PROPRIÉTÉ 91

- F est une fonction dérivable et $F' = f$
- F est croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$
- $\mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Cette dernière propriété est la plus importante car elle va seule permettre le calcul de probabilités d'événements.

Ex1: Loi uniforme

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\alpha}^s \frac{dx}{\beta - \alpha} = \frac{s - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ si } \alpha < s < \beta$$

$$F(s) = 0 \text{ si } s < \alpha$$

$$F(s) = 1 \text{ si } s > \beta$$

Ex2: Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

$$F(s) = \int_{-\infty}^s \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda s} \text{ si } s > 0 \text{ et } F(s) = 0 \text{ si } s < 0$$

Ex4: Loi de Cauchy

$$F(s) = \int_{-\infty}^s \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}(\arctan s + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}\arctan s + \frac{1}{2}$$

Ex5: Loi de Laplace

$$F(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{e^s}{2} \text{ si } s < 0$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^s \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2}(2 - e^{-s}) \text{ si } s > 0$$

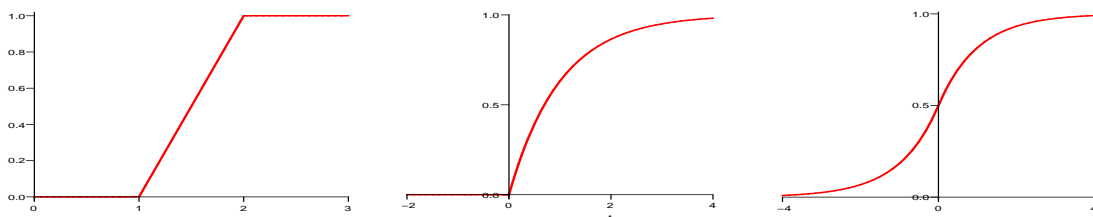


Figure 24.3: Fonctions de répartition: loi uniforme, exponentielle et de Laplace.

24.3 Loi normale et applications

24.3.1 Densité d'une loi normale

Il s'agit de la loi la plus importante des probabilités et statistiques.

DÉFINITION 98

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

On notera $\mathcal{N}(m, \sigma)$ cette loi (qui s'appelle aussi loi de Laplace Gauss). Sa densité est une fonction gaussienne et se représente par une courbe en cloche que nous allons maintenant étudier

Etude de la fonction gaussienne

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{m-x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$

Ainsi, $f'(x) = 0 \iff x = m$ et $f'(x) > 0 \iff x < m$

x	$-\infty$	m	$+\infty$
f'		+	-
		$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	
f	0	\nearrow	\searrow
			0

Lorsque $m = 0$, on dit que la gaussienne est centrée et lorsque $\sigma = 1$ on dit qu'elle est réduite.

La droite d'équation $x = m$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de f . Ainsi, la fonction est paire si et seulement si la loi est centrée.

Le maximum de la courbe est atteint en $x = m$ (sommet de la cloche) et est inversement proportionnel à la valeur de σ . Plus σ est grand, plus la courbe est basse et aplatie. Lorsque σ tend vers 0, le pic tend vers l'infini et la courbe est de plus en plus étroite.

La limite d'une gaussienne lorsque σ tend vers 0 n'est pas une fonction. C'est une masse de Dirac (cf. la leçon sur la théorie du signal).

La densité d'un variable aléatoire gaussienne centrée et réduite est la fonction $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

On note habituellement Z la variable aléatoire de densité Φ .

La densité d'une variable X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ s'obtient à partir de Z en posant $X = m + \sigma Z$ ou encore

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

Sa densité est alors $f(x) = \frac{1}{\sigma} \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

Lorsque m augmente le pic de la cloche se décale vers la droite et lorsque σ augmente, le pic diminue et la courbe s'écrase en se dilatant.

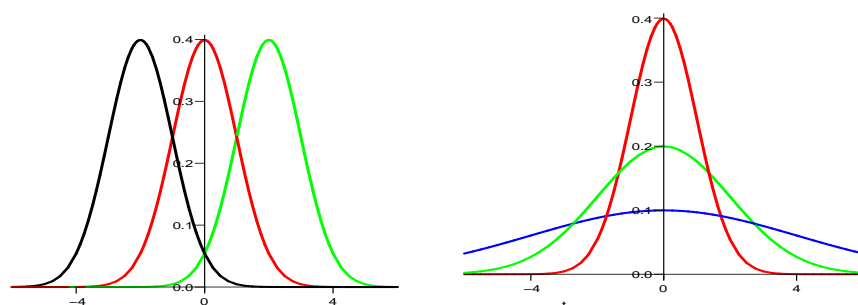


Figure 24.4: Densités normales: m variable puis σ variable.

Nous avons vu l'année dernière que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) dx = 1$

ce qui montre que Φ est bien une densité de loi de probabilité.

De même, si X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ de densité f , $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \frac{dx}{\sigma} = 1$ en opérant le changement de variables $s = \frac{x-m}{\sigma}$ dans la dernière intégrale.

24.3.2 Caractéristique d'une loi normale

PROPRIÉTÉ 92

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$

- $\mathbb{E}[X] = m$
- $\text{var}(X) = \sigma^2$

DÉMO

Il suffit de démontrer que $\mathbb{E}[Z] = 0$ et $\sigma(Z) = 1$ pour une v.a. Z centrée et réduite

- Φ étant paire, $x\Phi(x)$ est impaire et son intégrale sur \mathbb{R} est nulle $\Rightarrow \mathbb{E}[Z] = 0$
- $\text{var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2]$ nous admettons le résultat car le calcul de cette intégrale dépasse le cadre du cours \square

DÉFINITION 99

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est:

$$\Pi(s) = \int_{-\infty}^s \Phi(x) dx$$

On ne peut pas exprimer la primitive de Φ à l'aide de fonctions usuelles et par conséquent les valeurs de Π sont données dans une table appelée table de la loi normale ou table de l'écart réduit (à apprendre par cœur):

s	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.8621
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861

Le tableau se lit de la façon suivante (i donne l'unité et la première décimale de s , j la seconde décimale):

$s = i + j$...	j	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
i	...	$\Pi(s)$...

Par exemple $\Pi(1.12) = \Pi(1.1 + 0.02) = 0.86864$

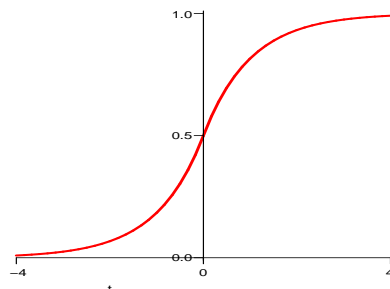


Figure 24.5: Fonction de répartition $\Pi(s)$ de la loi normale centrée réduite.

La fonction Π étant une fonction de répartition, elle est continue, dérivable sur \mathbb{R} , croissante, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. On a en outre les propriétés suivantes:

PROPRIÉTÉ 93

- $\Pi(-s) = 1 - \Pi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$
- $\Pi(s) - \Pi(-s) = 2\Pi(s) - 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}$
- Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors $\mathbb{P}[a < X < b] = \Pi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Pi(\frac{a-m}{\sigma})$

DÉMO

Les deux premières propriétés se voient facilement à partir de la fonction de densité $\phi(x)$ en se souvenant que $\pi(s)$ est une primitive de $\phi(x)$ et que sa valeur en s représente donc l'aire comprise sous la courbe de $\phi(x)$ entre $-\infty$ et s . On sait par ailleurs que l'aire totale sous cette courbe est égale à 1. D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^s \Phi(x) dx + \int_s^{+\infty} \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^s \Phi(x) dx + \int_{-\infty}^{-s} \Phi(x) dx \Rightarrow \Pi(-s) = 1 - \Pi(s)$$

$$\Pi(s) - \Pi(-s) = \Pi(s) - 1 + \Pi(s) = 2\Pi(s) - 1$$

Enfin, la dernière propriété est une conséquence directe de la définition de la fonction de répartition, après s'être ramené à une loi centrée réduite: En effet, si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}[a \leq Z \leq b] = \Pi(b) - \Pi(a)$. On remplace alors Z par $(X - m)/\sigma$ dans la formule.

□

Ex6: Utilisation de la table de l'écart réduit

Si Z suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, calculons $\mathbb{P}[Z \leq 1]$, $\mathbb{P}[Z \geq 2]$ et $\mathbb{P}[-1 < Z < 2]$

$$\mathbb{P}[Z \leq 1] = \Pi(1) = 0.8413$$

$$\mathbb{P}[Z \geq 2] = 1 - \Pi(2) = 1 - 0.9772 = 0.023$$

$$\mathbb{P}[-1 < Z < 2] = \Pi(2) - \Pi(-1) = 0.8185$$

Maintenant si X suit une loi $\mathcal{N}(2, 3)$, calculons $\mathbb{P}[X < 3]$

Pour pouvoir utiliser la table de l'écart réduit, il faut avoir à faire à une variable normale centrée réduite.

$$\text{Posons alors } Z = \frac{X - 2}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbb{P}[X < 3] = \mathbb{P}[X - 2 < 3 - 2] = \mathbb{P}\left[\frac{X - 2}{\sqrt{3}} < \frac{3 - 2}{\sqrt{3}}\right] = \mathbb{P}\left[Z < \frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \Pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.6293$$

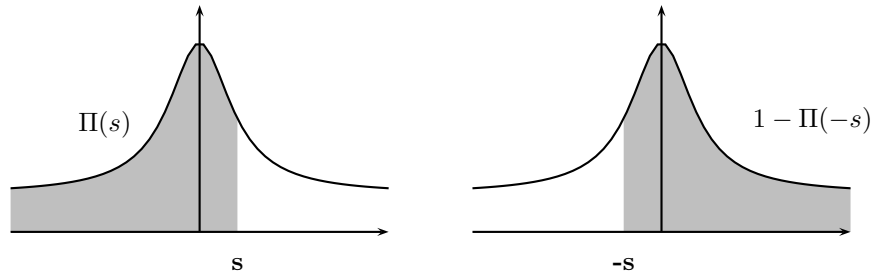


Figure 24.6: Propriétés de $\pi(s)$ lues à partir de la courbe $\phi(x)$

24.3.3 Opérations sur les variables gaussiennes

THÉORÈME 80

Soient X_1 et X_2 deux va gaussiennes indépendantes $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$
 Soit X la va définie par $X = X_1 + X_2$
 Alors X suit une loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

Les moyennes s'ajoutent et les variances s'ajoutent. On peut généraliser ce résultat à n variables aléatoires.

