

1.14.

$X_1 \perp X_2$ via $\mathcal{G}(d_i)$. Z durée de vie

1°. Req $X \sim \mathcal{G}(d) \Leftrightarrow \mathbb{P}[X > x] = e^{-dx}$

Évident

2°. $\mathbb{P}[Z \geq t]$? loi de Z ?

Proba que la panne soit due à 1
le syst tombe en panne si
 X_1 ou X_2 tombe en panne. Donc
 $Z = \inf(X_1, X_2)$.

$\mathbb{P}[Z \geq t] = \mathbb{P}[X_1 \geq t] \mathbb{P}[X_2 \geq t]$
par $\perp$ des X_i

$\mathbb{P}[Z \geq t] = e^{-(d_1+d_2)t}$ si $t \geq 0$
et 0 sinon $\Rightarrow Z \sim \mathcal{G}(d_1+d_2)$

$\mathbb{P}[X_1 \leq t / Z \leq t]$

$= \mathbb{P}[X_2 \geq X_1]$

$= \iint_{\Delta} d_1 d_2 e^{-d_1 x} e^{-d_2 y} dx dy$

$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / y \geq x\}$

$= \int_0^\infty d_2 \left(\int_0^y d_1 e^{-d_1 x} dx \right) e^{-d_2 y} dy$

$= \int_0^\infty d_2 [-e^{-d_1 x}]_0^y e^{-d_2 y} dy$

$= d_2 \int_0^\infty (1 - e^{-d_1 y}) e^{-d_2 y} dy$

$= 1 - \frac{d_2}{d_1+d_2} = \frac{d_1}{d_1+d_2}$

3°. m syst $\perp$ $Z_1, \dots, Z_m$

modèle? $d = (d_1, d_2)$ identif?

$\mathcal{U} = ([0, \infty]^m; \mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\otimes m}; \{\mathcal{G}(d_1+d_2)\})$

$d_1+d_2 > 0$

modèle non identifiable

car $(d_1+\alpha) + (d_2-\alpha) = d_1+d_2$

$\Rightarrow$ non injectif

b. On observe à la fois les durées de vie et la cause de défaillance.

Modèle? Identifiable?

le paramètre est (d_1, d_2, i) $i=1, 2$
qui est aléatoire

On pose $I = \mathbb{1}_{[X_2 > X_1]}$ suit une loi
de Bernoulli de param $p = \frac{d_1}{d_1+d_2}$

$\mathcal{U} = ([0, \infty]^m \times \{0, 1\}^m; \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}^{\otimes m} \otimes \{0, 1\}^{\otimes m}; \{\mathbb{P}_\theta^{\otimes m}\})$
 $\theta = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2$

$\mathbb{P}_\theta \sim \int (Z, I) \ll d * \delta$

$\mathbb{P}[Z > t / I = 1] = \frac{\mathbb{P}[X_2 > X_1 > t]}{\mathbb{P}[X_2 > X_1]}$

$\mathbb{P}[X_2 > X_1 > t] = \int_0^\infty \left(\int_t^\infty d_1 e^{-d_1 u} du \right) d_2 e^{-d_2 v} dv$

$= d_2 \int_t^\infty e^{-(d_1+d_2)v} dv = -\frac{d_2}{d_1+d_2} e^{-(d_1+d_2)v} \Big|_t^\infty$

$= \frac{d_2}{d_1+d_2} e^{-(d_1+d_2)t}$

$\Rightarrow \mathbb{P}[Z > t / I = 1] = \frac{d_2}{d_1} e^{-(d_1+d_2)t}$

et $\mathbb{P}([Z > t] \cap [I = 1]) = \frac{d_2}{d_1+d_2} e^{-(d_1+d_2)t}$

$\Rightarrow \int (t, \lambda) = d_i \exp[-(d_1+d_2)t]$

$\Rightarrow$ en notant $m_1 = \{i / I = 1\}$ et

$m_2 = \{i / I = 2\}$, on a $m_1 + m_2 = m$

$L_m(t_1, \dots, t_m / (d_1, d_2, i))$

$= d_1^{m_1} e^{-(d_1+d_2) \sum_{i \in m_1} t_i} d_2^{m_2} e^{-(d_1+d_2) \sum_{i \in m_2} t_i}$

$= d_1^{m_1} d_2^{m_2} e^{-(d_1+d_2) \Delta}$ où $\Delta = \sum_{i=1}^m t_i$

le couple (d_1, d_2) est alors
identifiable.

