Mesure de probabilité, indépendance.

I. Des boules et des cartes - encore -

1°. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelles sont les probabilités d'obtenir 4 as, un carré, puis une main de 3 coeurs et 2 dames ?
2°. On considère 3 urnes numérotées de 1 à 3. L'urne n°1 contient 1 boule blanche et 2 boules noires. L'urne n°2, 2 blanches et 1 noire et la n°3 contient 3 boules blanches. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne. Quelle la proba que la boule soit blanche ?
3°. On lance trois dés normaux de façon indépendante. Calculer la probabilité que la somme des numéros soit égale à 10. Calculer la probabilité pour qu'un double apparaisse.
4°. Un tiercé compte 20 chevaux au départ. Quelle est la probabilité de gagner dans l'ordre et dans le désordre ?
5°. Une urne contient 2 boules blanches et 4 noires. On extrait successivement et au hasard toutes les boules. Quelle est la probabilité que les boules blanches soient extraites lors des 4 premiers tirages ?
6°. Un problème d'examen comporte deux questions Q_1 et Q_2. Il y a 3 réponses possibles à Q_1 et 5 réponses à Q_2. L'étudiant répond au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins une réponse correcte ? Au moins une réponse fausse ?
7°. On gare 8 voitures dans un parking de 12 places. Quelle est la probabilité pour que les 4 places libres soient adjacentes ?
8°. 5 objets sont placés au hasard dans 4 tiroirs. Quelle est la probabilité que tous les tiroirs soient non vides ?
9°. 10 range dix livres au hasard. Quelle est la probabilité que les trois tomes d'une série se retrouvent l'un à côté de l'autre ?
10°. On range les n tomes de l'encyclopédie multiversalis ($n = 666$). Quelle est la probabilité que les volumes soient dans le bon ordre ?

II. Poker.

Le poker se joue avec un jeu de 32 ou 52 cartes. Chaque joueur possède une main constituée de 5 cartes. Dans une main, l'ordre n'a pas d'importance. Une carte se caractérise par sa hauteur et par sa couleur (coeur, carreau, trêfle, pique). On suppose ici que l'on travaille avec un jeu de 32 cartes.

1°. Déterminer le nombre total de mains possibles.
2°. Une paire est un groupe de 2 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec une paire ?
3°. Une double paire est formée de deux paires. Combien existe-t-il de mains avec une double paire ?
4°. Un brelan est un groupe de 3 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec un brelan ?
5°. Un full est une main composée d'une paire et d'un brelan. Combien existe-t-il de fulls ?
6°. Une quinte est une main composée de cinq cartes de hauteurs consécutives. Combien existe-t-il de quintes ?
7°. Un carré est un groupe de 4 cartes de même hauteur. Combien existe-t-il de mains avec un carré ?
8°. Une couleur est une main de 5 cartes de même couleur et de valeurs différentes. Combien en existe-t-il ?
9°. Une quinte flush est une main de 5 cartes de hauteurs consécutives et de même couleur. Combien en existe-t-il ?
10°. Combien existe-t-il de mains "banales" sans aucune figure ?
11°. On pose l'équiprobabilité sur l'ensemble de toutes les mains possibles (on suppose qu'il n'y a pas de tricheurs). Calculer la probabilité de chacune des figures ci-dessus.
12°. On possède une paire que l'on souhaite transformer en brelan en changeant une carte. Calculer alors la probabilité d'obtenir un brelan.
13°. Calculer la probabilité d'obtenir une double paire en changeant trois cartes à partir d'une paire.
14°. Calculer la probabilité d'obtenir un full en changeant trois cartes à partir d'une paire, puis deux cartes à partir d'un brelan.
15°. Calculer la probabilité d'améliorer une carte haute en une paire, puis en un brelan.
16° Calculer la probabilité de construire une couleur ou une quinte lorsqu'il ne manque qu'une ou deux cartes pour y parvenir. [1]

1. Pour bien comprendre cet exercice, il est indispensable de voir les films suivants :
"Le kid de Cincinnati" de Norman Jewison (1965) avec Steve MacQueen et "Les tricheurs" de John Dahl (1998) avec Matt Damon.

III.

Soient A,B,C trois évènements d'une expérience aléatoire. Trouver les expressions des évènements :

1°. A et B sont réalisés, mais pas C.
2°. Les trois évènements sont réalisés.
3°. Au moins l'un des évènements est réalisé.
4°. Deux ou plus sont réalisés.
5°. Deux au plus sont réalisés.

IV.

Une urne contient r boules blanches et s boules noires. On extrait simultanément et au hasard, n boules $(1 \leq n < r+s)$:
1°. Comment modéliser cette expérience ?
2°. Calculer la probabilité de l'évènement A_k = "Parmi les n boules, k sont blanches"
3°. Quelle relation obtient-on sur les coefficients binomiaux ?

