

Exercice 1.1.

1°. X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: sa densité est

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x),$$

et sa fonction de répartition $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$. Comme $X \geq 0$ presque sûrement, $Y = \lfloor X \rfloor$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$[Y = k] = [k \leq X < k+1],$$

donc

$$\mathbb{P}[Y = k] = F_X(k+1) - F_X(k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)},$$

soit

$$\mathbb{P}[Y = k] = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^k.$$

En posant $p = 1 - e^{-\lambda} \in]0, 1[$, on obtient $\mathbb{P}[Y = k] = p(1-p)^k$: Y suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$ (nombre d'échecs avant le premier succès). On vérifie bien

$$\sum_{k \geq 0} p(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

En particulier

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{e^\lambda - 1},$$

$$\mathbb{V}[Y] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2}.$$

Ce résultat illustre le fait que la loi géométrique est l'analogue discret de la loi exponentielle : la partie entière d'une loi continue sans mémoire est une loi discrète sans mémoire.

2°. Les X_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On passe par la fonction de survie, car l'événement $[M_n > x]$ se factorise. Pour $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}[M_n > x] = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[X_i > x]$$

par indépendance, soit

$$\mathbb{P}[M_n > x] = (e^{-\lambda x})^n = e^{-n\lambda x}.$$

Ainsi $F_n(x) = 1 - e^{-n\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $F_n(x) = 0$ sinon : on reconnaît la fonction de répartition d'une exponentielle, donc

$$M_n \sim \mathcal{E}(n\lambda), \quad f_n(x) = n\lambda e^{-n\lambda x} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x),$$

avec $\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{n\lambda}$ et $\mathbb{V}[M_n] = \frac{1}{n^2\lambda^2}$.

Le minimum de lois exponentielles indépendantes est donc encore exponentiel, de paramètre égal à la somme des paramètres (ici $n\lambda$), et il se concentre en 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

3° Soient U_1, U_2 indépendantes de loi $\mathcal{U}[0, 1]$ et $M = \min(U_1, U_2)$. Même méthode : pour $x \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}[M > x] = \mathbb{P}[U_1 > x] \mathbb{P}[U_2 > x] = (1-x)^2.$$

D'où, pour $x \in [0, 1]$,

$$F_M(x) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2,$$

avec $F_M(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_M(x) = 1$ si $x > 1$. Par dérivation,

$$f_M(x) = 2(1-x) \mathbf{1}_{[0, 1]}(x),$$

c'est-à-dire la loi Beta(1, 2). On en déduit

$$\mathbb{E}[M] = \int_0^1 2x(1-x) dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{E}[M^2] = \int_0^1 2x^2(1-x) dx = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{V}[M] = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Plus généralement, le minimum de n uniformes indépendantes sur $[0, 1]$ a pour densité $n(1-x)^{n-1}$ sur $[0, 1]$, soit une loi Beta(1, n) d'espérance $1/(n+1)$.

4°. On note X de loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$, de densité

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

le cas standard correspondant à $\lambda = 1$. Cette densité est paire et d'intégrale 1.

Loi de $Y = |X|$: Y est à valeurs dans $[0, +\infty[$ et, pour $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y \leq y] &= \mathbb{P}[-y \leq X \leq y] = \int_{-y}^y \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} dt \\ &= 2 \int_0^y \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda y}, \end{aligned}$$

en utilisant la parité de f_X . On reconnaît la fonction de répartition de $\mathcal{E}(\lambda)$, donc

$$Y = |X| \sim \mathcal{E}(\lambda), \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}.$$

La loi de Laplace est donc l'exponentielle symétrisée. Calcul des probabilités demandées :

$$\mathbb{P}[X \geq 2] = \int_2^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} e^{-2\lambda},$$

soit $\frac{1}{2} e^{-2} \approx 0,0677$ pour $\lambda = 1$.

$$\mathbb{P}[X < 0] = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx = \frac{1}{2},$$

résultat immédiat par parité de la densité (la loi est symétrique par rapport à 0). Enfin $\mathbb{P}[X = 0] = 0$: X est une variable à densité, sa loi est diffuse et ne charge aucun point.

5°. X suit la loi $\mathcal{U}[-\pi/2, \pi/2]$, de densité $f_X(x) = \frac{1}{\pi}$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Comme $\mathbb{P}[X = -\pi/2] = \mathbb{P}[X = \pi/2] = 0$, on peut se restreindre à $X \in]-\pi/2, \pi/2[$, intervalle sur

lequel $\tan$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de réciproque $\arctan$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[\tan X \leq y] = \mathbb{P}[X \leq \arctan y] \\ = \int_{-\pi/2}^{\arctan y} \frac{dx}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan y.$$

En dérivant,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

$Y = \tan X$ suit donc la loi de Cauchy standard. Elle est symétrique, mais n'admet pas d'espérance (ni a fortiori de variance), car

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{\pi(1+y^2)} dy = +\infty.$$

Exercice 1.2.

Les X_i sont i.i.d. de même loi que X . On pose

$$\mu = \mathbb{E}[X], \quad \sigma^2 = \mathbb{V}[X], \quad \mu_k = \mathbb{E}[(X - \mu)^k], \quad \mu_2 = \sigma^2.$$

On suppose $\sigma^2 < +\infty$ pour la question 1 et $\mu_4 < +\infty$ pour la question 2 (le calcul d'une variance de S^2 fait intervenir des moments d'ordre 4).