4°. Un système avec m_1 type 1 et
 m_2 type 2 de durées de vie

$X_1^1, \dots, X_{m_1}^1$ $X_1^2, \dots, X_{m_2}^2$ $i=1, 2$

a. loi de la Σ de m va $\perp \mathcal{G}(d_i)$

c'est une loi $\Gamma(m, d)$

Z en fonc des X_j^i ; $j=1,2$

Déduire $P[Z \geq t]$

$$Z = \inf \left(\sum_{i=1}^{m_1} X_1^i, \sum_{i=1}^{m_2} X_2^i \right)$$

$$= \inf(S_1, S_2)$$

$$S_1 \sim \Gamma(m_1+1, \lambda_1) \quad S_1 \perp S_2$$

$$S_2 \sim \Gamma(m_2+1, \lambda_2)$$

$$P[Z \geq t] = P[S_1 \geq t] \times P[S_2 \geq t]$$

$$P[S \geq t] = \int_t^\infty \frac{\lambda^m}{(m-1)!} (dx)^{m-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$P[Z \geq t] = \left(\int_t^\infty \frac{\lambda_1^{m_1}}{(m_1-1)!} (dx)^{m_1-1} e^{-\lambda_1 x} dx \right) \times \left(\int_t^\infty \frac{\lambda_2^{m_2}}{(m_2-1)!} (dx)^{m_2-1} e^{-\lambda_2 x} dx \right)$$

c. N = nb de machines sorties avant la 1ère panne du système
 Z_0 = durée avant la 1ère panne d'un composant
 Z_i : durée ent la panne i et $i+1$ d'un composant.

$$Z = \sum_{i=0}^N Z_i \text{ durée de vie totale du syst}$$

• On sait que $P[X \geq s+t | X \geq t] = P[X \geq s]$ (abs de mémoire)

$$Z_0 = \min(X_1^0, X_2^0) \sim \mathcal{G}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Sachant $[Z_0 = t]$ et $[S_0 = 1]$,

$$Z_1 = \min(X_1^1, X_2^0) / X_2^0 > t$$

$$\text{mais } \mathcal{L}(X_2^0 / X_2^0 > t) = \mathcal{E}(\lambda_2)$$

d'après la prop d'abs de mémoire

Donc $\mathcal{L}(Z_1 / [Z_0 = t] \cap [S_0 = 1])$

est une $\mathcal{G}(\lambda_1 + \lambda_2)$

$\Rightarrow Z_i \sim \mathcal{G}(\lambda_1 + \lambda_2)$ sont $\perp$

d. Loi de N ?

$[N=k] = "$ m_1 machines 1 et $k-m_1$ machines 2 sont sorties du stock et la dernière machine de type 1 tombe en panne au le sym en changeant 1 et 2"

$$k \in \{ \min(m_1, m_2); m_1 + m_2 - 1 \}$$

$$P[N=k] = p_1 C_{k-m_1}^{m_1} p_1^{m_1} p_2^{k-m_1} + p_2 C_{k-m_2}^{m_2} p_2^{m_2} p_1^{k-m_2}$$

$$p_1 = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$p_2 = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$$

ou encore

$$[N=k] = \left(\left[\sum_{i=1}^{k-1} I_i = m_1 - 1 \right] \cap [I_k = 1] \right) \cup \left(\left[\sum_{i=1}^{k-1} I_i = k - m_2 \right] \cap [I_k = 0] \right)$$

$$\text{avec } I_i = \mathbb{1}_{[X_1^i > X_2^i]}$$

e. $\cap q \ N \perp Z_i$. Calc $E[Z/N]$ puis $E[Z]$

$$[N=k] \in \sigma(I_1, \dots, I_k) \perp (Z_i)_{i=1, \dots, k} \Rightarrow N \perp Z_i$$

$$E[Z/N=m] = E\left[\sum_{i=0}^m Z_i / N=m\right]$$

$$= (m+1) E[Z_1 / N=m]$$

$$= (m+1) E[Z_1] \text{ car } Z_1 \perp N$$

$$E[Z/N] = (N+1) E[Z_1] = \frac{N+1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\Rightarrow E[Z] = \frac{E[N] + 1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$