V.

Au tapis vert, on sépare un jeu de 32 cartes en 4 piles de 8 cartes de la même couleur. Le joueur sélectionne mentalement une hauteur de carte pour chaque couleur. On tire ensuite une carte de chaque pile.
1°. Comment modéliser cette expérience ?
2°. Quelle est la probabilité qu'un joueur ait deviné exactement k bonnes cartes pour $k = 0, 1, ..., 4$?

VI. Roméo & Juliette.

Roméo et Juliette se donnent rendez-vous entre 10 et 11 heures.
1°. Ils conviennent de ne pas attendre plus de 15 minutes mais arrivent au lieu de rendez-vous de façon aléatoire. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?
2°. Combien de temps doivent-ils attendre pour que leur probabilité de rencontre soit supérieure ou égale à 0.5.

VII.

Une machine comprend trois organes A, B et C indépendants et nécessaires à son fonctionnement.
On note I l'évènement " l'organe I est défaillant " et l'on donne $\mathbb{P}(A) = 0.02$, $\mathbb{P}(B) = 0.05$ et $\mathbb{P}(C) = 0.1$.
Calculer la probabilité que la machine tombe en panne.

VIII.

On jette un dé deux fois de suite et l'on considère les évènements suivants :

A="Le premier nombre obtenu est pair" B="Le second nombre obtenu est pair"
C="La somme des nombres est impaire" D="Le 3 est obtenu au moins une fois"

1°. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$. Les évènements A,B,C sont-ils deux à deux indépendants ?
2°. Sont-ils indépendants dans leur ensemble ?
3°. Calculer $\mathbb{P}(C \cap D)$, $\mathbb{P}(C \cup D)$, $\mathbb{P}(C \cap \bar{D})$, $\mathbb{P}((C \cap \bar{D}) \cup \bar{C})$.

IX.

Un circuit électronique comprend n éléments identiques et indépendants dont la probabilité de tomber en panne est de 0.002 chacun.
1°. Calculer la probabilité que le circuit tombe en panne si $n = 4$.
2°. On remplace chaque élément par un couple d'éléments en parallèle. Quelle est la probabilité que le circuit tombe en panne ?

X. Indépendance.

1°. Deux évènements indépendants peuvent-ils être disjoints ?
2°. Montrer que : (A et B indépendants) $\iff$ (A et $\bar{B}$ indépendants) $\iff$ ($\bar{A}$ et $\bar{B}$ indépendants)
3°. Montrer que ($\forall B$, A et B indépendants) $\iff$ ($\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$)
4°. Si A,B,C sont trois évènements deux à deux indépendants, montrer que A est indépendant de $B \cup C$ et de $B \cap C$

XI. Equation aléatoire

On considère les résultats du lancer de deux dés a et b.
Calculer la probabilité que l'équation $x^2 + ax + b = 0$ possède des solutions.

XII.

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{10(x-8)}{x(x-1)}$ et l'on pose $\alpha = 8 + 2\sqrt{14}$ et $\beta = 8 - 2\sqrt{14}$

1°. Etudier f et la décomposer en éléments simples.

Une urne contient n boules avec $n > 8$ dont 3 jaunes et 5 vertes ; les autres sont rouges.

2°. On suppose que $n = 16$. On tire une boule, on la remet dans l'urne, puis en on tire une seconde.
Calculer la probabilité des évènements suivants :

A="On a deux boules rouges"	B="On a une boule rouge et une verte"
C="On a une boule rouge ou une jaune"	D="On a au moins une boule rouge"

3°. On effectue maintenant le tirage des deux boules de façon simultanée. Reprendre les questions précédentes.
4°. On suppose maintenant que n est quelconque et que les tirages sont sans remise. Calculer la probabilité de l'évènement A_n="On a tirer une boule rouge et une verte". Déterminer n pour que cette probabilité soit maximale et calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(An)$

XIII. Paradoxe des anniversaires.

Quelle est la probabilité que dans une classe de n élèves, deux élèves aient la même date d'anniversaire ?

XIV. Formule de Poincaré.

On considère une expérience aléatoire modélisée par un ensemble Ω et n évènements $A_1, ..., A_n$.
1°. Démontrer par récurrence la formule de Poincaré

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < i_2 < ... < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$$

2°. 4 personnes déposent leur chapeau en entrant dans une salle et en reprennent un au hasard en sortant.
Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne retrouve son chapeau ?

XV. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Une particule initialement placée en 0 se déplace au hasard sur $\mathbb{Z}$ par saut d'amplitude 1 ou -1, avec probabilité 1/2. On appelle trajectoire de la particule la suite des abscisses successives dans un déplacement de n sauts. On désigne par Ω l'ensemble de ces trajectoires et l'on définit $\mathbb{P}$ comme l'équiprobabilité sur Ω.