REMARQUE 21

Sous les mêmes hypothèses, $X = X_1 - X_2$ suit une loi normale de paramètres $m = m_1 - m_2$ et $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

Ex:

Soit $X \sim \mathcal{N}(25, 3)$ et $Y \sim \mathcal{N}(35, 4)$ deux variables aléatoires indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{N}(60, 5)$

Si $X \sim \mathcal{N}(1, 2)$ alors $-X \sim \mathcal{N}(-1, 2)$

THÉORÈME 81

Soit X une va de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors nX suit une loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma)$

REMARQUE 22

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n va aléatoires indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et soit

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

\bar{X} est la moyenne arithmétique des X_k

D'après ce qui précède, \bar{X} suit une loi $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

24.4 Théorèmes limites

24.4.1 Deux inégalités importantes

THÉORÈME 82 (INÉGALITÉ DE MARKOV)

Soit X une variable aléatoire dont l'espérance existe et $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}[|X| > \epsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\epsilon}$$

THÉORÈME 83 (INÉGALITÉ DE TCHEBYCHEV)

Soit X une variable aléatoire dont la variance existe et $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \epsilon] \leq \frac{\text{var}(X)}{\epsilon^2}$$

Une va dont l'espérance existe est dite d'ordre 1 et une va dont la variance existe est dite d'ordre 2

Ces inégalités (que nous admettons) donnent une précision sur la position des valeurs que peut prendre X autour de sa moyenne. En particulier, la seconde montre que la probabilité qu'une variable aléatoire s'éloigne de sa moyenne diminue avec l'inverse du carré de la distance à cette moyenne

24.4.2 Loi faible des grands nombres

Rappelons que *vaïid* signifie variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (c.a.d. ayant toutes la même loi).

THÉORÈME 84

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soient } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ n vaïid selon une loi de moyenne } m \text{ et de variance } \sigma^2 \\ \text{Soit } \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \\ \text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\bar{X} = m] = 1 \end{array} \right.$$

DÉMO

Appliquons l'inégalité de Tchebychev à la variable aléatoire $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ avec $S_n = X_1 + \dots + X_n$

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{var}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

$$\text{Or, } \text{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{K}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right] = 0$$

Cette inégalité étant vraie pour tout ϵ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\bar{X} = m] = 1$

□

Applications

Le résultat ci-dessus est théorique. En pratique, comment l'utilise-t-on ?

Lors d'observations statistiques où l'on fait n expériences indépendantes, on étudie un événement donné dont on relève la fréquence d'apparition. Lorsque n tend vers l'infini, la fréquence tend vers la probabilité de l'événement. Ceci constitue le résultat fondamental des statistiques.

24.4.3 Théorème de la limite centrale

THÉORÈME 85

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } X_1, \dots, X_n \text{ n vaïid selon une loi de moyenne } m \text{ et d'écart type } \sigma \\ \text{Soit } S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ \text{Alors } T_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } \mathcal{N}(0, 1) \\ \text{C'est à dire: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[a < T_n < b] = \Pi(b) - \Pi(a) \end{array} \right.$$

DÉMO

admis

Remarquons néanmoins que $\mathbb{E}[S_n] = nm$ et $\sigma(S_n) = \sigma\sqrt{n}$, de sorte que $T_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sigma(S_n)}$

Ainsi, T_n n'est autre que la variable S_n qui a été centrée et réduite.

□

On peut comprendre le théorème de la façon suivante: lorsque l'on prend un nombre suffisamment grand de variables aléatoires indépendantes, quelque soit leur loi, la somme (et également la moyenne) de ces variables aléatoires ressemble toujours à une loi normale.

En pratique, on peut appliquer cette loi si X_k suit une loi de Poisson avec λ grand ($\lambda > 15$) ou si S_n suit une loi binomiale avec n grand et $np \geq 18$.

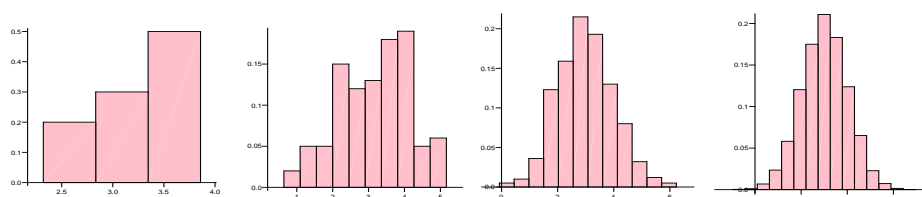


Figure 24.7: Tendence vers la loi normale $n = 10, 100, 1000$ et 10000 .

Ex:

Un caissier constate une erreur d'au plus 10F par jour. Quelle est la probabilité pour que l'erreur commise au bout de 220 jours soit inférieure à 200F?

Soit X_k la variable aléatoire égale à l'erreur commise au jour n°k

X_k suit une loi uniforme sur $[-10, 10]$

Comme cette loi admet une espérance nulle et une variance $\sigma^2 = \frac{400}{12} \approx 33.3$, on peut appliquer le théorème et poser $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_{220}$ et l'on cherche $\mathbb{P}[-200 < X < 200]$

Si l'on suppose les X_k indépendants alors S_n suit à peu près une loi $\mathcal{N}(0, \frac{33.3}{\sqrt{220}})$

$$\mathbb{P}[-200 < X < 200] = \mathbb{P}[-2.45 < Z < 2.45] = 2\Pi(2.45) - 1 = 0.99$$

Voici un cas particulier important de ce théorème qui permet d'approcher une loi binomiale par une loi normale.

THÉORÈME 86 (DE MOIVRE LAPLACE)

Soit X une variable de loi binomiale de paramètre n et p

$$\text{Soit } Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, Y tend vers une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[a < Y < b] = \Pi(b) - \Pi(a)$$

On estime que l'approximation par la loi normale est valable lorsque $npq \geq 18$

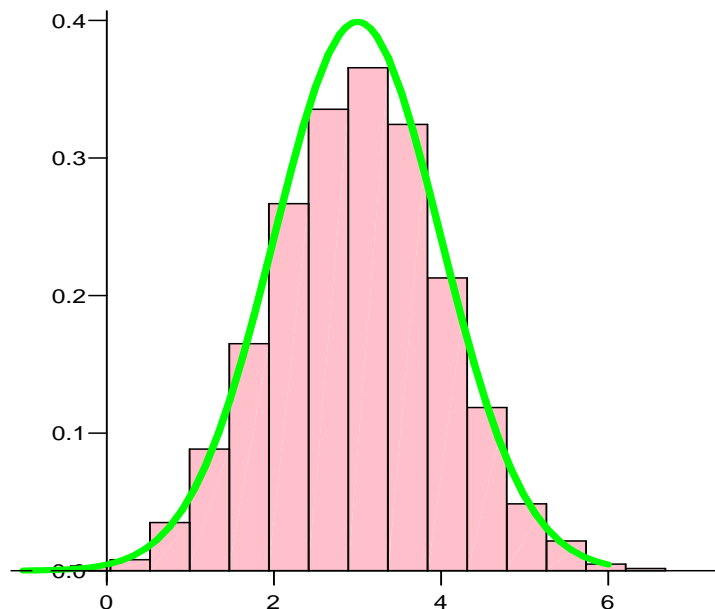


Figure 24.8: Convergence de la loi binomiale vers la loi normale.

Lorsque l'on veut calculer $\mathbb{P}[X = k]$ avec ce théorème (par exemple pour approcher une loi discrète par la loi normale), il faut poser $\mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}[k - 1/2 < X < k + 1/2]$ puisque X ne prend que des valeurs entières. En effet, le calcul de $\mathbb{P}[X = k]$ pour une loi à densité donnerait 0 pour tout entier k . Nous verrons en TD des applications de ces théorèmes.

Chapitre 25

Calcul différentiel

25.1 Fonctions de plusieurs variables

25.1.1 Introduction et exemples

De nombreuses grandeurs physiques dépendent de plusieurs paramètres indépendants: l'évolution de la température en un point d'un solide chauffé, dépend des coordonnées x, y, z de ce point et du temps t . La description de la trajectoire d'un objet dépend des coordonnées x, y, z de son centre de gravité, des angles d'Euler θ, ϕ, ψ et du temps t . Pour indiquer qu'une fonction f dépend de paramètres indépendants x_1, x_2, \dots, x_n nous noterons $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la valeur de cette fonction au point (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Pour cette leçon encore, nous laisserons de côté les aspects théoriques pour se focaliser sur les techniques de calcul, quitte, parfois, à présenter des notions de façon peu rigoureuse. En guise d'introduction, voici quelques exemples de fonctions à plusieurs variables:

Ex1:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ est une fonction de deux variables définie sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} . À tout point de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé du plan, la fonction f associe le nombre réel $\sin(x^2 + y^2)$.

Ex2:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = \sqrt{xy}$ est une fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R}_+ définie sur le domaine $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$ du plan. Ce domaine est la réunion des deux quadrants du plan dont les points ont des coordonnées de même signe.

