

$$1^{\circ}. X \sim \mathcal{P}(\theta)$$

$(X_1, \dots, X_m)$ m-échantillon de X

$$X_1, \dots, X_m \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{P}(\theta) \Rightarrow S = m\bar{X} = \sum_{i=1}^m X_i \sim \mathcal{P}(m\theta)$$

- On sait que $\mathbb{E}[X] = \text{Var } X = \theta \Rightarrow$ d'où l'idée d'estimer θ par la moyenne empirique ou la variance empirique

- Si $\theta_1 = \bar{X} = S/m$ on a $\mathbb{E}[\theta_1] = \mathbb{E}[\bar{X}] = \theta$

c'est un estimateur sans biais.

$$\text{Var}(\theta_1) = \frac{1}{m^2} \text{Var } S = \frac{\theta}{m} \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow \infty \text{ consistant (rv en norme } L^2 \text{ donc cv en proba)}$$

- Si $\theta_2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$ alors $\mathbb{E}[\theta_2] = \theta$

θ_2 est sans biais (à condition de choisir la variance empirique en $m-1$ au lieu de m)

$$\text{Var } \theta_2 = \frac{\mu_4}{m} - \frac{m-3}{m(m-1)} \mu_2^2 \quad (\text{cf. cours ou exo})$$

$$\begin{cases} \mu_4 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^4] = \mathbb{E}[(X - \theta)^4] \\ \mu_2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{Var } X \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \mathbb{E}[X^3] = \theta^3 + 3\theta^2 + \theta \\ \mathbb{E}[X^4] = \theta^4 + 6\theta^3 + 7\theta^2 + \theta \end{cases}$$

en utilisant la fonction génératrice de la loi de Poisson :

$$G(s) = \sum_{k \geq 0} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} s^k = e^{-\theta} e^{\theta s} = e^{-(1-s)\theta}$$

fonc génératrice des moments.

$$\Rightarrow \mu_4 = 3\theta^2 + \theta$$

$$\Rightarrow \text{Var } \theta_2 = \frac{2\theta^2}{m-1} + \frac{\theta}{m} \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow \infty \quad \theta_2 \text{ est consistant (faiblement et fort)}$$

$$2^{\circ}. \text{Var } \theta_2 - \text{Var } \theta_1 = \frac{2\theta^2}{m-1} > 0$$

$$\Rightarrow \text{Var } \theta_2 > \text{Var } \theta_1$$

$$\Rightarrow \underline{\theta_1 \text{ plus efficace que } \theta_2}$$

- fonction génératrice des moments

$$\eta_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{-(1-e^t)\theta} = 1 + m_1 t + m_2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$= \exp\left(\theta t + \theta \frac{t^2}{2} + \theta \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\right)$$

$$= 1 + \theta t + \theta \frac{t^2}{2} + \theta \frac{t^3}{3!} + \frac{1}{2} (\theta t + \theta \frac{t^2}{2} + \theta \frac{t^3}{3!})^2 + \frac{1}{3!} (\theta t + \dots)^3 + o(t^3)$$

$$= 1 + \theta t + \frac{1}{2} (\theta + \theta^2) t^2 + \left(\frac{\theta}{6} + \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{6}\right) t^3 + o(t^3)$$

$$\Rightarrow m_1 = \mathbb{E} = \theta$$

$$m_2 = \theta + \theta^2$$

$$m_3 = \theta + 3\theta^2 + \theta^3$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} = \theta$$

$$\text{Var} = \theta$$