1°. Expliciter Ω et son cardinal, puis représenter graphiquement les éléments de Ω par des lignes polygonales de $[0, n] \times \mathbb{Z}$. Indiquer les positions possibles de la particule après $n = 2$ et $n = 3$ sauts et les probabilités correspondantes.

2°. n est maintenant quelconque. Si $\omega \in \Omega$, on note $k(\omega)$ le nombre de sauts d'amplitude 1 et $l(\omega)$ le nombre de sauts d'amplitude -1 lors de la trajectoire ω. Que vaut $k(\omega) + l(\omega)$? Que représente $k(\omega) - l(\omega)$?
3°. Soit $x \in \mathbb{Z}$ et A_x l'évènement "la particule est en x après n sauts". Montrer que $A_x \neq \emptyset$ si et seulement s'il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = n$ et $k - l = x$. Résoudre le système obtenu et en déduire $\mathbb{P}(A_x)$

Probabilité conditionnelle.

XVI. Jetons à deux faces

Une urne contient 3 jetons avec 2 faces, chaque face étant noire ou blanche.
L'un des jetons a les deux face noires, un autre a les deux faces blanches et le dernier possède une face blanche et une noire. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un jeton au hasard et à deviner la couleur de la face cachée.

On pourra noter A_v l'évènement " la face visible est de couleur A " et A_c " l'évènement la face cachée est de couleur A ".

1°. Construire l'ensemble Ω correspondant et définir une probabilité sur cet ensemble (On pourra choisir comme élément de Ω des couples de la forme (n°jeton,n°face)).

2°. Calculer $\mathbb{P}[N_C/N_V]$. Répondre à la question posée.

XVII.

On considère deux urnes A et B qui contiennent respectivement 1 boule noire et 2 rouges et 2 boules noires et deux rouges. On effectue un tirage à pile ou face équitable. Si l'on fait pile, on choisit une boule dans A sinon on choisit une boule dans B.
On considère les évènements suivants :

A="On tire une boule dans A" (idem pour B)
N="On tire une boule noire" (idem pour R)

1°. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(R/A)$ et $\mathbb{P}(R/B)$
2°. Calculer $\mathbb{P}(R)$ puis $\mathbb{P}(A/R)$
3°. Les évènements A et R sont-ils indépendants ? disjoints ?

XVIII.

Soient U et V deux urnes. U contient 75% de boules blanches et V 50%. On suppose en outre que U contient trois fois plus de boules que V. On place toutes les boules de U et de V dans une même urne et on tire un boule au hasard. On constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U ?

XIX.

Une famille a deux enfants. Le facteur sonne et c'est une fille qui ouvre. Quelle est la probabilité que le second enfant soit un garçon ?

XX. BE 1999.

On dispose de 3 urnes U, V et W. U comprend 4 boules marquées v et une marquée w.
L'urne V comprend 9 boules blanches et une noire.
L'urne W comprend 4 boules blanches, trois noires et trois jaunes.

On tire au hasard une boule de l'urne U.
Si la boule tirée est marquée v, on tire alors au hasard une deuxième boule de l'urne V.
Si elle est marquée w, on tire alors une deuxième boule de l'urne W.

On pose V=" La première boule tirée est marquée v " et C=" La deuxième boule tirée est de couleur C "

1°. Calculer $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(J/V)$, $\mathbb{P}(N/V)$, $\mathbb{P}(N)$, $\mathbb{P}(V/N)$.
2°. Les évènements V et J sont-ils indépendants ?
3°. Les évènements W et J sont-ils disjoints ?

XXI.

Suite à une épidémie, on estime 60% de la population atteinte par une maladie M. On effectue alors deux tests biologiques dont les résultats sont indépendants. Les deux tests donnent 95% de résultats positifs pour les personnes atteintes par M et 10% de résultats positifs pour les personnes non atteintes.

1°. Quelle est la probabilité que la personne soit malade si les deux tests sont positifs ?
2°. Quelle est la probabilité que le second test soit positif si le premier l'est ?

XXII. Test de dépistage.

Un test destiné à déceler la présence d'une maladie s'avère positif dans 99% des cas si la personne est malade et négatif dans la meme proportion si la personne est saine. Ce test est considéré comme efficace si, étant positif chez une personne choisie au hasard, cette personne est effectivement malade avec une probabilité supérieure à 0.95.

A partir de quel pourcentage de personnes atteintes de la maladie le test est-il efficace ?

XXIII.

On considère un dé normal à 6 faces ainsi que deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules rouges et vertes.
U_1 contient 2 boules rouges et 4 vertes, tandis que U_2 contient 3 boules rouges et 3 vertes.
L'expérience aléatoire consiste à lancer le dé ; si le résultat est inférieur ou égal à 4, on choisit une boule dans l'urne U_1, sinon on choisit une boule dans l'urne U_2.