Ex3:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ est une fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R}_+ définie sur \mathbb{R}^2 .

Il s'agit d'une fonction gaussienne à deux dimensions comme celles que nous avons rencontrées dans la leçon sur la loi normale.

Ex4:

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} / f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$ fonction de trois variables à valeurs dans \mathbb{R}_+ définie sur le domaine $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xyz > 0\}$. Ce domaine est un sous-ensemble de l'espace \mathbb{R}^3 formé de la réunion de trois octants.

Ex5:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$ est une fonction de deux variables définie dans \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^2 . À tout point de coordonnées (x, y) du plan, elle associe le vecteur $f(x, y)$. On parle alors de fonction vectorielle.

Ex6:

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 / f(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 + v \\ uv \\ e^v \end{pmatrix}$ est une fonction de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Son domaine de définition est l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.

Venons-en au cas général d'une fonction de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^p

25.1.2 Définition

DÉFINITION 100

Une fonction de plusieurs variables (ou fonction vectorielle) est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Les applications f_1, f_2, \dots, f_p s'appellent les applications coordonnées de f (ce sont des fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}). La fonction f associe alors un vecteur de n coordonnées à un vecteur de p coordonnées, chaque coordonnée étant une fonction de x_1, \dots, x_n .

Dans le cas d'une application à valeurs dans \mathbb{R} , on a $p = 1$ et il n'y a qu'une seule application coordonnée; la fonction associe à tout vecteur de \mathbb{R}^n un unique nombre réel $f(x_1, \dots, x_n)$.

25.1.3 Représentation graphique

Se pose le problème de la représentation graphique de ces fonctions:

Pour une fonction numérique classique f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , on sait qu'on peut la représenter par l'ensemble des points $\{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\}$. Il s'agit du graphe de la fonction. Une fonction d'une variable se représente donc par une courbe du plan

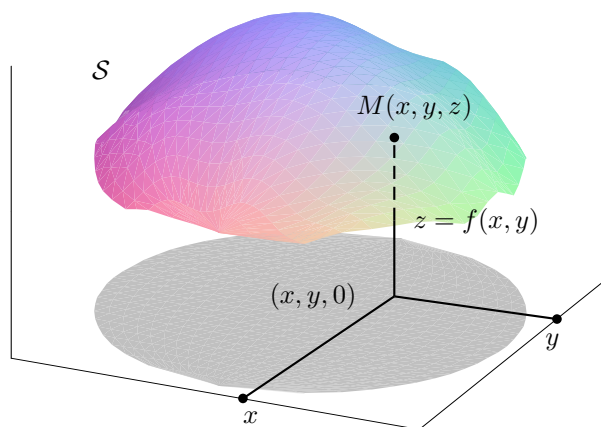


Figure 25.1: Définition de la surface représentative. $M(x, y, z) \in \mathcal{S} \iff z = f(x, y)$

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, son graphe sera une surface représentative \mathcal{S} de l'espace \mathbb{R}^3 définie comme étant l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées vérifient $z = f(x, y)$ (cf. figure ci-dessus). Une fonction de deux variables se représente donc par une surface de l'espace. La figure ci-dessous illustre les surfaces représentatives de trois des exemples précédents.

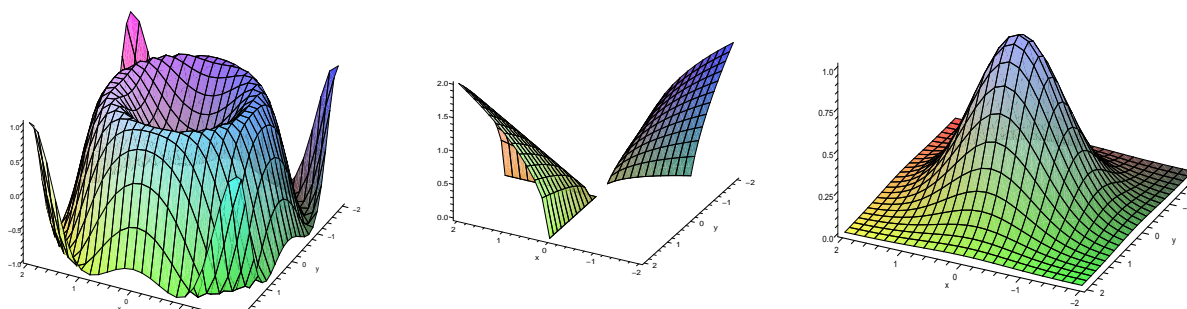


Figure 25.2: Surfaces représentatives de $\sin(x^2 + y^2)$, \sqrt{xy} , $e^{-x^2 - y^2}$

Si $n \geq 3$, on ne peut plus représenter la fonction de cette façon. Pour la visualiser, on peut bloquer plusieurs variables et regarder l'évolution de la fonction par rapport à une ou deux autres variables.

Si $p \geq 2$, on doit représenter la fonction coordonnée par coordonnée en se plaçant dans l'un des cas précédent.

Le domaine de définition \mathcal{D} d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n

Les courbes de niveau de la fonction f sont définies comme étant l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $f(x_1, \dots, x_n) = k$ où k est une constante. Il s'agit également d'un outil de visualisation de la fonction qui donne l'ensemble des points où la valeur de cette fonction est constante. Nous ne les tracerons que pour des fonctions de deux variables. La figure ci-dessous donne les courbes de niveau des trois exemples de fonctions dont les surfaces représentatives sont données ci-dessus:

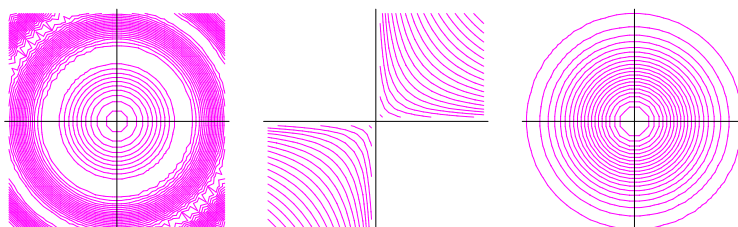


Figure 25.3: Courbes de niveau de $\sin(x^2 + y^2)$, \sqrt{xy} , $e^{-x^2 - y^2}$

Pour conclure ce paragraphe, voici quelques exemples de fonctions de deux variables, leur surface représentative et les courbes de niveau correspondantes.

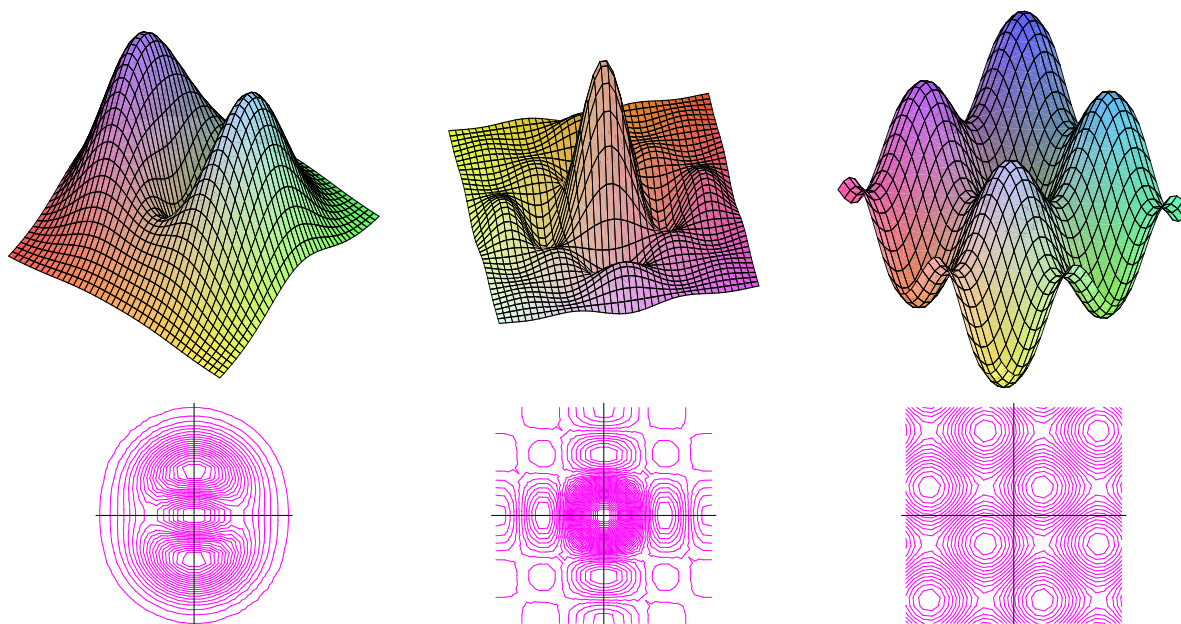


Figure 25.4: $(x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$, $\frac{\sin x \sin y}{xy}$, $\sin x + \sin y$

25.1.4 Limite et continuité

Les notions de limite et de continuité diffèrent notablement des fonctions numériques. Nous n'aborderons ces points que de façon marginale.

DÉFINITION 101

Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ un point de \mathbb{R}^n et f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \alpha / d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d(f(x), l) < \epsilon$$

Cette définition ressemble beaucoup à celle de la limite d'une fonction de une variable, à ceci près que la valeur absolue qui exprimait la distance dans \mathbb{R} a été remplacée par l'expression $d(x, x_0)$ qui représente la distance entre x et x_0 dans \mathbb{R}^n . On peut choisir comme définition de d celle de la distance euclidienne. Elle est définie comme suit:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

L'interprétation géométrique est donc la même que pour une fonction de une variable: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ssi la valeur de f en x se rapproche de l lorsque x se rapproche de x_0 .

