

1.1.

1°. $X \sim \mathcal{G}(N)$, loi de $Y = \lfloor X \rfloor$?

Les valeurs possibles de Y sont $0, 1, \dots$
 Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, sa loi va être donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y=k] &\text{ avec } [Y=k] = \text{"la partie entière de } X \text{ est } k\text{"} \\ &= \mathbb{P}[k \leq X < k+1] = \int_k^{k+1} N e^{-Nx} dx = e^{-Nk} (1 - e^{-N}) \\ &= q^k (1-q) \quad \text{avec } q = e^{-N} \\ \Rightarrow &\text{c'est une loi géométrique (décalée) de paramètre } p = 1 - e^{-N} \end{aligned}$$

2°. $X_1, \dots, X_m$ i.i.d. $\sim \mathcal{G}(N)$

$M_m = \min(X_1, \dots, X_m)$, loi de M_m ?

la fonction de répartition de M_m est $F_m(t) = \mathbb{P}[M_m \leq t]$; elle caractérise sa loi ; celle des X_i est $F(t) = \mathbb{P}[X_1 \leq t] = \int_0^t N e^{-Nx} dx$ si $t \geq 0$ 0 sinon

$$F(t) = 1 - e^{-Nt} \quad \text{si } t \geq 0 \text{ (et 0 sinon)}$$

$$\begin{aligned} \bullet [M_m \geq t] &= \bigcap_{i=1}^m [X_i \geq t] \quad \begin{array}{c} x_2 \quad x_1 \quad x_0 \\ t \quad M_m \quad X_m \end{array} \\ \text{donc} & \\ \mathbb{P}[M_m \geq t] &= \prod_{i=1}^m \mathbb{P}[X_i \geq t] \text{ par II des } X_i \\ &= \mathbb{P}[X_1 \geq t]^m \text{ par identique distrib.} \\ &= (e^{-Nt})^m = e^{-mNt} \\ \Rightarrow F_m(t) &= 1 - e^{-(mN)t} \text{ si } t \geq 0 \text{ (0 sinon)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow M_m$ suit une loi exponentielle de paramètre mN

3°. Minimum de 2 lois uniformes sur $[0,1]$, indépendantes

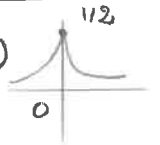
soient X et Y 2 v.a. $\mathbb{R}$ de loi uniforme sur $[0,1]$ et $Z = \min(X,Y)$ comme dans le 2°, la fonction de répartition de Z : $F_Z(t) = \mathbb{P}[Z \leq t]$
 $\mathbb{P}[Z \geq t] = \mathbb{P}[X \geq t] \times \mathbb{P}[Y \geq t]$
 $\Rightarrow F_Z(t) = 1 - (1 - F_X(t))^2$ si $t \in [0,1]$ et 0 sinon

la densité de Z est donc

$$\begin{aligned} g_Z(t) &= F'_Z(t) = 2 F'_X(t) (1 - F_X(t)) \\ &= 2(1 - F_X(t)) \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

4°. Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y \leq t] &= \mathbb{P}[|X| \leq t] \\ &= \mathbb{P}[-t \leq X \leq t] \text{ si } t \geq 0 \text{ (0 sinon)} \\ &= F_X(t) - F_X(-t) = 1 - e^{-t} \\ &\text{qui est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1} \\ \Rightarrow Y &\sim \mathcal{G}(1) \\ \mathbb{P}[X \geq 2] &= \int_2^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} e^{-2} \\ \mathbb{P}[X < 0] &= \frac{1}{2} \quad (\text{loi symétrique}) \\ \mathbb{P}[X=0] &= 0 \quad (\text{loi à densité } C^0) \end{aligned}$$



5°. Soit G la fonction de répartition de Y et F celle de X :

$\arctan$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$, $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbb{P}[Y \leq s] = \mathbb{P}[\tan X \leq s] \\ &= \mathbb{P}[X \leq \arctan s] = F(\arctan s) \end{aligned}$$

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[-\pi/2, \pi/2]}(t)$$

$$\Rightarrow g(s) = G'(s) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+s^2} \mathbb{1}_{[-\pi/2, \pi/2]}(\arctan s)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}$$

qui est la densité d'une loi de Cauchy.