On notera U_i l'évènement "on tire une boule dans l'urne n°i ", R l'évènement "on tire une boule rouge" et V l'évènement "on tire une boule verte".

1°. Calculer $\mathbb{P}(U_1)$, $\mathbb{P}(U_2)$, $\mathbb{P}(R/U_1)$, $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(U_2/R)$
2°. Les évènements R et U_1 sont-ils indépendants ? Disjoints ?

XXIV.

Une entreprise de sondage par téléphone appelle des personnes (c'est très pénible). Lors du premier appel, la personne a une probabilité 0.4 d'être absente. Si elle est présente, elle accepte de répondre avec probabilité 0.2. Lorsque la personne est absente, on rappelle une seconde fois. La probabilité de l'avoir est alors de 0.3 et elle accepte de répondre avec probabilité 0.2. On considère les évènements suivants :
A_i="La personne est absente à l'appel numéro i"
D_i="La personne répond à l'appel numéro i"
R="La personne accepte de répondre"

1°. Calculer $\mathbb{P}(D_1)$.
2°. Calculer $\mathbb{P}(D_2)$ puis en déduire $\mathbb{P}(R)$.
3°. Sachant qu'une personne a accepté de répondre, quelle est la probabilité que cette réponse ait eu lieu lors du premier appel ?
4°. On suppose les sondages indépendants. Quelle est la probabilité qu'au moins une personne sur 20 contactée accepte de répondre ?

XXV.

Lors du premier tour d'une élection, les trois candidats en présence A,B et C ont obtenu respectivement 15 %, 40% et 45% des voix. Il n'y a pas eu d'abstentions. Un sondage effectué avant le second tour indique que, après désistement de A, 1/3 des ses électeurs s'abstiendront le dimanche suivant tandis que les autres voteront à raison de 40% pour B et 60% pour C. Le même sondage indique qu'en raison des fréquentes déclarations contradictoires des candidats, 20% des électeurs de B se reporteront sur C et 30% des électeurs de C se reporteront sur B.

On considère les évènements suivants :
A_1= "l'individu choisi a voté pour A au premier tour"
A_2= "l'individu choisi s'abstiendra au second tour"
B_1= "l'individu choisi a voté pour B au premier tour"
B_2= "l'individu choisi votera pour B au second tour"
C_1= "l'individu choisi a voté pour C au premier tour"
C_2= "l'individu choisi votera pour C au second tour"

1°. Interpréter les évènements $A_1 \cap A_2^c$ et $A_1 \cap B_2$
2°. Traduire l'énoncé en termes probabilistes.
3°. Calculer $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c)$. Montrer que $\mathbb{P}(B_2 \cap A_1) = \mathbb{P}(B_2 \cap A_1 \cap A_2^c)$ puis en déduire $\mathbb{P}(B_2 \cap A_1)$
4°. Calculer $\mathbb{P}(B_2)$ et en déduire qui sera élu.

XXVI.

Les trois composants α, β, γ d'un circuit sont sujets à pannes. Le signal émis passe d'abord dans α, puis traverse β et γ avant d'arriver au récepteur (cf. figure). On note S l'évènement "le signal a été reçu". On note A,B,C respectivement les évènements α fonctionne, β fonctionne et γ fonctionne.
On donne $\mathbb{P}(A) = 0.9$, $\mathbb{P}(B/A) = 0.9$, $\mathbb{P}(C/A \cap B^c) = 0.5$,

1°. Exprimer S à l'aide de A,B,C.
2°. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B^c)$

XXVII.

On dispose de deux urnes U et V.
U comporte a boules blanches et b boules noires. V comporte b blanches et a noires. Les tirages s'effectuent avec remise.
On note U_n l'évènement "le nième tirage a lieu dans U" et B_n l'évènement "la nième boule est blanche".
Si a l'étape n on a tiré une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectuera dans U, sinon il s'effectura dans V.
On pose enfin $u_n = \mathbb{P}(B_n)$

1°. Calculer $\mathbb{P}(B_n/U_n)$ et $\mathbb{P}(B_n/V_n)$
2°. Calculer $\mathbb{P}(B_{n+1}/B_n)$ et $\mathbb{P}(B_{n+1}/\bar{B}_n)$
3°. En déduire une relation entre u_{n+1} et u_n
4°. On pose $v_n = u_n - 1/2$, $\forall n \geq 1$

A l'aide de la question précédente, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire v_n en fonction de n, a et b (Le premier tirage s'effectue toujours dans U).

5°. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

6°. On change de règle : si à l'étape n on tire une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectue dans la même urne ; sinon on change d'urne. Calculer $\mathbb{P}(U_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n \geq 1$
7°. Quelle est la meilleure règle de conduite si l'objectif est de tirer des boules blanches ?

XXVIII.