Idem pour la continuité. La notion de dérivabilité est remplacée par celle de différentiabilité qui fait l'objet du paragraphe suivant.

Si la définition est presque la même que pour les fonctions numériques de la variable réelle, le calcul d'une limite est autrement plus compliqué lorsque la fonction possède plusieurs variables. Dans \mathbb{R} , pour atteindre un point x_0 , on n'a que deux possibilités: ou bien on arrive par la gauche du point, ou bien on arrive par la droite. Si la limite est la même des deux côtés, alors la fonction admet comme limite en x_0 la valeur commune. Lorsque le point x_0 appartient à \mathbb{R}^n , on peut l'atteindre de bien des façons différentes. Par exemple, si $n = 2$, on peut atteindre x_0 par la droite, la gauche, par au-dessus, par en-dessous, en suivant une courbe ou une trajectoire quelconque du plan. Pour que la fonction admette une limite en un point, il est nécessaire que $f(x)$ tende vers la même limite indépendamment de la façon dont x se rapproche de x_0 . Et cette condition n'est pas suffisante (nous l'admettons).

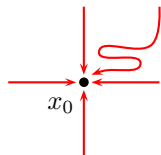


Figure 25.5: plusieurs chemins pour atteindre un point x_0 du plan

Ex7: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$

En effet, $f(x, y) = d(x, y)^2$. Fixons $\epsilon > 0$. Il suffit alors de choisir $\alpha = \sqrt{\epsilon}$ et la définition de la limite est satisfaite.

Ex8: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'existe pas. En effet, posons $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. $f(x, 0) = 1$ et $f(0, y) = -1$

Lorsque x tend vers 0, $(x, 0)$ tend vers l'origine $(0, 0)$ en restant sur l'axe des abscisses et lorsque y tend vers 0, $(0, y)$ tend vers l'origine $(0, 0)$ en restant sur l'axe des ordonnées. Les deux limites étant différentes, on voit que f ne peut avoir de limite.

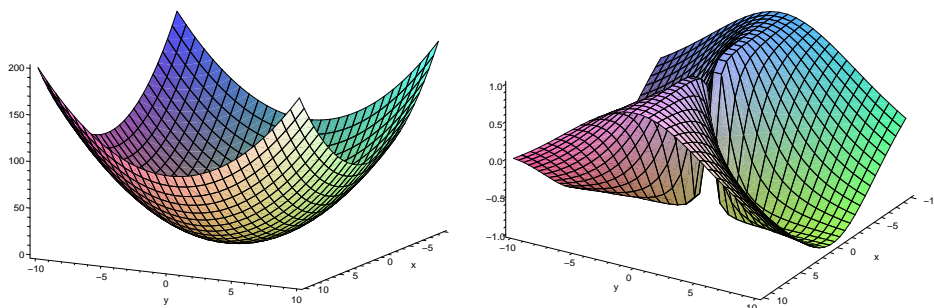


Figure 25.6: $x^2 + y^2$ et $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

25.1.5 Dérivée partielle d'une fonction vectorielle

DÉFINITION 102

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
 sous réserve d'existence, on pose

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a)}{x - a_i}$$

la fonction $a \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à x_i

Formellement, on la calcule en considérant x comme étant la seule variable et en dérivant f comme si toutes les autres variables étaient des constantes. L'application obtenue en bloquant toutes les variables de f sauf la i ème s'appelle l'application partielle de f par rapport à x_i . La dérivée partielle de f par rapport à x_i est alors la dérivée de l'application partielle correspondante.

Ex3: $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xe^{-x^2-y^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2ye^{-x^2-y^2}$

Ex1: $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(x^2 + y^2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cos(x^2 + y^2)$

Ex4: $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{xz}{y}}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}$

Ex5: Reprenons l'exemple de la fonction 5:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ex6: Reprenons l'exemple de la fonction 6:

$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 2u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ e^v \end{pmatrix}$

Interprétation géométrique de la dérivée partielle

$\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ est l'accroissement de f au point a dans la direction du vecteur directeur de l'axe des abscisses.

$\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ est l'accroissement de f au point a dans la direction du vecteur directeur de l'axe des ordonnées.

L'intersection de la surface représentative de f avec un plan vertical parallèle à (xOz) et passant par un point a est une courbe dont la pente en a est $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$

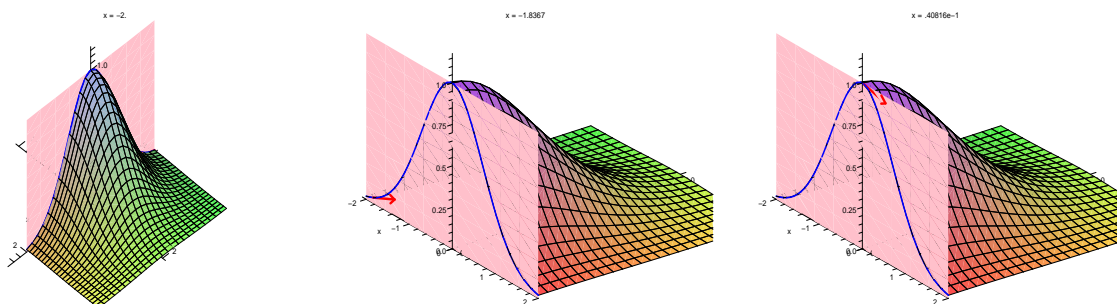


Figure 25.7: Interprétation géométrique de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

La flèche rouge dans les schémas ci-dessus représente le vecteur tangent à la surface représentative de

$f(x, y)$ au point (x, y) , suivant la direction (Ox) . Sa pente est donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Dérivée partielle d'ordre supérieur

Toujours sous réserve d'existence, on peut définir des dérivées partielles secondes en posant:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

De même, on peut définir des dérivées partielles k -ièmes en posant

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$$

Ex3: $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2 + 4x^2)e^{-x^2-y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2 + 4y^2)e^{-x^2-y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xye^{-x^2-y^2}$$

On constate dans cet exemple que pour tout x et y , on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$

On peut se demander si cela est toujours le cas. La réponse est: en règle générale NON. Le théorème suivant précise les conditions dans lesquelles on peut dériver indépendamment de l'ordre des variables.

THÉORÈME 87 (DE SCHWARZ)

Si les deux dérivées partielles secondes de f sont **continues** en un point a , alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Ce théorème, que nous admettons sans démonstration, se généralise à un nombre quelconque de variables.

Fonctions vectorielles de classe C^k

Une fonction vectorielle sera dite de classe C^k sur un voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ si elle admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k qui soient des fonctions **continues** en a (rappelons que l'on n'a pas défini la notion de continuité d'une fonction vectorielle et que celle-ci est plus forte que la notion de continuité d'une fonction numérique). De même, une fonction est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout entier k .

Extremum d'une fonction vectorielle

Nous nous limitons ici aux fonctions à valeurs dans \mathbb{R} (avec $p = 1$). Un point a où toutes les dérivées partielles de f s'annulent est un point critique de la fonction. Dans certains cas, ce peut être un minimum ou un maximum local de la fonction.

DÉFINITION 103

• a est un minimum local de f s'il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de a tel que $f(a) \leq f(x) \forall x \in U$
 • a est un maximum local de f s'il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de a tel que $f(a) \geq f(x) \forall x \in U$

PROPRIÉTÉ 94

Si a est un extremum local de f alors $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0 \forall k = 1, \dots, n$

Ex3: $f(x) = e^{-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff x = y = 0$$

La surface représentative de f (il s'agit d'une fonction gaussienne à deux dimensions) montre que $(0, 0)$ est bien un maximum de la fonction (c'est d'ailleurs un maximum absolu).

La réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple suivant.

Ex9: $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

$(0, 0)$ est un point critique de la fonction f mais la surface représentative montre qu'il ne s'agit ni d'un minimum ni d'un maximum. Il s'agit d'un exemple de point selle où les dérivées partielles s'annulent sans que le point ne soit un extremum.

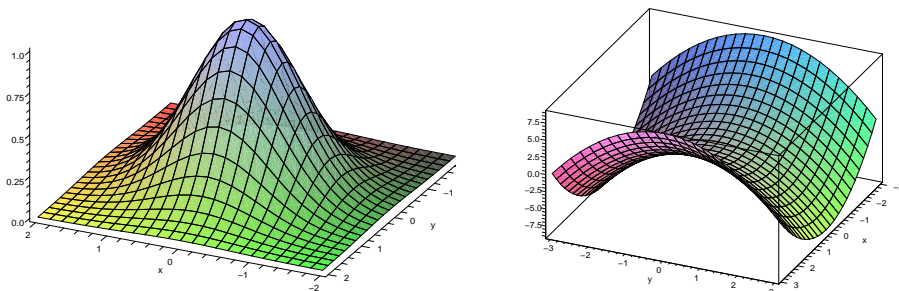


Figure 25.8: maximum de $e^{-x^2-y^2}$ et point selle de $x^2 - y^2$ en $(0, 0)$

Nous venons de voir une condition nécessaire pour qu'un point soit un extremum (il faut que les dérivées partielles s'annulent), nous allons maintenant établir une condition suffisante. Pour cela, il est nécessaire de définir la notion de matrice hessienne d'une fonction en un point.

DÉFINITION 104

Soit f une fonction admettant des dérivées partielles secondes continues en a par rapport à toute variable. On appelle matrice hessienne de f en a la matrice symétrique H de taille $n \times n$ donnée par :

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

PROPRIÉTÉ 95

On suppose que a est un point critique de f

- Si les valeurs propres de la matrice hessienne sont strictement négatives alors a est un maximum local de f
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne sont strictement positives alors a est un minimum local de f

Dans le cas où certaines valeurs propres sont positives et d'autres négatives, a n'est ni un maximum ni un minimum; on parle en ce cas de point selle ou de point col.

