

$$1.2. \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m X_i \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$$

$$1^0. \mathbb{E}[\bar{X}] ? \mathbb{V}(\bar{X}) ?$$

$$\bullet \mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i] \text{ par linéarité}$$

$$= n \times \frac{1}{n} \times \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_1] = \underline{\underline{m}}$$

par id. distribution des X_i

$$\bullet \mathbb{V}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^m \mathbb{V}(X_i) \text{ par id. des } X_i$$

$$= \frac{1}{n^2} \times n \times \mathbb{V}(X_1) = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n}}} \text{ par id. distrib}$$

$$2^0. \mathbb{E}[S^2] \text{ et } \mathbb{V}(S^2)$$

$$\bullet n \mathbb{E}[S^2] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m (X_i^2 - 2X_i \bar{X} + \bar{X}^2) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i^2] - 2 \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m X_i \bar{X} \right] + n \mathbb{E}[\bar{X}^2]$$

$$\mathbb{E}[\bar{X}^2] = \mathbb{V}(\bar{X}) + (\mathbb{E}[\bar{X}])^2 = \frac{\sigma^2}{n} + m^2$$

$$n \mathbb{E}[\bar{X}^2] = \sigma^2 + n \cdot m^2$$

$$\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i^2] = n \times \mathbb{E}[X_1^2] = n (\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2)$$

$$= n \times (\sigma^2 + m^2)$$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m X_i \cdot \bar{X} \right] = n \times \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m X_i \times \bar{X} \right]$$

$$= n \times \mathbb{E}[\bar{X}^2]$$

$$\Rightarrow n \mathbb{E}[S^2] = n(\sigma^2 + m^2) - n \mathbb{E}[\bar{X}^2]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S^2] = \sigma^2 + m^2 - (\mathbb{V}(\bar{X}) + (\mathbb{E}[\bar{X}])^2)$$

$$= \sigma^2 + m^2 - \frac{\sigma^2}{n} - m^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{n-1}{n} \sigma^2}}$$

- $\mathbb{V}(S^2)$: le calcul est (très) long et (très) pénible.

Comme lu dans un ouvrage :

"un calcul dont la seule difficulté est la longueur, donne : "

$$\mathbb{V}(S^2) = \frac{n}{n-1} \left[\frac{\mu_4}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)} \mu_2^2 \right]$$

$$= \frac{\mu_4}{n-1} - \frac{n-3}{(n-1)^2} \mu_2^2$$

$$\mu_2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

$$\mu_4 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^4]$$