Une urne U_1 contient 1 boule noire et 5 blanches et une urne U_2 4 boules noires et 2 blanches. On tire une boule au hasard dans l'une des deux urnes, on note sa couleur et on la replace dans l'urne d'où elle provient. Si la boule est blanche, on effectue un autre tirage dans la meme urne, sinon on effectue le second tirage dans l'autre urne. On recommence cette expérience une infinité de fois.
1°. Calculer, en fonction du rang n de l'expérience, la probabilité u_n pour que le nième tirage s'effectue dans l'urne U_1.
2°. Calculer de même la probabilité v_n pour que le nième tirage donne une boule blanche.

XXIX.

1°. 4 personnes A,B,C,D se transmettent une histoire. Chacun dit la vérité avec probabilité 1/3 et modifie l'histoire avec probabilité 2/3. On suppose que D a dit la vérité. Quelle est la probabilité que A ait dit la vérité ?
2°. Généraliser à n personnes. Que se passe-t-il si $n \to +\infty$?

XXX. BE 2004

Une urne contient 8 boules : trois boules rouges numérotées $1, 2, 3$, deux vertes numérotées $4, 5$ et trois bleues numérotées $6, 7, 8$. On suppose les boules indiscernables au toucher et l'on en choisit une au hasard. On note I l'évènement "le numéro tiré est impair" et l'on note C l'évènement "la boule tirée est de couleur C".

1°. Calculer $\mathbb{P}(R \cap I)$
2°. Les évènements V et I sont-ils indépendants ? Qu'en est-il de R et I ? De R et V ?
3°. Calculer $\mathbb{P}(R \cup I)$
4°. On tire successivement trois boules avec remise. Calculer les probabilités des évènements suivants :
- On tire d'abord une rouge, puis une verte, puis une bleue.
- On tire trois boules de couleurs différentes.
- On tire une verte parmi les trois boules.
- On tire trois boules vertes.
- On tire trois boules de même couleur.

Applications des probabilités aux télécommunications.

XXXI. Quantité d'information.

La théorie de l'information fournit une appréciation quantitative de l'information contenue dans des signaux et permet d'évaluer la capacité d'un système à communiquer une information de la source au destinataire. Le modèle mathématique de l'information est une fonction des probabilités de sortie des messages.

La quantité d'information est une mesure de l'inattendu, de l'improbable. Pour la quantifier, il faut préciser ce que l'on entend par information (sémantique ou syntaxe). Par exemple, considérons les phrases suivantes : "hier, un crocodile a mordu un homme" et "hier, un homme a mordu un crocodile". Ces phrases possèdent les mêmes mots, mais il est clair qu'elle ne représentent par la même quantité d'information. Cette quantité doit donc prendre en compte le sens et pas seulement le contenu.

En 1948, Claude Shannon a publié un article appelé "a mathematical theory of information" dans lequel il posait les bases de la théorie de l'information. Il définit la quantité d'information apportée par la réalisation d'un évènement comme une fonction décroissante de la probabilité. L'évènement certain apporte une quantité d'information nulle et la réalisation de deux évènements indépendants apporte une information égale à la somme des informations de chacun.

On pose $I(A) = \log \dfrac{1}{\mathbb{P}(A)} = -\log \mathbb{P}(A)$

On pourrait montrer que cette définition de l'information est la seule possible si l'on veut que les propriétés ci-dessus soient vérifiées.

L'unité d'information proposée initialement a été le bit pour "binary unit". Pour ne pas confondre avec le bit en informatique, la norme ISO propose maintenant le Shannon (symbole Sh) comme unité de la quantité d'information. Le shannon est la quantité d'information apportée par la réalisation d'un évènement équiprobable parmi 2. Les logarithmes utilisés seront des logarithmes à base 2. Ainsi, 1 Sh $= -\log_2(1/2)$

1°. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Calculer $I(\Omega)$, $I(A \cap B)$ et montrer que si $A \subset B$ alors $I(A) \geq I(B)$. Montrer que $I(A) \geq 0$ pour tout évènement A de Ω.

2°. On appelle quantité d'information conditionnelle de A sachant B le réel $I(A/B) = -\log \mathbb{P}(A/B)$
On appelle information mutuelle de deux évènements A et B et l'on note $I(A; B)$ la quantité

$$I(A; B) = \log \left(\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)} \right)$$

Démontrer que $I(A; B) = I(A/B) - I(B)$ et $I(A; B) = I(B; A)$

3°. Si $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ et $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/n$ calculer $I(\{\omega_i\})$.

Choisir une lettre parmi 26 apporte une information de $I = -\log_2(1/26) = \log_2(26) \simeq 4,7$ Sh
Pour n objets équiprobables, $I = \log_2 n$ Sh
4°. Si $\Omega = \{\pi, \phi\}$ avec $\mathbb{P}(\pi) = \mathbb{P}(\phi) = 1/2$, calculer $I(\{\pi\})$ et $I(\{\phi\})$.