Dans le cas où f est une fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R} le déterminant de la matrice hessienne est

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \lambda \times \mu$$

Où λ et μ sont les deux valeurs propres de la matrice hessienne.

PROPRIÉTÉ 96

- si $\Delta > 0$ et $\lambda < 0$ alors a est un maximum
- si $\Delta > 0$ et $\lambda > 0$ alors a est un minimum
- si $\Delta < 0$ alors a n'est pas un extremum

Ex3: $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

La matrice hessienne de f en $(0, 0)$ est $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

D'après la proposition précédente, c'est un maximum (strict).

Ex9: $f(x, y) = x^2 - y^2$

La matrice hessienne de f en $(0, 0)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Il ne s'agit donc pas d'un extremum.

Ex10: $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(2x^2 - 1)e^{-x^2-y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(2y^2 - 1)e^{-x^2-y^2}$$

Ces deux fonctions s'annulent simultanément aux points $(0, 0)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Cette fonction possède donc cinq points critiques.

Après calculs, la matrice hessienne est:

$$H(x, y) = e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 2xy(3-2x^2) & -1+2x^2+2y^2-4(xy)^2 \\ -1+2x^2+2y^2-4(xy)^2 & 2xy(3-2y^2) \end{pmatrix}$$

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dont les valeurs propres sont } \pm 1. (0, 0) \text{ est un point selle.}$$

$$H(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = H(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix} \text{ et ces points sont donc des minima.}$$

$$H(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = H(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -2/e \end{pmatrix} \text{ et ces points sont donc des maxima.}$$

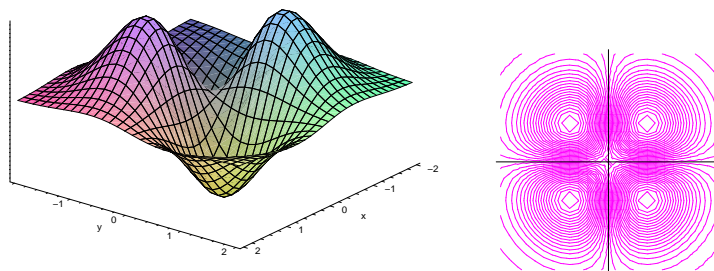


Figure 25.9: $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$

25.1.6 Différentielle et matrice jacobienne d'une fonction vectorielle

Matrice et déterminant jacobien

Lorsque $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ admet des dérivées partielles en a , on peut calculer $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ pour $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, n$

DÉFINITION 105

La matrice jacobienne de f en $a \in \mathbb{R}^n$ est la matrice :

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Lorsque f est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n on appelle jacobien de f en a le déterminant de la matrice jacobienne de f en a .

$$\text{Ex5: } f(x, y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ex6: } f(u, v) = \begin{pmatrix} u^2+v \\ uv \\ e^v \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

$$\text{Ex1: } f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) \Rightarrow J_f(x, y) = (2x \cos(x^2 + y^2) \quad 2y \cos(x^2 + y^2))$$

Différentielle

Nous supposons maintenant que f est de classe C^1 sur un voisinage de a .

Lorsque l'on a fixé une base dans \mathbb{R}^n et une base dans \mathbb{R}^p , se donner une matrice revient à se donner une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Ainsi, l'application linéaire associée à la matrice jacobienne en un point a est la **différentielle** de f en a . On la note df_a ou bien $Df(a)$ et l'on dit que f est différentiable en a . D'après le cours d'algèbre linéaire, elle est définie de la façon suivante:

$$\left\| \begin{array}{l} df_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} \end{array} \right\| \longrightarrow df_a(h) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) \times h_k \right)_{i=1, \dots, p}$$

Ainsi, si h représente le vecteur colonne (h_1, \dots, h_n) , on a $\boxed{df_a(h) = J_f(a) \times h}$ le produit \times étant le produit matriciel.

Pour plus de commodités, nous allons introduire une notation que vous retrouverez en physique et en télécommunications.

Supposons que l'application f soit à valeurs dans \mathbb{R} (ie $p = 1$).

Notons dx_i l'application coordonnée qui à un vecteur $h = (h_1, \dots, h_n)$ associe sa i ème coordonnée h_i .

Ainsi:

$dx_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / h \rightarrow dx_i(h) = h_i$ est la fonction i ème coordonnée et l'on peut donc noter:

$$\boxed{df_a = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k}$$

Nous admettons les propriétés suivantes des différentielles (la linéarité est une conséquence de la définition).

PROPRIÉTÉ 97

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg \\ \bullet d(fg) = f \times dg + g \times df \\ \bullet d(1/f) = -df/f^2 \end{array} \right\|$$

25.1.7 Changement de variables et composition de fonctions vectorielles

Cela peut se faire en utilisant les règles de composition des applications linéaires et en les appliquant aux différentielles. Notons:

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} / (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \\ g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} / (u_1, \dots, u_n) \rightarrow g(u_1, \dots, u_n) = f(x_1, \dots, x_n) \\ \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / (u_1, \dots, u_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

f est une fonction de (x_1, \dots, x_n) , g est une fonction de (u_1, \dots, u_n) et ϕ est la fonction de changement de variables permettant de passer de (x_1, \dots, x_n) à (u_1, \dots, u_n) . On a donc:

$$\boxed{g = f \circ \phi}$$

Notre problème est de déterminer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f .

PROPRIÉTÉ 98

$$\left\| \begin{array}{l} d(f \circ \phi)_a = df_{\phi(a)} \circ d\phi_a = df_b \circ d\phi_a \text{ avec } b = \phi(a) \\ J_{f \circ \phi}(a) = J_f(\phi(a)) \times J_\phi(a) \end{array} \right\|$$

En développant ces formules, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \times \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Ex11: Changement de variables en coordonnées polaires.

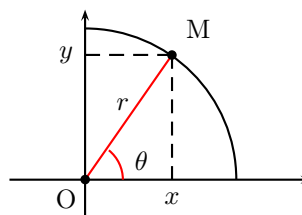


Figure 25.10: Coordonnées polaires

Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 . Soit $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

Soit $\phi(r, \theta) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

La fonction ϕ est la fonction de changement de variables en coordonnées polaires. Si f est définie sur \mathbb{R}^2 , ϕ est une fonction définie du domaine $[0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Les formules précédentes donnent:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

En résolvant le système, on peut alors exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases}$$

On peut d'ailleurs noter que les coefficients des dérivées partielles du premier système sont ceux de la transposée de la matrice jacobienne de ϕ et que les coefficients du second système sont ceux de la transposée de son inverse. On aurait donc pu directement trouver le système ci-dessus en inversant la matrice jacobienne de ϕ .

On peut également être appelé à calculer les dérivées partielles secondes lors d'un changement de variables. On applique alors deux fois la formule.

Ex12: Soit $g(u, v) = f(x, y)$ où $\phi(u, v) = (x, y)$ avec $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$

Il est facile d'inverser la fonction ϕ en remarquant que $\begin{cases} u = (x + y)/2 \\ v = (x - y)/2 \end{cases}$

et l'on peut alors directement calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

Maintenant si nous voulons calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v} \right)$

Il nous faut calculer $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$

En recommençant ainsi avec tous les termes et en les regroupant, on obtient finalement:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{cases}$$

Nous verrons des exemples d'applications de ces calculs dans la résolution d'équations aux dérivées partielles.

25.2 Opérateurs et équations aux dérivées partielles

25.2.1 Opérateurs

DÉFINITION 106

- Une champ vectoriel est une application f qui à un point associe un vecteur, ie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- Une champ scalaire est une application f qui à un point associe un nombre, ie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Des exemples de champs scalaires sont donnés par la distribution des températures en chaque point

d'une carte, ou bien par la donnée de la pression en un point de l'espace. Une carte du relief donnant l'altitude en fonction des coordonnées d'un point est un champ scalaire (cf. les deux dessins ci-dessous). Pour de tels champs, les courbes d'équation $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{constante}$ s'appellent des courbes de niveau ou lignes de champ. Dans le cas d'une distribution de pression, ce sont des isobares, dans le cas de la température des isothermes.

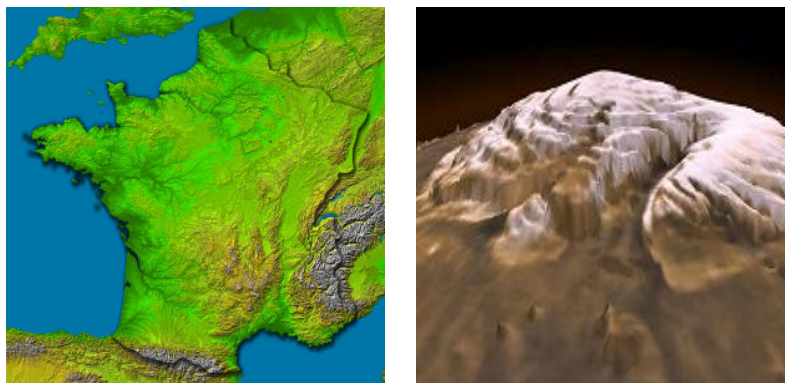


Figure 25.11: champs scalaires: deux cartes du relief de la Terre et de Mars (photos NASA)

Des exemples de champs vectoriels sont donnés par le champ électrique ou magnétique en un point de l'espace, ou par un champ de gravitation ou bien encore par la force du courant à l'intérieur d'un fluide en mouvement.