1°. Par linéarité de l'espérance (l'indépendance n'est pas nécessaire ici) :

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

$\bar{X}$ est donc un estimateur sans biais de μ . Pour la variance, on utilise l'indépendance (en fait la seule décorrélation deux à deux), qui rend la variance additive :

$$\mathbb{V}[\bar{X}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[X_i] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

En particulier $\mathbb{V}[\bar{X}] \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$: $\bar{X}$ converge vers μ dans L^2 , donc en probabilité, ce qui redonne la loi faible des grands nombres. L'écart-type de $\bar{X}$ vaut $\sigma/\sqrt{n}$.

2°. Espérance de S^2 . On part de l'identité classique (formule de König-Huygens empirique) :

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.$$

Or $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2 + \mu^2$ et, d'après la question 1,

$$\mathbb{E}[\bar{X}^2] = \mathbb{V}[\bar{X}] + \mathbb{E}[\bar{X}]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right),$$

soit $(n-1)\sigma^2$, et finalement

$$\mathbb{E}[S^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

S^2 est donc un estimateur biaisé de σ^2 , de biais $-\sigma^2/n$, asymptotiquement sans biais. C'est la raison pour laquelle on lui préfère souvent la variance empirique corrigée

$$S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} S^2,$$

qui vérifie $\mathbb{E}[S^{*2}] = \sigma^2$.

Variance de S^2 . S^2 est invariante par translation : remplacer X_i par $X_i - \mu$ ne change ni $X_i - \bar{X}$ ni S^2 . On peut donc supposer $\mu = 0$, et alors

$$\mathbb{E}[X_i] = 0, \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2, \quad \mathbb{E}[X_i^4] = \mu_4.$$

Écrivons, avec $T = \sum_i X_i$,

$$nS^2 = A - B, \quad A = \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad B = \frac{T^2}{n},$$

puis

$$\mathbb{V}[nS^2] = \mathbb{V}[A] + \mathbb{V}[B] - 2\text{Cov}(A, B).$$

Variance de A . Les X_i^2 sont i.i.d., donc

$$\mathbb{V}[A] = n \mathbb{V}[X_1^2] = n(\mu_4 - \sigma^4).$$

Variance de B . En développant T^4 , seuls survivent les termes en X_i^4 (il y en a n) et en $X_i^2 X_j^2$, $i \neq j$ (avec le coefficient multinomial $\binom{4}{2} = 6$ et $\binom{n}{2}$ paires) :

$$\mathbb{E}[T^4] = n\mu_4 + 3n(n-1)\sigma^4,$$

et $\mathbb{E}[T^2] = n\sigma^2$, d'où $\mathbb{E}[B] = \sigma^2$ et

$$\mathbb{V}[B] = \frac{\mathbb{E}[T^4]}{n^2} - \sigma^4 = \frac{\mu_4}{n} + \frac{(2n-3)\sigma^4}{n}.$$

Pour la covariance, on développe

$$\mathbb{E}[AB] = \frac{1}{n} \sum_i \sum_{j,k} \mathbb{E}[X_i^2 X_j X_k].$$

Dès que $j \neq k$, l'un au moins des indices j, k apparaît à la puissance 1 et, par indépendance et centrage, l'espérance est nulle. Il reste $j = k$:

$$\mathbb{E}[AB] = \frac{1}{n} (n\mu_4 + n(n-1)\sigma^4) = \mu_4 + (n-1)\sigma^4,$$

et comme $\mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B] = n\sigma^2 \cdot \sigma^2$,

$$\text{Cov}(A, B) = \mu_4 - \sigma^4.$$

Assemblage. En reportant,

$$\mathbb{V}[nS^2] = (n-2)(\mu_4 - \sigma^4) + \frac{\mu_4}{n} + \frac{(2n-3)\sigma^4}{n},$$

soit, après regroupement des coefficients de μ_4 et de σ^4 ,

$$\mathbb{V}[nS^2] = \frac{(n-1)^2}{n} \mu_4 - \frac{(n-1)(n-3)}{n} \sigma^4.$$

Comme $\mathbb{V}[S^2] = \mathbb{V}[nS^2]/n^2$, on conclut

$$\mathbb{V}[S^2] = \frac{n-1}{n^3} \left[(n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^4 \right].$$

Vérifications et cas particuliers. Pour $n = 1$ on a $S^2 = 0$ et la formule donne bien 0. Quand $n \rightarrow +\infty$,

$\mathbb{V}[S^2] \sim \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n} \rightarrow 0$: S^2 converge vers σ^2 dans L^2 ,
donc en probabilité. Si les X_i sont gaussiennes,
 $\mu_4 = 3\sigma^4$ et

$$\mathbb{V}[S^2] = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4,$$

ce qui est cohérent avec $nS^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$, de
variance $2(n-1)$. Enfin, pour la variance empirique
corrigée $S^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2$:

$$\mathbb{V}[S^{*2}] = \frac{n^2}{(n-1)^2} \mathbb{V}[S^2] = \frac{1}{n} \left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right).$$