5°. On considère un jeu de 32 cartes et des mains de 4 cartes. Calculer la quantité d'information des évènements suivants :

$E_1 =$ " Pas de carte inférieure au valet. "
$E_2 =$ " Pas de figure. "
$E_3 =$ " Quatre cartes de même valeurs. "
$E_4 =$ " Quatre as. "

XXXII. Canal binaire symétrique.

Une source émet des données binaires sous la forme de 0 et de 1 sur un canal de communication ; ont suppose que les bits émis sont indépendants les uns des autres et sont émis chacun avec probabilité 1/2. Le canal est bruité et les bits peuvent être erronés à la réception.

Notons E_i l'évènement "un i a été émis" pour $i = 0, 1$ et R_i l'évènement "un i a été reçu". Nous supposerons enfin que $\mathbb{P}(R_1/E_0) = \mathbb{P}(R_0/E_1) = p$, $p \in [0, 1]$.

Le schéma ci-contre donne le modèle d'un canal qui s'appelle canal binaire symétrique (en anglais ont dit BSC pour binary symetric channel).

1°. Calculer $\mathbb{P}(E_0)$, $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(R_0)$ et $\mathbb{P}(R_1)$
2°. Calculer $\mathbb{P}(E_0/R_1)$ $\mathbb{P}(E_1/R_0)$
3°. Calculer $\mathbb{P}(E_0/R_0)$ $\mathbb{P}(E_1/R_1)$
4°. On souhaite décider si un 0 ou un 1 a été émis ; calculer la probabilité α de se tromper.
5°. On ne suppose plus le canal symétrique et l'on donne $\mathbb{P}(R_0/E_0) = 0.9$, $\mathbb{P}(R_0/E_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(E_0) = \mathbb{P}(E_1) = 1/2$. Refaire les questions 1° à 4° avec ces nouvelles hypothèses.
6°. En général, on connait les probabilités $\mathbb{P}(E_i/R_j)$; on les appelle vraisemblance du canal tandis que les probabilités $\mathbb{P}(R_i/E_j)$ s'appellent probabilités à postériori.
Le critère du maximum de vraisemblance à postériori (MAP) est le suivant :
Si 0 est reçu, on décide que 0 a été émis si $\mathbb{P}(E_0/R_0) > \mathbb{P}(E_1/R_0)$
Si 1 est reçu, on décide que 1 a été émis si $\mathbb{P}(E_1/R_1) > \mathbb{P}(E_0/R_1)$
Montrer que le critère du MAP donne comme résultat :
0 reçu $\Rightarrow$ 0 émis si $0.31 \leq \mathbb{P}(E_0) \leq 1$ 1 reçu $\Rightarrow$ 1 émis si $0 \leq \mathbb{P}(E_0) \leq 0.86$

XXXIII. Matrices stochastiques.

XXXIV. Matrice d'un canal de communication.

Applications à la génétique.

XXXV.

Dans une population où le nombre de mâles est la moitié du nombre de femelles, la fréquence du caractère albinos est de 6% chez les mâles et de 36% chez les femelles. Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard soit albinos ? Quelle est la probabilité qu'un albinos de cette population soit un mâle.

XXXVI.

La maladie M est une maladie génétique. Dans les familles atteintes, seuls les garçons peuvent être malades ; un garçon a une chance sur deux d'avoir cette maladie. Les filles sont toujours indemnes. On considère que la probabilité de naissance d'une fille est la même que celle d'nu garçon. On note F l'évènement "naissance d'une fille", G l'évènement "naissance d'un garçon non malade" et M l'évènement "naissance d'un garçon malade". On étudie les familles de deux enfants.

1°. Déterminer l'ensemble univers de cette expérience aléatoire. A-t-on équiprobabilité sur cet ensemble ?
2°. Calculer $\mathbb{P}(MM)$, $\mathbb{P}(GG)$, $\mathbb{P}(FF)$.
3°. Si le premier enfant est une fille, quelle est la probabilité d'avoir un garçon malade comme second enfant ?

XXXVII.

Une souris femelle hétérozygote notée $(G; b)$ quant à la couleur de son poil (caractère gris dominant noté G et caractère blanc récessif noté b) a deux souriceaux : l'un gris et l'autre blanc. On admet qu'elle a eu ces souriceaux avec un mâle choisi au hasard quant à son caractère "couleur de poil".

Quelle est la probabilité que le père soit blanc ?

Mécanique et informatique quantique.

XXXVIII. Modèle de Ising.

Applications à la cryptographie.

0.0.1 .