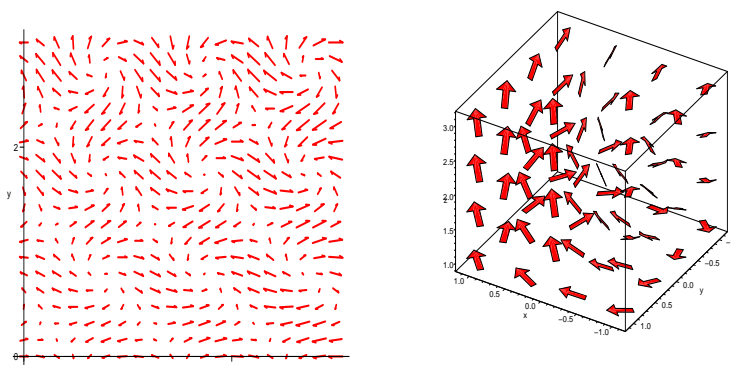


Figure 25.12: Exemples de champs vectoriels en deux et trois dimensions

Pour étudier les champs scalaires ou vectoriels en physique, on utilise des opérateurs, qui à une fonction associent un nombre ou un vecteur. En voici quelques exemples:

DÉFINITION 107

- Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles en a , le gradient de f en $a(a_1, \dots, a_n)$ est

$$\text{grad}_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \in \mathbb{R}^n$$
- Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ admet des dérivées partielles en a , la divergence de f en $a(a_1, \dots, a_n)$ est

$$\text{div}_a f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(a) \in \mathbb{R}$$
- Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles secondes en a , le laplacien de f en $a(a_1, \dots, a_n)$ est

$$\Delta_a f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a) \in \mathbb{R}$$

Enfin dans \mathbb{R}^3 , on définit également le rotationnel d'un vecteur $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ comme étant le vecteur de \mathbb{R}^3 donné par:

$$rot_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

On définit de même l'opérateur ∇ noté ∇ comme étant l'opérateur qui fait correspondre à une fonction son gradient: $\nabla f = grad f$

Cette définition autorise à noter de façon impropre (mais pratique) l'opérateur $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

On peut alors écrire formellement: $div f = \nabla \cdot f$, $rot f = \nabla \wedge f$ et $\nabla^2 f = \Delta f$

Les opérateurs sont des quantités intrinsèques au champ et ne dépendent pas du repère choisi. Ils sont donc indépendants par changement de repère et donnent des indications sur le comportement local du champ.

Interprétation physique des opérateurs:

- Le gradient d'un champ scalaire est un vecteur qui pointe dans la direction des plus fortes variations. Il est orthogonal aux lignes de champ en tout point et la dérivée de la fonction f suivant une direction est égale à la projection du gradient dans cette direction.

- La divergence d'un champ vectoriel donne une indication sur la façon dont les vecteurs du champ divergent: considérons le champ de vitesse \vec{V} dans l'écoulement d'un fluide et supposons le mouvement stationnaire (indépendant du temps). Choisissons un repère et considérons une boîte rectangulaire parallèles aux axes, dont les longueurs des côtés sont dx, dy, dz . Les faces opposées de cette boîte vont avoir des surfaces égales à $dx dy$, $dx dz$ ou $dy dz$. La composante V_x du champ représente la distance parcourue dans la direction (Ox) par une particule du fluide, durant une unité de temps. Ainsi, $V_x(x, y, z) dy dz$ représente le volume de fluide entrant à travers la face $dy dz$ (perpendiculaire à l'axe (Ox)) durant une unité de temps et $V_x(x + dx, y, z) dy dz$ représente le volume sortant par la face opposée. La perte de volume entre les deux faces est donc donnée par

$$V_x(x + dx, y, z) dy dz - V_x(x, y, z) dy dz = \frac{V_x(x + dx, y, z) - V_x(x, y, z)}{dx} dx dy dz$$

En faisant tendre dx vers 0 (les calculs et les notations ci-dessus ne sont pas très rigoureuses) la perte de volume est donc égale à:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy dz$$

En opérant de la même façon suivant les deux autres directions et en ajoutant les quantités, on obtient la perte de volume totale du flux sortant par rapport au flux entrant et qui vaut:

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz = div \vec{V} dx dy dz$$

La divergence du champ en un point est donc la perte de flux par unité de volume et par unité de temps.

- Le rotationnel exprime la tendance du champ vectoriel à tourner autour d'un point. On l'appelle également vecteur tourbillon. Il représente la limite de la circulation du champ le long d'un lacet entourant le point considéré, lorsque la longueur du lacet tend vers zéro. Là aussi, utilisons des analogies: dans un cyclone, le vent tourne autour de l'oeil et le champ des vitesses est un champ vectoriel dont le rotationnel, calculé au niveau de l'oeil, est non-nul. Dans le cas d'un solide indéformable en rotation, le champ des vitesses est donné par $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ où $\vec{\omega}$ représente la vitesse de rotation. Le rotationnel de \vec{V} est dirigé selon l'axe de la rotation, orienté dans le sens direct et est égal à $2\vec{\omega}$.

- Le laplacien d'un champ scalaire f mesure la différence entre la valeur de f en un point et la valeur moyenne sur un domaine contenant ce point. Elle exprime également une mesure de la courbure moyenne de f au voisinage d'un point. C'est une quantité qui intervient dans beaucoup d'équations aux dérivées partielles.

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = (x^2 + y^2, x \cosh(y)) \Rightarrow div_{(x,y)} f = 2x + x \sinh(y)$

$$\text{Ex: } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \text{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

F.I.N.

Le professeur Jones potassait la théorie du temps depuis plusieurs années déjà.

- J'ai trouvé l'équation-clé, dit-il un jour à sa fille. Le temps est un champ. Cette machine que j'ai construite peut agir sur ce champ, et même en inverser le sens.

Et, tout en appuyant sur un bouton, il dit : « Ceci devrait faire repartir le temps à rebours à temps le repartir faire devrait ceci », dit-il bouton un sur appuyant en tout, et.

- Sens le inverser en même et, champ ce sur agir peut construite j'ai que machine cette. Champ un est temps le. Fille sa à jour un dit-il, l'équation-clé trouvé j'ai.

Déjà années plusieurs depuis temps du théorie la potassait Jones professeur le.

N.I.F.

© Frédéric Brown in « fantômes & farfafouilles. »

Chapitre 26

Intégrales multiples

26.1 Intégrales doubles

26.1.1 Définitions

Dans l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère un domaine \mathcal{D} fermé borné du plan (xOy) . Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathcal{D} dont la surface représentative est \mathcal{S} .

Soit \mathcal{V} le volume du cylindre droit délimité inférieurement par \mathcal{D} et supérieurement par \mathcal{S} . On peut voir ce volume comme celui d'une boîte dont le fond est formé par \mathcal{D} et le couvercle par \mathcal{S} .

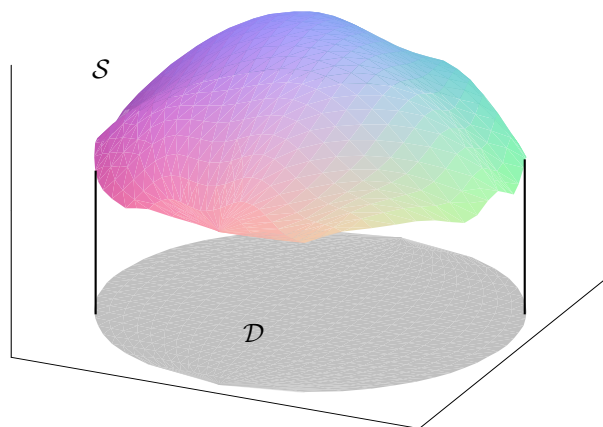


Figure 26.1: Cylindre droit délimitant le volume \mathcal{V}

DÉFINITION 108

|| L'intégrale double de f sur \mathcal{D} est $\mathcal{V} = \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$

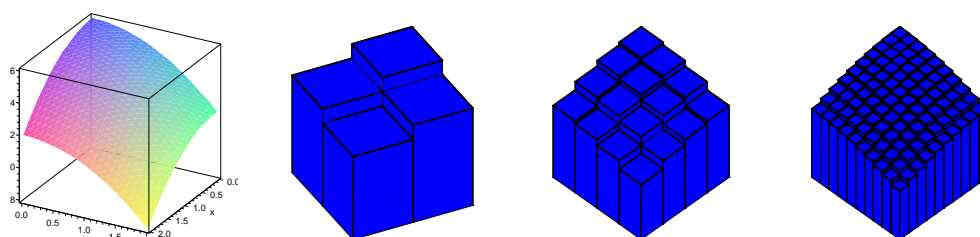


Figure 26.2: surface représentative de $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ et valeur approchée de l'intégrale double

Découpons le domaine \mathcal{D} suivant un quadrillage de $n \times m$ cases et choisissons, pour chacune des nm cases, un point (x_i, y_j) dans la case. Considérons le parallélépipède rectangle dont la base est formée par

une case et dont la hauteur est $f(x_i, y_j)$. La somme des volumes de ces parallélépipèdes est une valeur approchée du volume du cylindre. Lorsque n et m tendent vers l'infini, les cases deviennent de plus en plus nombreuses et de plus en plus petites et la somme tend vers l'intégrale (cf. figure ci-dessus). Cette construction est analogue à celle que nous avons vue pour l'intégrale simple avec les sommes de Riemann.

26.1.2 Méthodes de calcul

La méthode précédente ne permet pas de calculer facilement l'intégrale double. Nous allons maintenant voir le théorème de Fubini qui permet de ramener le calcul d'une intégrale double à celle de deux intégrales simples successives.

