

$x_1, \dots, x_n$ n échantillon $X \sim \mathcal{E}(1/\theta)$

1.15.

1°. des X_i sont à support dans $\mathbb{R}_+$ et leur densité jointe est, par indépendance,
 où $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left[-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i\right] \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n}(x)$

le modèle $\mathcal{M}$ est donné par $\mathcal{M} = (\mathbb{R}_+^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+^n}, \{f_\theta(x); \theta > 0\})$

2°. Commençons par remarquer que le modèle est homogène car les X_i sont à support dans $\mathbb{R}_+$.

$$E[X] = \theta \text{ et } \text{Var } X = \theta^2$$

$$\ln L(x|\theta) = \ln \left\{ \frac{1}{\theta^n} e^{-s/\theta} \right\} \quad \text{si } x_i \geq 0 \forall i \text{ en posant } s = \sum_{i=1}^n x_i \text{ et 0 sinon.}$$

$$= -n \ln \theta - \frac{s}{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x|\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{s}{\theta^2} = 0 \text{ si } \theta = \frac{s}{n}$$

enfin il s'agit bien d'un max car la dérivée change de signe en s/n

$$\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L \quad \begin{array}{c} - \quad + \\ \hline s/n \end{array}$$

• propriétés de l'estimateur

$$E[\hat{\theta}] = E[\bar{X}] = \theta \Rightarrow \hat{\theta} \text{ est sans biais.}$$

$$EQM(\hat{\theta}, \theta) = E[(\bar{X} - \theta)^2] = \text{Var } \bar{X} = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

l'EQM est asymptotiquement nulle.

• des X_i sont iid dans L^1 : la loi forte des grands nombres (LFGN pour la suite) s'applique: $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$

$\hat{\theta}$ est fortement consistant.

• loi asymptotique?

des X_i sont dans L^2 et le théorème de la limite centrale (TLC par la suite) s'applique. $E[\hat{\theta}] = E[\bar{X}] = \theta$ et $\text{Var } \hat{\theta} = \frac{\theta^2}{n}$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

$\hat{\theta}$ est donc $\sqrt{n}$ -consistant et asymptotiquement normal (A.N. par la suite).

3°. soit $m(\theta)$ le moment théorique d'ordre 1: $m(\theta) = E[X] = \theta$

soit $\hat{m}(\theta)$ le moment empirique d'ordre 1: $\hat{m}(\theta) = \bar{X}$

d'estimateur $\hat{\theta}$ des moments est la solution de $\hat{m}(\theta) = m(\hat{\theta})$

$$\text{On posera donc } \hat{\theta} = m(\hat{\theta}) = \hat{m}(\theta) = \bar{X}$$

On retrouve (dans ce cas) l'estimateur $\bar{X}$ au max de vraisemblance

$$4°. z = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[X_i \geq 2]}$$

Par indépendance des $(X_i)_i$, la suite $(\mathbb{1}_{[X_i \geq 2]})_{i \geq 1}$ est une suite de v.a de Bernoulli indépendantes

identiquement distribuées de paramètre $p(\theta) = \mathbb{P}[X_i \geq 2]$.

Par suite $Z \sim \mathcal{B}(n; p(\theta))$

$$p(\theta) = \int_2^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx = e^{-2/\theta} \Rightarrow \mathbb{E}[Z] = n e^{-2/\theta}$$

Posons $\hat{\theta} = \frac{Z}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[X_i \geq 2]}$ moy empirique des $\mathbb{1}_{[X_i \geq 2]} = Y_i$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[Z] = e^{-2/\theta}$$

La LFGN s'applique car les Y_i sont iid et bornées, donc L^1 .

$$\text{et } \lim_n \mathbb{P}_{\theta} \left(\frac{Z}{n} = e^{-2/\theta} \right)$$

• Posons alors $\varphi(x) = -\frac{2}{\ln x}$, fnc C^0 sur $]0, 1[$, $\varphi(e^{-2/\theta}) = \theta$

Le th de la fonction continue nous assure alors que

$$\lim_n \varphi\left(\frac{Z}{n}\right) = \theta \quad \text{Ainsi } \underline{T_n = -2 \ln^{-1}\left(\frac{Z}{n}\right)} \text{ est un}$$

estimateur fortement consistant de θ

• Posons $Y_i = \mathbb{1}_{[X_i \geq 2]}$, les $(Y_i)_i$ sont iid $\sim b(\theta)$ et bornées donc L^2
de TCL s'applique et $\lim_n \mathcal{L} \sqrt{n}(\bar{Y} - \mathbb{E}[Y]) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0; pq)$

$$\Rightarrow \lim_n \mathcal{L} \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) = \mathcal{N}(0; pq) \quad \theta = p \text{ et } \hat{\theta} = \hat{p}$$

Appliquons maintenant la méthode Δ : $f(x) = -\frac{2}{\ln x}$ est dérivable

$$\text{et } f'(x) = \frac{2}{x(\ln x)^2}$$

les résultats précédents assurent alors $T_n = f\left(\frac{Z}{n}\right)$ est $\sqrt{n}$ consistant

$$\text{et que } \lim_n \mathcal{L} \sqrt{n} \left[f\left(\frac{Z}{n}\right) - f(\theta) \right] = \mathcal{N}(0; \sigma^2)$$

$$\text{où } \sigma^2 = f'(p)^2 pq = \frac{4}{p^2(\ln p)^4} pq \quad \text{et } p(\theta) = e^{-2/\theta}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma^2 = \frac{\theta^4}{4} \cdot \frac{1 - e^{-2/\theta}}{e^{-2/\theta}}} \quad \text{donc } T_n \text{ A.N.}$$