Soient a, b, c trois nombres réels tels que $|b| < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = a$ et $u_{n+1} = bu_n + c$ pour $n \geq 1$. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour tout $n \geq 1$ par

$$v_n = u_n + \frac{c}{b-1}$$

1°. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique dont vous préciserez la raison et le premier terme en fonction de a, b, c.
2°. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

On dispose maintenant de deux urnes U et V. L'urne U contient 6 boules blanches et 4 noires, tandis que l'urne V contient 10 boules blanches et 5 noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes et on extrait une boule que l'on remet ensuite dans la même urne. Si la boule tirée est blanche, on effectue un nouveau tirage dans la même urne, sinon on effectue un tirage dans l'autre urne. On note E_n l'évènement "le nième tirage se fait dans l'urne U".

3°. Calculer $\mathbb{P}(E_1)$.
4°. Calculer $\mathbb{P}(E_2/E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2/\bar{E_1})$, puis calculer $\mathbb{P}(E_2)$
5°. Calculer $\mathbb{P}(E_{n+1}/E_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1}/\bar{E_n})$. En déduire $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap \bar{E_n})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$.
6°. Déterminer b et c tels que $\mathbb{P}(E_{n+1}) = b \times \mathbb{P}(E_n) + c$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n)$

0.0.2 .

Un composant électronique est fabriqué en grande série. On estime que 99% des composants sont fiables et on effectue un test de fiabilité sur chacun d'eux. Lorsque le composant est fiable, le test le confirme avec une probabilité de $0,995$. Lorsque le composant est défectueux, le test le confirme avec une probabilité de $0,99$. On notera F l'évènement "le composant est fiable" et T l'évènement "le test est positif" (c'est à dire que le composant est détecté comme fiable).

1°. Déterminer $\mathbb{P}(\bar{F} \cap \bar{T})$ et $\mathbb{P}(F \cap \bar{T})$
2°. En déduire $\mathbb{P}(\bar{T})$ puis $\mathbb{P}(T)$
3°. Déterminer la probabilité qu'un composant dont le test est négatif soit fiable.
4°. On choisit au hasard, successivement et avec remise, 20 composants dont le test est négatif. Calculer la probabilité qu'au moins un composant soit en fait fiable.

0.0.3 .

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n sacs S_1, S_2, ..., S_n, contenant des jetons noirs et blancs. Au départ, S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, tandis que les autres sacs contiennent 1 jeton noir et 1 blanc. On tire au hasard un jeton de S_1. On le met ensuite dans S_2 et on tire au hasard un jeton dans S_2, etc. On note E_k l'évènement "le jeton sorti de S_k est blanc".

1°. Déterminer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(E_2/E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2/\bar{E_1})$. En déduire $\mathbb{P}(E_2)$.
2°. Pour tout entier $k \geq 1$, on note $p_k = \mathbb{P}(E_k)$. Montrer que $3p_{k+1} = p_k + 1$
3°. Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ la suite définie par $u_k = p_k - 1/2$. Montrer que cette suite est géométrique, déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k$

0.0.4 .

Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux sont normaux, mais le troisième possède 3 faces numérotées 6 et les 3 autres numérotées 1. On tire, simultanément et au hasard, 2 dés parmi les 3 et on les lance. On note les évènements suivants :

A="Les deux dés sont nornaux".
B="Les deux faces supérieures sont numérotées 6".

1°. Définir $\bar{A}$, calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\bar{A})$
2°. Calculer $\mathbb{P}(B/A)$, puis $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B)$
3°. Calculer $\mathbb{P}(A/B)$

0.0.5 .

Une urne contient deux boules blanches et quatre noires, indistinguables au toucher. On effectue quatre tirages successifs sans remise.

1°. Calculer la probabilité de tirer, dans l'ordre, une noire, une noire, une noire puis une blanche.
2°. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche parmi les quatre boules tirées.
3°. On effectue maintenant quatre tirages successifs avec remise. Reprendre les questions précédentes.
4°. Pour $n > 0$, on effectue n tirages successifs avec remise et l'on note p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au dernier tirage uniquement. Calculer p_1, p_2, ..., p_n.
5°. Soit $S_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

0.0.6 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., n boules numérotées n.

1°. Combien l'urne contient-elle de boules ?
2°. On tire une boule au hasard dans l'urne en supposant tous les tirages équiprobables. En supposant que n est pair, exprimer en fonction de n la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro pair. Même question avec un numéro impair.
3°. On suppose que $n = 21$. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4 ?

0.0.7 .

1°. En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

2°. On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les place toutes au hasard dans n boites (pouvant contenir chacune de 0 à n boules). On note $\mathbb{P}_n$ la probabilité que chaque boite contienne exactement une boule.
Montrer que : $\mathbb{P}_n = \dfrac{n!}{n^n}$
3°. Montrer que pour tout $n > 0$, $\mathbb{P}_n \geq 2 \times \mathbb{P}_{n+1}$. En déduire que $\mathbb{P}_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n$

0.0.8 .

Un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) est constitué de 8 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard.

1°. Déterminer le nombre de réponses possibles à ce Q.C.M.
2°. Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres sont fausses.
3°. Calculer la probabilité pour que le candidat réponde correctement à exactement 6 questions.
4°. Quelle est la probabilité que le candidat soit reçu si on lui demande de donner au moins 6 réponses justes ?