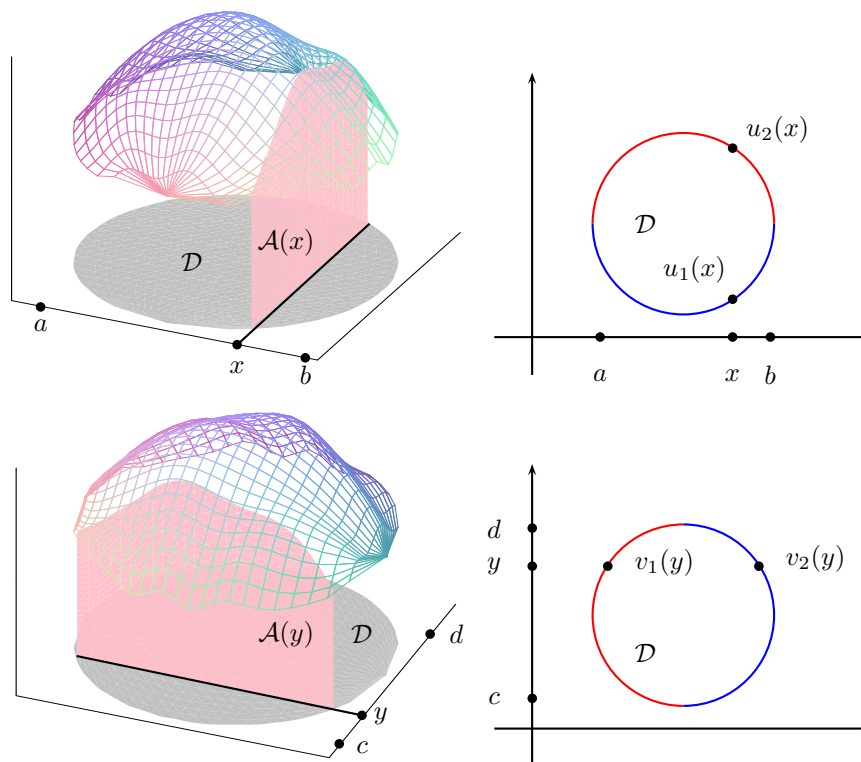


Figure 26.3: Théorème de Fubini

Soit a l'abscisse du point de \mathcal{D} d'abscisse minimum et b celle du point d'abscisse maximum. Nous supposons que la frontière du domaine \mathcal{D} peut se décomposer comme réunion de deux courbes $u_1(x)$ et $u_2(x)$ dont les extrémités se rejoignent en $x = a$ et $x = b$ (nous admettons que l'on peut décomposer tout domaine borné du plan en une réunion disjointe de domaines ayant cette propriété). Fixons $x \in [a, b]$. Le plan parallèle à (yOz) et passant par $(x, 0, 0)$ coupe le cylindre suivant une surface dont l'aire est égale à:

$$\mathcal{A}(x) = \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, y) dy.$$

De la même façon, soit c l'ordonnée du point de \mathcal{D} d'ordonnée minimale et d celle du point d'ordonnée maximale. Notons $v_1(y)$ et $v_2(y)$ les deux courbes dont la réunion forme la frontière de \mathcal{D} et dont les extrémités se rejoignent en $y = c$ et $y = d$. Fixons $y \in [c, d]$. Le plan parallèle à (xOz) et passant par $(0, y, 0)$ coupe le cylindre suivant une surface dont l'aire est égale à:

$$\mathcal{A}(y) = \int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x, y) dx.$$

THÉORÈME 88

|| A l'aide des notations suggérées ci dessus, on a:

$$|| I = \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Ex1: Calculer $\int \int_D \sin(x^2 y) dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < x < 3, 0 < y < \frac{\pi}{2x^2}\}$

$$I = \int_2^3 dx \int_0^{\frac{\pi}{2x^2}} \sin(x^2 y) dy = \int_2^3 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{6}$$

Ex2: Calculer $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 (x^3 + \frac{1}{3}x^3) dx = \frac{1}{3}$$

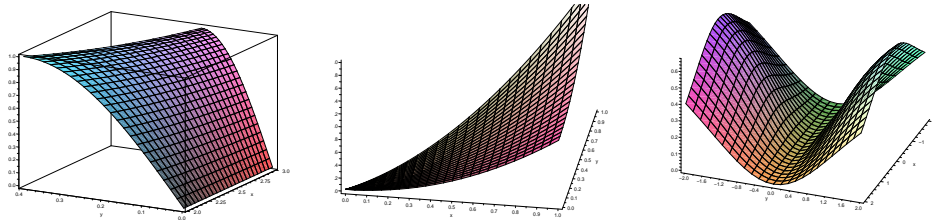


Figure 26.4: $\sin(x^2 y)$, $x^2 + y^2$, $\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2 + 2}$

- Si $f(x, y) = 1$, alors le sommet du cylindre est plat et le volume \mathcal{V} est alors égal à l'aire du domaine:

$$\boxed{\int \int_{\mathcal{D}} dx dy = \text{aire}(\mathcal{D})}$$

- Si \mathcal{D} est un rectangle, ie $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ et si $f(x, y) = g(x)h(y)$ alors

$$\int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \times \int_c^d h(y) dy$$

Autrement dit, si l'on intègre sur un rectangle une fonction dont on peut séparer les variables, alors l'intégrale double est égale au produit de deux intégrales simples.

Ex3: Calculer l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $-a \leq x \leq a$

On a $\mathcal{A} = \int \int_D dx dy$. Or, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \iff y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Ainsi, $\mathcal{A} = \int_{-a}^a dx \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} dy$ où $u_1(x) = -u_2(x) = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow I = \int_{-a}^a 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$

Posons $\sin u = \frac{x}{a} \iff u = \arcsin(\frac{x}{a})$ et $\cos u du = \frac{dx}{a}$

$$\Rightarrow I = 2b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \times a \cos u du = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = 2ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du = ab(u + \frac{1}{2} \sin 2u) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\pi ab}$$

26.1.3 Changement de variables

THÉORÈME 89

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } f \text{ bornée sur } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{Soit } \phi : \Delta \longrightarrow \mathcal{D} / \phi(u, v) = (x, y) \text{ telle que } \phi \text{ bijective et } \phi, \phi^{-1} \text{ de classe } C^1 \\ \text{Alors } \int \int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int \int_{\Delta} f(\phi(u, v)) |\det J_{\phi}(u, v)| du dv \end{array} \right.$$

Ex4: Calculer $\int \int_{\mathcal{D}} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2 + 2} dx dy$ avec $\mathcal{D} = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$

\mathcal{D} est le disque unité ce qui suggère l'utilisation de coordonnées polaires. On pose alors:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto \phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a vu que $J_{\phi}(r, \theta) = r \Rightarrow I = \int \int_{\Delta} \frac{r^2(\cos \theta + \sin \theta)^2}{r^2 + 2} r dr d\theta$ avec

$$\begin{aligned}\Delta &= \{(r, \theta) / 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\} \\ \Rightarrow I &= \int_0^1 \frac{r^3}{r^2+2} dr \times \int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\theta) d\theta = I_1 \times I_2 \\ I_1 &= \int_0^1 \left(r - \frac{2r}{r^2+2}\right) dr = \left(\frac{1}{2}r^2 - \ln(2+r^2)\right)_0^1 = \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} \text{ et} \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\theta) d\theta = \left(\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta\right)_0^{2\pi} = 2\pi \\ \Rightarrow I &= \pi \left(1 + 2 \ln \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

26.2 Intégrales triples

26.2.1 Définition

Sur le même principe que dans le paragraphe précédent, on pose:

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} dy \int_{v_1(x,y)}^{v_2(x,y)} dz$$

Où \mathcal{V} est un domaine fermé borné de \mathbb{R}^3 , f intégrable et continue sur \mathcal{V} à valeurs dans \mathbb{R} , $v_1(x, y)$ et $v_2(x, y)$ sont les surfaces représentant la coupe inférieure et supérieure de \mathcal{V} . $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont les courbes représentant les coupes du domaine d'intégration de l'intégrale double obtenue en intégrant en z .

On peut aussi écrire:

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dz \int \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

Où D_z est la surface obtenue en interceptant le volume \mathcal{V} par un plan parallèle à (xOy) et passant par $(0, 0, z)$.

Ex5: Calculer $\int \int \int_{\mathcal{D}} y \sin(x^2 z) dx dy dz$ avec

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2 < x < 3, 0 < y < 1, 0 < z < \frac{\pi}{2x^2}\}$$

$$J = \int \int_{[2,3] \times [0,1]} dx dy \int_0^{\pi/2x^2} y \sin(x^2 z) dz = \int_2^3 \int_0^1 \frac{y}{x^2} dx dy = \int_2^3 \frac{dx}{x^2} \int_0^1 y dy = \frac{1}{12}$$

26.2.2 Changement de variables

THÉORÈME 90

Sur le même principe que précédemment, en posant $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, bijective de Δ sur \mathcal{V} , on a:

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} f(\phi(u, v, w)) |J_{\phi}(u, v, w)| du dv dw$$

Ex6: Calculer $I = \int \int \int_{\mathcal{V}} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ où \mathcal{V} est la couronne sphérique
 $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 < OM < 2\}$

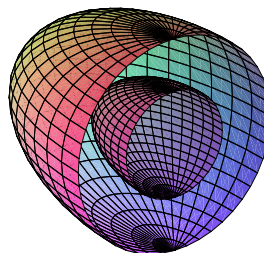


Figure 26.5: Section du domaine d'intégration

On a tout intérêt à utiliser des coordonnées sphériques et l'on pose donc:

$$\Lambda : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r, \theta, \phi) \longmapsto \Lambda(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

Un calcul rapide montre que $J_\Lambda(r, \theta, \phi) = r^2 \cos \phi$,

$$\Rightarrow I = \int \int \int_{\Delta} \frac{r^2 \cos \phi \, dr d\theta d\phi}{r \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} \int_1^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \, d\phi = \left(\frac{1}{2}r^2\right)_1^2 \times 2\pi \times (\sin \phi)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{6\pi}$$

REMARQUE 23

• $\mathcal{V} = I \times J \times K$ et $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$

$$\Rightarrow \int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_I g(x) dx \int_J h(y) dy \int_K k(z) dz$$

• Comme au paragraphe précédent, $\boxed{\int \int \int_{\mathcal{V}} dx dy dz = \text{vol}(\mathcal{V})}$

Partie IV

Annexes

Chapitre 27

Structures algébriques

27.1 Elements de logique

27.2 Théorie des ensembles

27.2.1 Appartenance, inclusion

Il s'agit dans ce chapitre de donner des éléments sur les différentes structures algébriques dont nous nous servons tout au long du cours, en restant à un niveau raisonnable. Ce chapitre n'est pas indispensable à la compréhension des différentes leçons, mais sera très utiles pour les étudiants souhaitant attaquer les annexes qui suivent.