0.0.9 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $(n + 1)$ boules vertes et $(n - 1)$ boules rouges. Une épreuve consiste à tirer une boule et l'on suppose l'équiprobabilité des tirages. Si la boule est rouge, on perd. Si la boule est verte, on gagne.

1°. Quelle est la probabilité de gagner ?
2°. On rajoute deux boules oranges dans l'urne. Durant l'épreuve, si l'on tire une boule orange, on ne remet pas cette boule dans l'urne et on effectue un nouveau tirage. Quelle est la probabilité de gagner ? De perdre ?

0.0.10 .

On considère n points distincts sur un cercle.

1°. Quand on joint ces points deux à deux, combien définit-on de droites ?
2°. Combien existe-t-il de triangles ayant leurs trois sommets en ces points ?

3°. On suppose que parmi les droites, il n'en existe pas deux parallèles et qu'il n'en existe pas trois concourantes en un autre point que les n points du cercle. Déterminer en combien de points, autres que ces n points, se coupent ces droites.

0.0.11 .

Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5, trois bleues numérotées de 6 à 8 et deux vertes numérotées 9 et 10. On tire deux boules simultanément dans l'urne, en supposant les tirages équiprobables.

1°. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A="Les deux boules ont des numéros impairs."
B="Les deux boules ont la même couleur."
C="Les deux boules ont des numéros impairs et sont de même couleur."
D="Les deux boules sont de couleur différente."
E="Les deux boules sont de couleur différente et portent des numéros impairs."
2°. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3°. On vient de tirer deux boules de couleurs différentes. Quelle est la probabilité qu'elles portent des numéros impairs ?

0.0.12 .

On teste un médicament sur des individus ayant un taux anormalement élevé de glycémie. 60% des individus prennent le médicament, pendant que les autres reçoivent un placebo. On étudie à l'aide d'un test le taux de glycémie. Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de $0,8$; on ne constate aucune baisse de taux pour 90% des personnes ayant pris le placebo. On note :

M l'évènement "avoir pris un médicament" et B l'évènement "avoir une baisse du taux de glycémie."

1°. Calculer $\mathbb{P}(B)$
2°. Quelle est la probabilité qu'un individu (pris au hasard) ait pris le médicament si l'on ne constate pas de baisse de son taux de glycémie ?
3°. On contrôle 5 individus au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux n'a pas baissé ?

0.0.13 .

Trois urnes U_1, U_2 et U_3 contiennent respectivement 2 boules rouges et 2 vertes, 1 boule rouge et 3 vertes, 3 boules rouges et 1 verte. Trois joueurs $J_1, J_2, J3$ se voient attribuer respectivement les urnes U_1, U_2, U_3. Une partie est jouée lorsque chacun des 3 joueurs a extrait au hasard une boule de l'urne. Un des joueurs est déclaré vainqueur s'il obtient une boule de couleur différente de celle des deux autres joueurs.

1°. Montrer qu'il y a au plus un vainqueur.
2°. Calculer la probabilité des évènements suivants :
E_1="J_1, J_2 et J_3 tirent une boule rouge."
E_2="J_1, J_2 et J_3 tirent une boule verte."
E="Il n'y a pas de vainqueur."
A="Il y a un vainqueur."
B="J_1 est vainqueur."

0.0.14 .

Soit $n \geq 3$. On dispose de deux urnes U et V. U contient 2 boules blanches et n noires. V contient n boules blanches et 2 noires. On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette, successivement et sans remise.

1°. Calculer $\mathbb{P}(B \cap U)$.
2°. Calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(U/B)$.
3°. Déterminer n pour que $\mathbb{P}(U/B) \leq 0,1$

0.0.15 .

On tire au hasard, successivement et sans remise, 4 lettres du mot ATTACHANT. On considère le mot formé par les lettres obtenues, dans l'ordre où elles apparaissent. Quelle est la probabilité d'otenir le mot CHAT ?

0.0.16 .

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse (la grippe A, par exemple). Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non-vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze chez les vaccinés. Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ? Le vaccin est-il efficace ?

0.0.17 .

On considère n urnes numérotées de 1 à n, l'urne k contenant n boules noires et k boules blanches. On choisit au hasard une urne et dans cette urne une boule. On note U_k l'évènement "on a tiré la boule dans l'urne k" et N l'évènement "la boule tirée est noire".

1°. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?

2°. Démontrer que

$$\mathbb{P}(N) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$$

3°. Démontrer que

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} < \int_{0}^{2n} \frac{dx}{x}$$

4°. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(N)$

0.0.18 .

On considère 100 dés à six faces dont 50 sont homogènes et 50 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir six est de 1/2. On prend un dé au hasard et on constate que la face six est apparu. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?