Vous pouvez vous reporter au chapitre sur le dénombrement pour des rappels sur le présent paragraphe.

DÉFINITION 109

|| *Un ensemble est une collection d'objets.*

Pour indiquer qu'un élément e appartient à un ensemble E on notera $e \in E$. Dans le cas contraire, on notera $e \notin E$.

On peut définir un ensemble en énumérant ses éléments ou bien en le caractérisant par une ou plusieurs propriétés.

On admet l'existence d'un ensemble ne contenant aucun élément et qui s'appelle l'ensemble vide. On le note \emptyset .

Considérons deux ensembles E et F . On dit que F est inclus dans E et l'on note $F \subset E$ si tout élément de F est aussi un élément de E . En ce cas, on dira que F est un sous-ensemble de E .

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. Pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on utilise souvent la propriété suivante: $E = F \iff E \subset F$ et $F \subset E$

Ensemble des parties.

Chapitre 28

Théorie de l'information

28.1 Canal de communication

Un canal de communication est une représentation mathématique d'un processus qui permet un échange d'information entre un émetteur et un récepteur.

La source d'information est assimilée à une variable aléatoire susceptible de prendre un certain nombre de valeurs (appelés états) avec une probabilité donnée

On part d'un alphabet \mathcal{A} dont les éléments sont appelés des symboles et l'on souhaite transmettre ces symboles de façon fiable entre l'émetteur et le récepteur. Le codage de canal consiste à assigner à chaque état s_i de la source une séquence de symboles de l'alphabet. Une telle séquence s'appelle un mot.

Un code à décodage unique est formé de telle manière qu'à tout message émis ne corresponde qu'une seule séquence de symboles du code. Pour ce faire, il faut et il suffit qu'à toute séquence de message de longueur n , ne corresponde qu'une unique séquence de symboles du code. Notion de code préfixe. Construction d'un code à l'aide d'un graphe. Inégalité de Kraft.

Résumons: Le codage consiste à affecter à chaque état de s_i de la source une séquence de n_i symboles de l'alphabet de base N du code choisi. Il est nécessaire que le code obtenu soit à décodage unique afin de pouvoir discerner les différents messages. De plus, chaque état s_i et donc chaque séquence de n_i symboles, a la probabilité n_i d'apparaître.

28.2 Entropie et information

Entropie d'un évènement $h = \log_2(A)$

L'information doit être d'autant plus grande que la probabilité est petite.

La mesure de l'information est une fonction croissante et continue.

La somme de l'information de deux sources indépendantes est la somme des informations de chacune d'elle.

L'information est positive.

L'unité est le Shannon. 1 Shannon correspond à la quantité d'information apporté par la réponse à une question qui possède deux réponses possibles équiprobables.

La quantité d'information moyenne produite par une source de M messages est la moyenne des quantités d'information de chaque message. On a $H = - \sum_{i=1}^M p_i \log_2(p_i)$

On mesure en Shannon par état ou par symbole ou par message. Pour la langue française, des tests statistiques ont montré que l'entropie vaut environ 1.5 Shannon / lettre.

Exemple du canal binaire et du canal uniforme.

Entropie d'une VA et d'un couple (X, Y) .

$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ avec égalité si indépendance.

Entropie conditionnelle

$H(X, Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y)$

Information mutuelle entre l'entrée et la sortie d'un canal de communication. L'information gagnée par l'observation d'une réalisation de Y est $I(X, Y) = H(X) - H(X/Y)$ est l'information moyenne par

symbole contenue dans l'alphabet Y au sujet de l'alphabet X . Et l'on a également $I(X, Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(Y/X)$ d'où le terme d'information mutuelle.

L'information transmise à un observateur est la différence entre l'incertitude sur X et l'incertitude qui lui reste après l'observation de Y . $I(X, Y)$ mesure la corrélation entre l'émetteur et le récepteur.

Capacité d'un canal $\mathcal{C} = \max_i I(X, Y)$

C'est la valeur maximale de l'information mutuelle moyenne mesurée sur l'ensemble des lois de probabilités possibles de l'entrée X . C'est la plus grande quantité d'information qui peut être transmise par le canal. Elle ne dépend que du canal.

Matrice de transition $M = (\mathbb{P}(y_j/x_i))_{i,j}$

$$\mathbb{P}(y_j) = \sum_i \mathbb{P}(x_i) \mathbb{P}(y_j/x_i)$$

Exemple du canal binaire.

Code optimal si la longueur moyenne du code est minimale: Exemple de Fano et de Huffman, de Morse. Rapport avec l'entropie.

Efficacité et redondance d'un code.

L'entropie de la source S étant le plus petit nombre de symboles qui représente en moyenne chaque message codé, on pourra toujours coder

Débit et vitesse de transmission.

Chapitre 29

Introduction aux codes linéaires

Chapitre 30

Introduction aux codes cycliques

Chapitre 31

Introduction aux codes convolutifs

Chapitre 32

Introduction à la cryptographie

Bibliographie

Voici une liste d'ouvrages disponibles à la bibliothèque de l'IUT:

Calcul différentiel et intégral.

de F.AYRES, série Schaum

Il s'agit d'un livre d'exercices corrigés qui contient beaucoup d'exercices très classiques.

Mathématiques de base.

de F.AYRES, série Schaum

Idem ci dessus

Mathématiques.

de E.AZOULAY et J.AVIGNANT

Une série de 3 tomes d'exercices corrigés adaptés aux IUT et BTS

Mathématiques.

de THULLIER et BELLOC

Une série de 4 tomes de cours et d'exercices corrigés pour IUT. Le niveau est assez relevé.

Mathématiques spécialité groupe A.

de H.COLLET et B.GIRARD, collection Nathan

Livre de cours et d'exercices niveau BTS industriels. Niveau facile utile pour assimiler le cours.

Mathématiques.

de E.AZOULAY et J.AVIGNANT

Une série de 3 tomes d'exercices corrigés adaptés aux IUT et BTS

Algèbre générale, Deug MIAS.

de DENMAT et HEUALME, éditions Dunod.

Il s'agit de TD corrigés, niveau DEUG. Assez costaud.

Mathématiques.

de J.MAYSONNAVE, G.LION, H.SUREAU, collection Flash U

Ce sont de petits livres niveau DEUG. Il y a plusieurs tomes (algèbre 1 et 2, analyse, probas, mise à niveau bac-deug). Le niveau est assez fort, mais le contenu est très intéressant.

Outils et modèles mathématiques.

de FLORENT et LAUTON, éditions Vuibert.

Vieux livres dont le programme correspond à celui des IUT. Le contenu est d'un niveau élevé (4 tomes sont disponibles au total).

Comprendre et appliquer.

de HIRSCH et GILORMINI, éditions Masson.

Livrets rouges sur différentes leçons qui contiennent des exercices corrigés d'un bon niveau. Plusieurs tomes sont disponibles.

Mathématiques pour le Deug.

de D.PROCHASSON

Livres d'exercices corrigés (il y a deux tomes)

Mathématiques DUT/BTS industriels.

de LARCHER et PARIENTE, éditions techniplus

C'est le livre le plus adapté au programme de GTR (il contient tout le programme en un seul volume).

On y trouve un résumé de cours et des exercices corrigés. Le niveau est néanmoins assez élevé.

TOP Exos.

Il s'agit de livrets d'exercices pour BTS. Le niveau est facile et permet de s'entraîner.



Les livres suivants sont des ouvrages de vulgarisation ou des ouvrages de fiction traitant des mathématiques:

- Cryptonomicon, de Neal Stephenson, en livre de poche. De la science fiction dans laquelle on croise Alan Turing et Von Neumann. On y parle de cryptographie et d'informatique.
- Le livre de sable, de Jorge Luis Borges, en folio. Ce sont des nouvelles dont certaines expliquent de façon limpide des concepts mathématiques difficiles.
- Le dernier théorème de Fermat, de Simon Singh, ed Pluriel. L'historique de la démonstration, depuis les grecs jusqu'à la fin des années 1990.
- Histoire des codes secrets, de Simon Singh, en livre de poche. L'histoire de la cryptographie.
- Le théorème du perroquet, de Denis Guedj.
- Oncle Petros ou la conjecture de Goldbach, de Apostolos Doxiadis.
- L'équation du nénuphar, d'Albert Jacquard.
- Equation à deux inconnus, de André Paul Duchâteau.
- L'équation de Kolmogoroff, de M. Petit.
- Odile, de Raymond Queneau.



Voici quelques films traitant des mathématiques:

- Un homme d'exception
- La vie à l'infini
- Will hunting
- Pi



Des sites webs et des portails de mathématiques:

- www.chronomath.com
- www.les-mathematiques.net
- www.epsmag.com
- mathworld.wolfram.com
- www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/panorama
- math-doc.ujf-grenoble.fr
- www.iut-bethune.univ-artois.fr/sokol
- infiniment.free.fr
- jeanluc.vimbert.free.fr/home.htm
- www.univ-irem.fr

